



В. Е. ГОЛАНТ, А. П. ЖИЛИНСКИЙ, И. Е. САХАРОВ

# ОСНОВЫ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1977

Голант В. Е., Жилинский А. П., Сахаров И. Е. **Основы физики плазмы.** М., Атомиздат, 1977, 384 с.

Изложены основы современной физики плазмы. Охвачен широкий диапазон условий, в том числе слабо- и сильноионизованная плазма, плазма при отсутствии магнитного поля и при существенном его влиянии. Наряду с подробным количественным анализом процессов, определяющих поведение плазмы, дано качественное обсуждение физической картины этих процессов.

Книга предназначена для студентов, аспирантов, инженеров и научных работников, интересующихся физикой плазмы и ее приложениями.

Рис. 101. Табл. 4. Список литературы 123 наименования.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга написана на основе курсов лекций, читавшихся авторами студентам физических специальностей в Ленинградском политехническом институте им. М. И. Калинина и научным работникам, начинающим работать в области физики плазмы и ее приложений в Физико-техническом институте им. А. Ф. Иоффе. Цель книги — систематизированное изложение основ современной физики плазмы. Мы стремились сочетать в ней достаточно подробный и обоснованный количественный анализ процессов, определяющих поведение плазмы, с качественным обсуждением физической картины этих процессов.

В гл. 1 обсуждаются основные особенности плазмы, отличающие ее от других состояний вещества. В гл. 2 описаны различные типы столкновений, существенно влияющих на поведение плазмы, дан краткий обзор имеющихся данных об их характеристиках. В гл. 3, 5 и 6 изложены методы кинетического описания свойств плазмы (методы кинетического уравнения и уравнений моментов). Гл. 4 посвящена термодинамически равновесной плазме и, в частности, анализу ионизационного равновесия. Кинетическое рассмотрение отклонений от равновесия и их влияния на функции распределения заряженных частиц по скоростям представлено в гл. 5. Там же обсуждается распределение скоростей электронов в электрическом поле при различных условиях. Детальное рассмотрение процессов переноса заряженных частиц и их энергии в слабо- и сильноионизованной плазме при отсутствии магнитного поля представлено в гл. 7. На основе данных о коэффициентах переноса анализируется ионизационный баланс и баланс энергий заряженных частиц в плазме. Гл. 8—10 посвящены свойствам плазмы в магнитном поле. В гл. 8 описывается движение заряженных частиц плазмы в магнитном поле при различных его конфигурациях. Гл. 9 содержит анализ процессов переноса, баланса заряженных частиц и их энергий в магнитном поле. Здесь обсуждается, в частности, влияние турбулентности плазмы на процессы переноса. Наконец, в гл. 10 рассматривается поведение полностью ионизованной плазмы в магнитном поле, в первую очередь, равновесие и устойчивость удержания плазмы магнитным полем.

В конце книги приводится список литературы, включающий основные руководства и монографии по физике плазмы, издававшиеся в последние годы на русском языке, а также обзорные статьи из сборников «Вопросы теории плазмы».

Из-за ограниченного объема книги мы не имели возможности рассмотреть в ней вопросы, связанные с возбуждением и распространением волн в плазме. Читатель может ознакомиться с ними по монографиям и обзорам, представленным в списке литературы.

В процессе написания книги значительную помощь оказали нам сотрудники плазменной лаборатории кафедры физической электроники Ленинградского политехнического института. Считаю приятным долгом выразить им свою признательность.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $a$  — радиус плазмы
- $a$  — ускорение
- $b_\alpha$  — подвижность частиц сорта  $\alpha$
- $c$  — скорость света
- $D_\alpha$  — коэффициент диффузии частиц сорта  $\alpha$
- $D_A$  — коэффициент амбиполярной диффузии
- $D_\alpha^T$  — коэффициент термодиффузии
- $D_v$  — коэффициент диффузии в пространстве скоростей
- $D_H$  — коэффициент диффузии магнитного поля
- $d$  — дипольный момент
- $E$  — напряженность электрического поля
- $e$  — заряд электрона
- $\mathcal{E}$  — внутренняя энергия
- $\mathcal{E}_{lm}$  — энергия перехода с уровня  $l$  на уровень  $m$
- $\mathcal{E}_{0j} = \mathcal{E}_j$  — энергия возбуждения уровня  $j$
- $\mathcal{E}_i$  — энергия ионизации
- $F$  — шестимерная функция распределения
- $F$  — сила
- $f(\vartheta)$  — амплитуда рассеяния
- $f_\alpha(v)$  — функция распределения частиц сорта  $\alpha$  по скоростям
- $f_v$  — функция распределения по полным скоростям
- $f_K$  — функция распределения по энергиям
- $f_0, f_1$  — изотропная и направленная составляющие функции распределения
- $G$  — сила, действующая на единицу объема плазмы
- $g$  — статистический вес
- $H$  — напряженность магнитного поля
- $H_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(n)}$  — полиномы Эрмита — Чебышева
- $h$  — единичный вектор в направлении  $H$
- $\hbar = h/2\pi$  — постоянная Планка
- $J_s$  — функция Бесселя первого рода порядка  $s$
- $j$  — плотность тока
- $I$  — ток
- $i = \sqrt{-1}$
- $K$  — кинетическая энергия
- $k^q$  — константа процесса  $q$
- $k$  — волновое число
- $\mathcal{K}_\alpha$  — коэффициент теплопроводности частиц сорта  $\alpha$
- $L$  — характерный размер плазмы
- $L_\alpha$  — кулоновский логарифм в сечении столкновений частиц сорта  $\alpha$
- $l$  — длина

- $M$  — момент количества движения  
 $m_\alpha$  — масса частицы сорта  $\alpha$   
 $N$  — число частиц  
 $n_\alpha$  — концентрация частиц сорта  $\alpha$   
 $n$  — концентрация заряженных частиц  
 $P$  — мощность  
 $P_E$  — мощность нагрева единицы объема плазмы электрическим полем  
 $\mathbf{P}_\alpha$  — импульс частицы сорта  $\alpha$   
 $\tilde{P}_\alpha$  — тензор потока импульса частиц сорта  $\alpha$   
 $p_\alpha$  — давление частиц сорта  $\alpha$   
 $p_H$  — магнитное давление  
 $Q_{\alpha\beta}$  — число столкновений частиц сортов  $\alpha$  и  $\beta$  в единицу времени  
 $Q_\alpha$  — плотность потока энергии частиц сорта  $\alpha$   
 $q_\alpha$  — плотность потока тепла частиц сорта  $\alpha$   
 $q$  — запас устойчивости тороидальной магнитной ловушки  
 $\mathbf{R}$  — шестимерный радиус-вектор  
 $R$  — радиус кривизны  
 $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$  — сила трения, действующая на частицы сорта  $\alpha$  в результате их столкновений с частицами сорта  $\beta$   
 $\mathbf{R}_{\alpha\beta}^T$  — термосила, обусловленная столкновениями частиц сортов  $\alpha$  и  $\beta$   
 $r$  — расстояние  
 $\mathbf{r}$  — радиус-вектор  
 $r_\alpha$  — радиус атома  
 $r_s$  — радиус сильного взаимодействия  
 $r_D$  — дебаевский радиус  
 $S$  — площадь  
 $S_{\alpha\beta}^q$  — столкновительный член кинетического уравнения, описывающий столкновения типа  $q$  между частицами сорта  $\alpha$  и  $\beta$   
 $S_0, S_1$  — столкновительные члены уравнений для компонент функции распределения электронов  
 $s_{\alpha\beta}^q$  — полное поперечное сечение столкновений типа  $q$  между частицами сорта  $\alpha$  и  $\beta$   
 $s_{\alpha\beta}^t$  — транспортное сечение упругих столкновений  
 $s_{\alpha\beta}^n, s_{\alpha\beta}^l, s_{\alpha\beta}^h$  — суммарное сечение неупругих столкновений, сечение неупругих столкновений с малой и большой потерей энергии  
 $T$  — температура  
 $T_\alpha$  — температура частиц сорта  $\alpha$   
 $t$  — время  
 $U$  — потенциальная энергия взаимодействия  
 $\mathbf{u}$  — направленная скорость (средняя скорость)  
 $\mathbf{u}_\alpha$  — направленная скорость частиц сорта  $\alpha$   
 $\mathbf{u}_E, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_T, \mathbf{u}_p$  — компоненты направленной скорости, связанные с движением в поле под действием градиентов концентрации, температуры и давления  
 $\mathbf{u}_{d\alpha}$  — скорость дрейфа частиц сорта  $\alpha$   
 $\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_g$  — фазовая и групповая скорости волны  
 $\mathbf{V}$  — шестимерный вектор скорости  
 $V$  — объем  
 $v$  — скорость

- $v_\alpha$  — скорость частиц сорта  $\alpha$   
 $v_0$  — скорость центра инерции  
 $v, v_{\alpha\beta}$  — относительная скорость частиц сорта  $\alpha$  и  $\beta$   
 $v'_\alpha, v', v'_{\alpha\beta}$  — векторы скорости после столкновения  
 $v_{T\alpha} = (3T_\alpha/m_\alpha)^{1/2}$  — тепловая скорость  
 $W$  — энергия  
 $w$  — хаотическая компонента скорости  
 $Z_\alpha$  — зарядовое число частиц сорта  $\alpha$   
 $\alpha$  — коэффициент рекомбинации  
 $\beta$  — отношение кинетического давления к магнитному  
 $\Gamma_\alpha$  — плотность потока частиц сорта  $\alpha$   
 $\Gamma_v$  — плотность потока в пространстве скоростей  
 $\gamma$  — инкремент нарастания неустойчивости  
 $\gamma$  — показатель адиабаты  
 $\Delta q = q' - q$  — изменения величины  $q$  при столкновении  
 $\delta_{ik}$  — символ Кронекера  
 $\delta p_x, \delta x$  — квантовомеханическая неопределенность импульса и координаты  
 $\epsilon$  — электрическая проницаемость  
 $\xi$  — прицельное расстояние  
 $\xi$  — смещение элемента объема плазмы  
 $\eta$  — степень ионизации  
 $\eta_\alpha$  — коэффициент отражения частиц сорта  $\alpha$   
 $\vartheta$  — угол рассеяния  
 $\kappa_{\alpha\beta}$  — коэффициент передачи энергии при столкновениях частиц сорта  $\alpha$  и  $\beta$   
 $\Lambda$  — диффузионная длина  
 $\Lambda$  — длина волны возмущения (в гл. 10)  
 $\lambda_{\alpha\beta}$  — длина свободного пробега частиц сорта  $\alpha$  до их столкновения с частицами сорта  $\beta$   
 $\lambda_\alpha$  — дебройлева длина волны частицы сорта  $\alpha$   
 $\mu_{\alpha\beta}$  — приведенная масса при столкновениях частиц сортов  $\alpha$  и  $\beta$   
 $\mu$  — магнитный момент  
 $\nu_{\alpha\beta}$  — частота столкновений частиц сорта  $\alpha$  и  $\beta$   
 $\nu_{\alpha\beta}^t(v)$  — транспортная частота упругих столкновений  
 $\nu_{\alpha\beta}^n(v), \nu_{\alpha\beta}^h(v), \nu_{\alpha\beta}^l(v)$  — частоты неупругих столкновений (соответственно полная суммарная частота, частота столкновений с большими и малыми потерями энергии)  
 $\bar{\nu}_{\alpha\beta}$  — частота столкновений, усредненная с весом  $v^2$   
 $\pi$  — тензор вязкости  
 $\rho_e$  — плотность заряда  
 $\rho$  — плотность вещества  
 $\rho_{H\alpha}$  — ларморовский радиус частиц сорта  $\alpha$   
 $\Sigma$  — статистическая сумма  
 $\sigma$  — проводимость  
 $\sigma_{\alpha\beta}(\vartheta)$  — дифференциальное сечение столкновений частиц сортов  $\alpha$  и  $\beta$   
 $\tau$  — характерное время  
 $\tau_{\alpha\beta}$  — среднее время между столкновениями частиц сортов  $\alpha$  и  $\beta$   
 $\tau_{\alpha\beta}^T$  — среднее время обмена энергией между частицами сортов  $\alpha$  и  $\beta$   
 $\Phi$  — магнитный поток  
 $\varphi(r)$  — электростатический потенциал



- $\varphi$  — меридиональный угол  
 $\chi_\alpha$  — коэффициент температуропроводности частиц сорта  $\alpha$   
 $\Psi$  — волновая функция  
 $\psi$  — угол рассеяния (меридиональный)  
 $\Omega$  — телесный угол  
 $\omega$  — частота  
 $\omega_{H\alpha}$  — циклотронная частота частиц сорта  $\alpha$   
 $\omega_p$  — плазменная частота  
 $d^3r = dx dy dz$  — элемент объема  
 $d^3v = dv_x dv_y dv_z$  — элемент объема в пространстве скоростей  
 $d^3R = d^3r d^3v$  — элемент объема в шестимерном фазовом пространстве

### Операторы

- grad — градиент  
 div — дивергенция  
 $\Delta$  — оператор Лапласа  
 rot — ротор  
 $\text{grad}_v$  — градиент в пространстве скоростей  
 $\text{div}_v$  — дивергенция в пространстве скоростей  
 $\delta/\delta t$  — оператор, обозначающий скорость изменения величины при столкновениях  
 $\langle \rangle$  — оператор усреднения

### Индексы (нижние)

- $\alpha, \beta$  — сорт частицы  
 $e$  — электрон  
 $i$  — ион  
 $e$  — область вне плазмы  
 $i$  — область внутри плазмы  
 $a$  — нейтральный атом  
 $A$  — амбиполярная характеристика  
 $E$  — величина, связанная с электрическим полем  
 $H$  — величина, связанная с магнитным полем  
 $j$  — величина, связанная с током  
 $\parallel$  — направление, параллельное магнитному полю  
 $\perp$  — направление, перпендикулярное магнитному полю  
 $t$  — направление, параллельное силе, действующей в плоскости, перпендикулярной магнитному полю  
 $g$  — значение параметра на границе плазмы

### Индексы (верхние)

- $q$  — тип столкновений  
 $e$  — упругие столкновения  
 $n$  — неупругие столкновения  
 $h$  — неупругие столкновения с большими потерями энергии  
 $l$  — неупругие столкновения с малыми потерями энергии  
 $i$  — ионизация  
 $E$  — величина, связанная с электрическим полем  
 $H$  — величина, связанная с магнитным полем

# ГЛАВА 1

## ВВЕДЕНИЕ

### § 1.1. Ионизованные газы и плазма

В любом газе при отличной от нуля абсолютной температуре некоторое количество атомов ионизовано, т. е. наряду с нейтральными имеются заряженные частицы — электроны и ионы. Однако существенное влияние на свойства газа заряженные частицы оказывают лишь при концентрациях, при которых создаваемый ими пространственный заряд ограничивает их движение. С ростом концентрации это ограничение становится все более значительным и при достаточно больших концентрациях взаимодействие положительно и отрицательно заряженных частиц приводит к поддержанию макроскопической нейтральности в объемах, сравнимых по размеру с объемом газа; при этом нарушения макроскопической нейтральности приводят к появлению сильных электрических полей, быстро восстанавливающих ее. Ионизованный газ при таких концентрациях и называется *плазмой*. Это название было предложено в 1923 г. американским физиком Ленгмюром.

Таким образом, ионизованный газ при достаточно больших концентрациях заряженных частиц превращается в плазму. Наиболее естественный путь получения плазмы состоит в разогреве газа до температур, при которых средняя энергия частиц сравнима с энергией ионизации атомов или молекул. При температурах много меньших энергии ионизации отношение концентрации ионов к концентрации нейтральных атомов мало. Оно возрастает с ростом температуры, и при приближении средней энергии частиц к энергии ионизации газ превращается в практически полностью ионизованную плазму.

Поскольку плазму можно получить при разогреве вещества, находящегося в газообразном (третьем агрегатном) состоянии, ее называют иногда *четвертым состоянием вещества*. Состояние равновесной плазмы, как и всякого газа, определяется ее составом, концентрацией компонент и температурой. Обозначим парциальные концентрации компонент плазмы  $n_\alpha$ , придавая индексу  $\alpha$  значения  $a$  (нейтральные частицы),  $i$  (ионы),  $e$  (электроны). Вообще говоря, плазма может содержать различные виды (сорты) атомов и ионов. В большинстве случаев (если это не оговорено) будем рассматривать так называемую *простую плазму*, состоящую из нейтральных частиц одного сорта, однозарядных ионов того же сорта и электронов. Тогда *степень ионизации*  $\eta$  можно определить как отношение кон-

центрации ионов к суммарной концентрации ионов и нейтральных атомов:

$$\eta = n_i / (n_i + n_a). \quad (1.1)$$

Температуру плазмы  $T$  будем выражать в энергетических единицах; она связана с обычно используемым определением температуры соотношением

$$T = kT_K, \quad (1.2)$$

где  $T_K$  — температура,  $^{\circ}\text{K}$ ;  $k$  — постоянная Больцмана. Связь средней энергии теплового движения частиц  $W$  с температурой плазмы, как и для любого равновесного газа, дается равенством

$$W = (3/2) T. \quad (1.3)$$

В равновесной плазме задание концентраций и температуры полностью характеризует ее состояние. Температура такой плазмы определяет не только среднюю энергию, но и распределение частиц по скоростям (максвелловское распределение). По концентрации и температуре плазмы можно найти степень ионизации, концентрацию ионов, возбужденных атомов, фотонов и т. п. Однако далеко не всегда плазму можно считать равновесной. В частности, газоразрядная плазма, получаемая обычно в лаборатории, далека от равновесия. В некоторых случаях встречается так называемое частичное равновесие, при котором распределение скоростей заряженных и нейтральных частиц — максвелловское, но температуры, определяющие это распределение для электронов и тяжелых частиц, различны. Для такой неизотермической плазмы можно ввести отдельно электронную и ионную температуры  $T_e, T_i$ . В общем случае неравновесной плазмы распределение скоростей заряженных частиц может существенно отличаться от максвелловского. Однако и здесь будем говорить о температуре компонент плазмы, определяя ее как меру средней энергии хаотического движения частиц в соответствии с (1.3). Разумеется, для получения полной информации о поведении неравновесной плазмы сведений о средних энергиях (температуре) компонент недостаточно — необходимо знать функцию распределения частиц по скоростям.

## § 1.2. Квазинейтральность плазмы

Характерной особенностью плазмы является ее макроскопическая нейтральность, поддерживаемая вследствие взаимной компенсации пространственного заряда положительных ионов и электронов. Однако такая компенсация имеет место лишь в среднем — в достаточно больших объемах и за достаточно большие интервалы времени. Поэтому говорят, что плазма — квазинейтральная среда. Размеры областей и промежутки времени, в пределах которых может нарушаться компенсация объемного заряда, называют *пространственным и временным масштабами разделения зарядов*.

Определим пространственный масштаб разделения зарядов. Представим, что в некотором объеме плазмы нейтральность нарушена. Для простоты будем считать, что это нарушение происходит в результате смещения плоского слоя электронов. При этом образуются слои отрицательного и положительного объемных зарядов (рис. 1.1, а). Электрическое поле между слоями эквивалентно полю плоского конденсатора. Напряженность поля  $E$  определяется поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  на «обкладках»:

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi n_e e x, \quad (1.4)$$

где  $e$  — заряд;  $n_e$  — плотность электронов;  $x$  — смещение слоя. Распределение поля и потенциала  $\varphi$  показано на рис. 1.1, б, в. Полная разность потенциалов  $\varphi_i$  равна

$$\varphi_i \approx El = 4\pi n_e e x l \quad (1.5)$$

( $l$  — толщина слоя). Очевидно, что нарушение нейтральности, вызванное смещением слоя электронов, может поддерживаться лишь в случае, если высота потенциального барьера поля объемного заряда меньше энергии хаотического движения электронов и ионов:  $e\varphi_i < T_e, T_i$ . В противном случае движение частиц под действием электрического поля быстро приводит к восстановлению нейтральности.

Подставляя в это неравенство величину  $\Delta\varphi_e$  и полагая  $x \approx l$ , получаем  $4\pi n_e e^2 l^2 \ll T$  или

$$l < \sqrt{T/4\pi n_e e^2}, \quad (1.6)$$

где  $T$  — меньшая из величин  $T_e$  или  $T_i$ . Величина, стоящая в правой части, определяет с точностью до численного коэффициента максимальный масштаб разделения зарядов в плазме. Эту величину называют *радиусом Дебая* по имени физика, который впервые ввел ее для электролитов. Обозначим дебаевский радиус

$$r_D = \sqrt{T/4\pi n_e e^2}. \quad (1.7)$$

Поскольку он имеет большое распространение в физике плазмы и будет часто встречаться в дальнейшем, запишем также его числен-

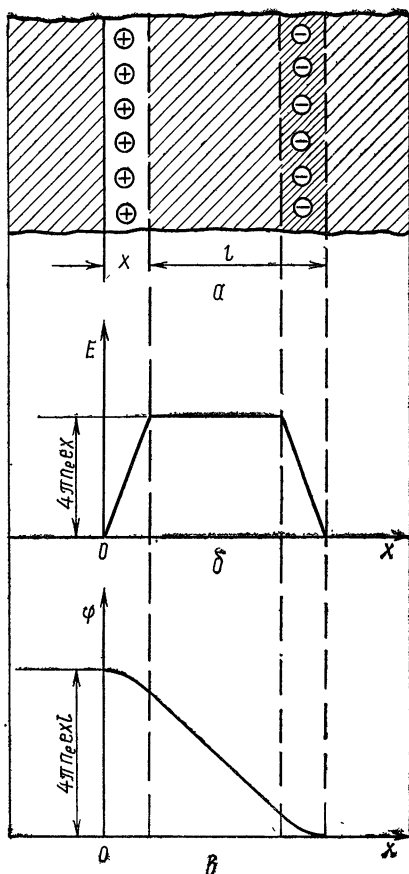


Рис. 1.1

ное значение  $r_D \approx 500\sqrt{T/n}$ , где  $r_D$  дается в см,  $n$  — в  $\text{см}^{-3}$ ,  $T$  — в эв. В условиях, когда электронная и ионная температуры существенно различны, вводят иногда электронный и ионный дебаевские радиусы:  $r_{D_e} \sim \sqrt{T_e}$  и  $r_{D_i} \sim \sqrt{T_i}$ . При этом масштаб длительного разделения зарядов характеризуется меньшей из этих величин.

Определим временной масштаб разделения зарядов. Для этого обратимся снова к рис. 1.1 и рассмотрим движение электронов после нарушения нейтральности. В области нахождения электронного слоя на электроны действует сила притяжения со стороны ионов, равная  $eE = 4\pi n_e e^2 x$  [см. (1.4)]. Уравнение движения электронов имеет вид

$$m_e d^2 x / dt^2 = - 4\pi n_e e^2 x. \quad (1.8)$$

Оно описывает гармонические колебания с частотой

$$\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e}. \quad (1.9)$$

Нетрудно понять природу этих колебаний электронного слоя. Слой притягивается к ионному, проходит мимо него по инерции, снова притягивается и т. д. Колебания не затухают, поскольку не рассматриваются тепловое движение заряженных частиц и диссипация. Колебания пространственного заряда при нарушении квазинейтральности были впервые обнаружены Ленгмюром. Их называют *плазменными*, или *ленгмюровскими*, колебаниями. Частоту (1.9) соответственно называют *плазменной*, или *ленгмюровской*, частотой. Поскольку величина  $\omega_p$  часто встречается в физике плазмы, приведем также ее численное значение:  $\omega_p = 5,6 \cdot 10^4 \sqrt{n_e}$  ( $\omega_p$  дано в  $\text{сек}^{-1}$ ,  $n_e$  — в  $\text{см}^{-3}$ ).

Плазменные колебания определяют механизм восстановления квазинейтральности. Очевидно, что в среднем, за много периодов колебаний, плазму можно считать нейтральной. Поэтому временной масштаб разделения зарядов в плазме определяется величиной

$$t_D \approx 1/\omega_p = \sqrt{m_e / 4\pi n_e e^2}. \quad (1.10)$$

Его связь с пространственным масштабом разделения зарядов (1.7) очень проста:

$$t_D = r_D / v_{T_e}, \quad (1.11)$$

где  $v_{T_e} = \sqrt{T_e / m_e}$  — тепловая скорость электронов.

Мы оценили масштабы спонтанных нарушений макроскопической нейтральности плазмы, связанных с тепловым движением заряженных частиц. Рассмотрим теперь нарушения нейтральности под действием внешних электрических полей. При введении в плазму или при помещении около ее границ заряженного тела вблизи этого тела происходит разделение зарядов — заряды противоположного знака притягиваются, а одинакового — отталкиваются от тела. Поляризация плазмы приводит к экранированию внешнего поля.

Характерный пространственный масштаб такого экранирования равен дебаевскому радиусу.

Рассмотрим, например, поле неподвижного сферического заряда в плазме. Потенциал поля  $\varphi$  вне заряда должен удовлетворять уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho. \quad (1.12)$$

Для плазмы, содержащей однозарядные ионы и электроны, плотность пространственного заряда определяется разностью их концентраций:

$$\rho = e(n_i - n_e). \quad (1.13)$$

При условиях, когда в области экранирования находится большое число заряженных частиц, мгновенные значения концентраций можно считать практически равными их средним значениям. Связь этих средних концентраций с потенциалом при максвелловском распределении скоростей частиц определяется формулой Больцмана (см. § 4.1):

$$n_i = n \exp(-e\varphi/T_i); \quad n_e = n \exp(e\varphi/T_e), \quad (1.14)$$

где  $n$  — концентрация заряженных частиц в невозмущенной области (в которой плазма является нейтральной, т. е.  $n_e = n_i = n$ ). Подставляя выражения для  $n_i$  и  $n_e$  в уравнение Пуассона, получаем самосогласованное уравнение для потенциала:

$$\Delta\varphi = 4\pi en [\exp(-e\varphi/T_i) - \exp(e\varphi/T_e)]. \quad (1.15)$$

Легко найти решение уравнения (1.15) для достаточно больших расстояний от заряда, когда  $e\varphi \ll T_i, T_e$ . На таких расстояниях можно использовать разложение экспонент в степенные ряды и ограничиться первыми двумя членами разложения:

$$\exp(-e\varphi/T_i) \approx 1 - e\varphi/T_i; \quad \exp(e\varphi/T_e) \approx 1 + e\varphi/T_e.$$

Подставляя их в уравнение (1.15), приведем его к виду

$$\Delta\varphi + (1/r_D^2)\varphi = 0, \quad (1.16)$$

$$\text{где} \quad r_D = [T_e T_i / 4\pi n e^2 (T_e + T_i)]^{1/2} \quad (1.17)$$

представляет собой общее выражение для дебаевского радиуса при произвольном соотношении между  $T_e$  и  $T_i$ . При  $T_e \gg T_i$  или  $T_i \gg T_e$  это выражение переходит в (1.7). Сферически-симметричное решение уравнения, обращающееся в 0 на бесконечности, имеет вид

$$\varphi = (C/r) \exp(-r/r_D).$$

В этом легко убедиться, подставляя его в (1.16). Для того чтобы на малых расстояниях, когда экранировка отсутствует, это решение переходило в обычный кулоновский потенциал заряда  $q$ , следует положить  $C = q$ . Тогда выражение для потенциала можно записать следующим образом:

$$\varphi = (q/r) \exp(-r/r_D). \quad (1.18)$$

Видно, что при  $r \ll r_D$  потенциал практически совпадает с кулоновским, при  $r > r_D$  потенциал значительно меньше кулоновского из-за экранирующего действия плазмы. Таким образом, характерный масштаб области экранирования определяется дебаевским радиусом. Этот результат получен для поля сферического заряда при условиях, когда в области экранирования потенциальная энергия  $e\varphi \approx qe/r_D$  меньше тепловой. Характер экранирования при условии  $e\varphi \leq T_e$  очевидно, должен оставаться таким же и для другого способа создания полей, поскольку его можно описать с помощью совокупности точечных зарядов. Во многих случаях и при потенциалах, превышающих этот предел, характерный масштаб области нарушения квазинейтральности имеет порядок дебаевского радиуса.

Проведенное рассмотрение позволяет более точно определить условия квазинейтральности. В соответствии с ним взаимодействие объемных зарядов электронов и ионов поддерживает электрическую нейтральность плазмы в объемах с размерами, существенно большими  $r_D$  и за времена, много большие обратной плазменной частоты  $t_D \approx 1/\omega_p$ . Для того чтобы эти условия выполнялись в плазме, необходимо соблюдение неравенств

$$L \gg r_D; \tau \gg t_D, \quad (1.19)$$

где  $L$  — характерный размер плазмы;  $\tau$  — характерное время изменения ее параметров. В сущности, эти неравенства определяют концентрацию заряженных частиц, при превышении которой ионизованный газ можно называть плазмой. Обычно они выполняются с большим запасом. Поэтому даже в относительно небольших объемах, размер которых много меньше характерных размеров плазмы, положительный и отрицательный заряды компенсируют друг друга. Для плазмы, в которой отрицательный заряд создается электронами, а положительный — однозарядными ионами, это означает, что их концентрации должны быть практически одинаковы:

$$n_e \approx n_i \gg |n_i - n_e|. \quad (1.20)$$

Учитывая это, будем иногда опускать индексы  $e, i$  при обозначении концентрации заряженных частиц.

### § 1.3. Особенности движения заряженных частиц в плазме

Основные свойства плазмы определяются движением в ней заряженных частиц. Здесь мы лишь кратко остановимся на некоторых его особенностях. При отсутствии внешних полей характер движения заряженных частиц в слабоионизованной плазме, где основное влияние на их движение оказывают столкновения с нейтральными частицами, аналогичен характеру движения атомов в обычном газе. При условиях, когда длина свободного пробега много меньше размеров плазмы, траектория движения состоит из более или менее

протяженных отрезков прямых, соответствующих периодам между столкновениями, и областей столкновения, в пределах которых изменяются направление движения и скорость частиц (рис. 1.2, а). При этом столкновения можно считать точечными, поскольку эффективный радиус взаимодействия заряженных частиц с нейтральными много меньше длины свободного пробега.

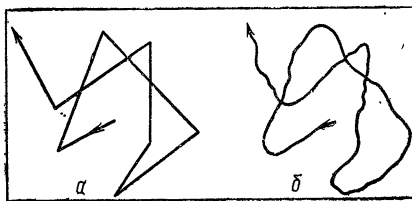


Рис. 1.2

Существенное отличие свойств плазмы от свойств газа нейтральных частиц связано прежде всего с воздействием на движение заряженных частиц электрического и магнитного полей. Электрическое поле (внешнее поле и поле пространственного заряда) вызывает ускорение заряженных частиц в период между столкновениями. В среднем за много периодов такое ускорение приводит к появлению направленного движения частиц и к увеличению скорости хаотического движения, т. е. к нагреву плазмы. При этом нагрев электронной и ионной компонент оказывается неодинаковым. Электроны приобретают обычно большую энергию, чем ионы. Магнитное поле приводит к закручиванию траекторий заряженных частиц в плоскости перпендикулярной полю. При условиях, когда радиус вращения заряженных частиц в магнитном поле (так называемый *ларморовский радиус*) много меньше длины свободного пробега, влияние поля на движение частиц весьма существенно. Их перемещение в направлении, перпендикулярном магнитному полю на расстояния большие ларморовского радиуса, может быть при этом обусловлено столкновениями или дрейфом заряженных частиц, связанным с электрическим полем, с неоднородностью магнитного поля.

Другая важная особенность движения заряженных частиц проявляется в сильноионизованной плазме, когда определяющую роль играют столкновения заряженных частиц друг с другом. Эта особенность связана с тем, что кулоновский потенциал, определяющий взаимодействие между заряженными частицами, медленно уменьшается с расстоянием. Поэтому взаимодействие существенно на расстояниях, много больших размеров атомов. Ограничение радиуса действия кулоновских сил связано лишь с экранированием поля взаимодействия в плазме; предельный радиус можно считать равным дебаевскому радиусу экранирования. Поскольку в сферу с радиусом, равным дебаевскому, входит обычно большое количество электронов и ионов, взаимодействие заряженных частиц, строго говоря, не сводится к парным столкновениям. Траектория движения частицы при учете этих столкновений уже не может быть представлена в виде ломаной линии с четко разделенными периодами столкновений и периодами между столкновениями, а носит более сложный характер (см. рис. 1.2, б). При анализе приходится учитывать взаи-



модействие каждой частицы со многими другими, находящимися в дебаевской сфере. Однако поскольку взаимодействие с частицами, находящимися на больших расстояниях (масштаба дебаевского радиуса) приводит к отклонению частиц на малые углы, возможна приближенная замена коллективного взаимодействия совокупностью парных столкновений. Она недопустима лишь при больших концентрациях заряженных частиц, когда энергия взаимодействия между ними становится сравнимой с тепловой энергией. При этом свойства плазмы существенно отличаются от свойств идеального газа, для которого применима модель парных столкновений.

Оценим концентрацию, определяющую этот переход. Потенциальная энергия взаимодействия на расстояниях порядка дебаевского радиуса дается соотношением [см. (1.7)]

$$U \approx e^2/r_D = e^3 \sqrt{4\pi n/T}. \quad (1.21)$$

Она мала по сравнению с тепловой ( $U \ll T$ ) при условии

$$n \ll T^3/4\pi e^6, \quad (1.22)$$

или  $n \ll 10^{19} T^3$  (здесь  $n$  дано в  $см^{-3}$ ,  $T$  — в эв). Неравенство (1.22) и определяет условия «слабого» взаимодействия, характерные для идеального газа. Оно обычно выполняется.

Отметим в заключение, что для движения частиц в плазме в период между столкновениями можно практически всегда использовать классическое описание. Чтобы показать это, рассмотрим ограничения, накладываемые квантовомеханическим соотношением неопределенностей. При концентрации заряженных частиц  $n$  среднее расстояние между ними равно  $\delta r \approx n^{-1/3}$ . Оно определяет максимально допустимую неопределенность в координате при описании движения частиц. Соотношение неопределенностей позволяет найти связанную с ней неопределенность импульса

$$\delta p \approx \hbar/\delta r \approx \hbar n^{1/3} \quad (1.23)$$

( $\hbar$  — постоянная Планка). Чтобы можно было применять классическое описание, эта неопределенность должна быть много меньше среднего импульса частицы:

$$\delta p \ll \bar{p} \approx \sqrt{mT}. \quad (1.24)$$

Используя (1.23), получаем условие применимости классического описания движения электронов в виде

$$n \ll (m_e T_e)^{3/2}/\hbar^3 \quad (1.25)$$

или  $n \ll 10^{23} T_e^{3/2}$  ( $n$  — в  $см^{-3}$ ,  $T_e$  — в эв). Это условие выполняется практически для всех видов газовой плазмы (см. также § 1.4, рис. 1.3). Поэтому можно сказать, что плазма — классический объект. Иногда говорят о квантовой твердотельной плазме, имея в виду поведение носителей тока в твердых телах — электронов в металлах или электронов и дырок в полупроводниках. Для такой

плазмы условие типа (1.24) не выполняется, и ее свойства должны описываться с помощью квантовой механики.

#### § 1.4. Параметры плазмы

Приведем параметры некоторых типичных видов плазмы. Начнем с плазменных объектов в космосе. Большинство звезд, включая и наше Солнце, имеет, как известно, температуры, при которых вещество находится в плазменном состоянии. Межзвездный газ ионизован, и, несмотря на относительно малую концентрацию заряженных частиц, его также можно считать плазмой, так как характерный пространственный масштаб его на много порядков превышает дебаевский радиус. Плазма распространена и в ближнем космосе. Она заполняет магнитосферу Земли и образует ионосферные слои. Возмущения магнитосферы, связанные с потоками частиц с Солнца (с так называемым солнечным ветром), также оказываются плазменными. В табл. 1.1 приведены параметры плазмы для некоторых из этих космических объектов.

В технике и в экспериментальных исследованиях широко используются различные виды газовых разрядов. Это прежде всего стационарные или импульсные электродные разряды — так называемые тлеющие разряды с холодными электродами, происходящие при относительно небольших токах, и дуговые разряды, характеризующиеся большими токами и сильным разогревом электродов. Разряды такого типа давно используются в радиотехнике, в технике коммутации токов, для обработки материалов. Сравнительно недавно они стали применяться для накачки газовых лазеров. Газоразрядные источники плазмы — плазматроны — в последнее время получили широкое распространение и во многих технологических работах, прежде всего для осуществления высокотемпературных химических реакций (в так называемой плазмохимии). При этом наряду с традиционными электродными разрядами используется плазма, создаваемая высокочастотными полями (ВЧ- и СВЧ-разряды) под действием излучения лазеров (лазерные разряды). В табл. 1.2 представлены типичные параметры некоторых видов газоразрядной плазмы.

Плазма — объект многих экспериментальных исследований. В последние годы в связи с проблемой термоядерного синтеза широко ведутся исследования удержания плазмы магнитным полем и ее нагрева. Ими охватывается большой диапазон условий, соответствующих различным схемам, — от квазистационарных до импульсных схем однократного действия. Широкие исследования плазмы ведутся также в связи с проблемами магнитогидродинамического и термоэлектронного преобразования энергии, создания плазменных реактивных двигателей, движения космических летательных аппаратов через атмосферу. Не имея возможности представить характеристики всех видов плазмы, используемых в этих исследованиях, приведем параметры плазмы лишь в типичных современных экспе-

Таблица 1.1

## Параметры плазмы некоторых космических объектов

Объект	Газ	$L, \text{ см}$	$H, \text{ э}$	$n_a, \text{ см}^{-3}$	$n_e, \text{ см}^{-3}$	$\eta$	$T_e, \text{ эв}$	$\lambda_e, \text{ см}$	$r_D, \text{ см}$	$\rho_{He}, \text{ см}$
Ионосфера (слой E)	Воздух	$10^6$	1	$10^{12} - 10^{13}$	$10^5$	$10^{-8} - 10^{-7}$	0,03	$10^2 - 10^3$	0,3	1
Ионосфера (слой F)	Воздух	$10^6 - 10^7$	1	$10^9 - 10^{12}$	$10^5 - 10^6$	$10^{-7} - 10^{-4}$	0,03—0,1	$10^3 - 10^5$	0,2	1
Фотосфера Солнца	H	$5 \cdot 10^{10}$	$1(10^3)$	—	$10^{14}$	1	1	$5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$3(3 \cdot 10^{-3})$
Солнечная корона	H	$10^{11} - 10^{12}$	$1(10^2)$	—	$10^4 - 10^8$	1	100	$10^8$	1—100	$30(0,3)$
Межзвездная среда	H	$10^{18}$	—	—	$10^{-3} - 10$	0,1—1	0,01—1	$10^8 - 10^{12}$	$10^2 - 10^4$	—

Примечания.

1. Таблица имеет иллюстративный характер. Большинство параметров дано с точностью до порядка.
2. В таблице  $L$  — характерный размер плазмы;  $H$  — напряженность магнитного поля;  $\lambda_e$  — длина свободного пробега электронов;  $\rho_{He}$  — ларморский радиус электронов.
3. Цифры в скобках относятся к полям солнечных пятен.

Таблица 1.2

## Параметры газоразрядной плазмы

Тип разряда	$p$ , мм рт. ст.	$a$ , см	$I$ , а	$P$ , вт/см <sup>2</sup>	$n_e$ , см <sup>-3</sup>	$\eta$	$T_e$ , эв	$T_a$ , эв	$\lambda_e$ , см	$r_D$ , см
Разряд низкого давления	$10^{-2}$	1	1	10	$10^{11}$	$3 \cdot 10^{-4}$	3—7	$3 \cdot 10^{-2}$	1	$3 \cdot 10^{-3}$
Тлеющий разряд	1	1	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{10}$	$3 \cdot 10^{-7}$	1—3	$3 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$
Дуговой разряд	1	1	10	$10-10^2$	$10^{13}$	$3 \cdot 10^{-4}$	0,5—2	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-4}$
Сверхвысокочастотный разряд	10	1	—	10	$10^{12}$	$3 \cdot 10^{-6}$	1—3	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
Разряд высокого давления	$10^3$	1	1	$10^2$	$10^{15}$	$3 \cdot 10^{-5}$	0,5—1	0,5	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Разряд сверхвысокого давления	$10^5$	$10^{-1}$	1	$10^3-10^4$	$10^{17}$	$3 \cdot 10^{-5}$	0,5—1	0,5—1	$10^{-6}$	$10^{-7}$
Стационарная лазерная плазма	$10^3$	$10^{-1}$	—	$10^4$	$10^{17}$	$3 \cdot 10^{-3}$	1—3	1—3	$10^{-4}$	$10^{-7}$

Примечания. 1. В таблице приводятся ориентировочные характеристики разрядов в некотором типичном режиме. Они могут заметно изменяться в зависимости от режима и газового наполнения. Значения параметров приводятся с точностью до порядка.

2. В таблице  $p$  — давление газа;  $a$  — радиус плазмы;  $I$  — ток разряда;  $P$  — мощность;  $R$  — мощность в единицу объема плазмы;  $T_e$  — электронная температура;  $T_a$  — температура газа;  $\lambda_e$  — длина свободного пробега электронов.

риментах по термоядерному синтезу и параметры, ожидаемые в термоядерных реакторах будущего (табл. 1.3). На рис. 1.3 приведены типичные значения температуры и концентрации для следующих плазменных объектов: твердотельной плазмы 1, ионосферы 2, солнечной короны 3, газоразрядной плазмы 4, лазерного термоядер-

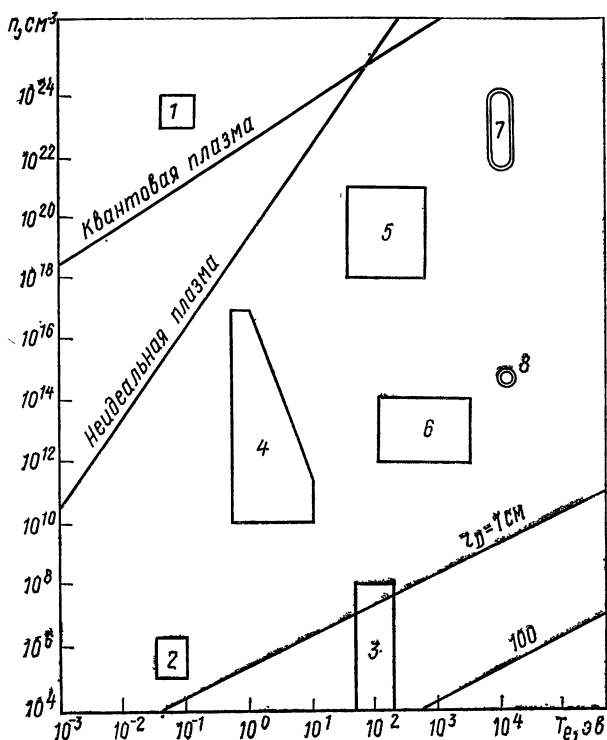


Рис. 1.3

ного эксперимента 5, квазистационарного термоядерного эксперимента 6, лазерного термоядерного реактора (проект 7), квазистационарного термоядерного реактора (проект 8).

Приведенные данные охватывают весьма широкий диапазон параметров плазмы, используемой в лабораторных исследованиях и в технике. Можно, однако, выделить из него наиболее распространенные области основных параметров. Для низкотемпературной плазмы это область концентраций от  $10^{10}$  до  $10^{18} \text{ см}^{-3}$  и область электронных температур 1—10 эв. Для высокотемпературной плазмы в экспериментах по термоядерному синтезу это область концентраций  $10^{12}$  —  $10^{18} \text{ см}^{-3}$  и область температур 100 эв — 10 кэв,

Таблица 1.3

Параметры плазмы в экспериментах по управляемому термоядерному синтезу

Тип эксперимента	$a$ , см	$H$ , кэ	$n_e$ , см <sup>-3</sup>	$T_e$ , эв	$T_i$ , эв	$\tau_E$ , сек	$\lambda$ , см	$\tau_D$ , см	$\rho_H$ , см	$\rho_{Hi}$ , см
Токамак	20	40	$5 \cdot 10^{13}$	$3 \cdot 10^3$	$10^3$	$10^{-2}$	$10^6$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$0,1$
Тэта-пинч	1	100	$10^{17}$	$10^3$	$5 \cdot 10^3$	$10^{-5}$	100	$5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-3}$	$0,03$
Лазерный эксперимент	1	—	$10^{22}$	300	300	—	$10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-8}$	—	—
Квазистационарный термоядерный реактор (проект)	300	50	$10^{14}$	$10^4$	$10^4$	5	$10^6$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$0,5$
Лазерный термоядерный реактор (проект)	$0,01-1$	—	$10^{22}$ $10^{24}$	$10^4$	$10^4$	$10^{-8}$ $10^{-7}$	$10^{-4}$ $10^{-10}$	$10^{-6}$ $10^{-7}$	—	—

Примечания:

- Представленные в таблице данные получены для плазмы, создаваемой в водороде или дейтерии. Степень ионизации плазмы близка к единице.
- В первых трех строках приведены ориентировочные параметры плазмы на типичных современных экспериментальных установках, в последних двух строках — типичные параметры плазмы в обсуждаемых в литературе проектах термоядерных реакторов будущего.
- В таблице  $a$  — радиус плазмы;  $H$  — напряженность магнитного поля;  $\tau_E$  — время удержания энергии в плазме;  $T_e, T_i$  — электронная и ионная температуры;  $\rho_{He}, \rho_{Hi}$  — электронный и ионный гармовские радиусы;  $\lambda_e$  — длина свободного пробега электронов.

## ГЛАВА 2 СТОЛКНОВЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

### § 2.1. Применение законов сохранения к столкновениям частиц

Как отмечалось в гл. 1, плазма представляет собой многокомпонентный газ слабовзаимодействующих частиц. Поэтому для анализа ее поведения обычно используют принятый в кинетической теории газов подход, основанный на разбиении траекторий движения частиц на области столкновений и участки между столкновениями. При таком подходе в области взаимодействия частиц не учитывается влияние внешних полей, а на участках между столкновениями — силы взаимодействия частиц. Поскольку радиус взаимодействия много меньше длин свободного пробега, при рассмотрении кинетики движения заряженных частиц нет необходимости интересоваться их траекториями в процессе столкновений, достаточно знать лишь последствия столкновений — изменения скоростей и состояний сталкивающихся частиц. Описанный подход строго применим только к столкновениям заряженных частиц с нейтральными и нейтральных частиц друг с другом. Взаимодействие заряженных частиц друг с другом, как уже отмечалось, является более дальнедействующим и носит коллективный характер. Однако в некотором приближении его также можно рассматривать как совокупность независимых парных столкновений (см. § 2.4).

В этой главе будут рассмотрены различные виды столкновений, существенные для описания поведения плазмы. Некоторые общие характеристики столкновений можно получить с помощью законов сохранения энергии и импульса, без рассмотрения конкретного вида сил взаимодействия. Проще всего такой анализ провести для парных столкновений, в которых не изменяется природа частиц.

Рассмотрим столкновение частиц сорта  $\alpha$  и  $\beta$ . Будем считать, что в процессе столкновения воздействие внешних сил на частицы отсутствует. В этом случае, как известно, импульс и энергия системы взаимодействующих частиц остаются неизменными. Импульс системы представляет сумму импульсов сталкивающихся частиц:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta, \quad (2.1)$$

где  $m_\alpha$ ,  $m_\beta$  — массы, а  $\mathbf{v}_\alpha$ ,  $\mathbf{v}_\beta$  — векторы скорости частиц. Закон сохранения импульса приводит к равенству импульсов системы до и после столкновения:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}',$$

или

$$m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + m_{\beta} \mathbf{v}_{\beta} = m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} + m_{\beta} \mathbf{v}'_{\beta} \quad (2.2)$$

(здесь и далее величины, характеризующие движение частиц после столкновения, отмечены штрихами). Закон сохранения энергии позволяет определить изменение в процессе столкновения суммарной кинетической энергии системы:

$$K = K_{\alpha} + K_{\beta} = m_{\alpha} v_{\alpha}^2/2 + m_{\beta} v_{\beta}^2/2, \quad (2.3)$$

которое определяется равенством  $K = K' + \Delta \mathcal{E}$ , или

$$m_{\alpha} v_{\alpha}^2/2 + m_{\beta} v_{\beta}^2/2 = m_{\alpha} v_{\alpha}'^2/2 + m_{\beta} v_{\beta}'^2/2 + \Delta \mathcal{E}, \quad (2.4)$$

где  $\Delta \mathcal{E}$  — суммарное изменение внутренней энергии частиц в результате столкновения.

Принято различать *упругие* столкновения, происходящие без изменения внутреннего состояния частиц, и *неупругие* столкновения. В упругих столкновениях, очевидно,  $\Delta \mathcal{E} = 0$ . Среди неупругих выделяют соударения *первого рода*, в которых  $\Delta \mathcal{E} > 0$ , и *второго рода* с  $\Delta \mathcal{E} < 0$ . Примером первых могут служить столкновения, приводящие к переходу атомов из основного в возбужденное состояние; примером вторых — столкновения с обратными переходами. Таким образом, для столкновения с заданным изменением состояния частиц законы сохранения энергии и импульса дают четыре уравнения, ограничивающие изменение скоростей частиц [равенство (2.4) и векторное равенство (2.2), эквивалентное трем уравнениям для компонент скорости]. Поэтому только две из шести компонент векторов скорости частиц после соударения  $\mathbf{v}'_{\alpha}$  и  $\mathbf{v}'_{\beta}$  независимы; они обусловлены силами взаимодействия между частицами и их взаимным расположением.

Для более детального рассмотрения ограничений, накладываемых законами сохранения, удобно перейти к системе отсчета центра инерции. Как известно, координаты центра инерции системы из двух частиц связаны с координатами этих частиц соотношением

$$\mathbf{r}_0 = (m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + m_{\beta} \mathbf{r}_{\beta}) / (m_{\alpha} + m_{\beta}), \quad (2.5)$$

в котором  $\mathbf{r}_{\alpha}$  и  $\mathbf{r}_{\beta}$  — радиусы-векторы, характеризующие положение частиц  $\alpha$  и  $\beta$ . Соответственно скорость движения центра инерции равна

$$\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt = (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + m_{\beta} \mathbf{v}_{\beta}) / (m_{\alpha} + m_{\beta}). \quad (2.6)$$

В силу закона сохранения импульса она остается постоянной в процессе столкновения. Поэтому можно перейти к системе отсчета, в которой центр инерции покоится, т. е.  $\mathbf{v}_0 = 0$ . В такой системе скорости частиц связаны друг с другом соотношением  $m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha_0} + m_{\beta} \mathbf{v}_{\beta_0} = 0$  или

$$\mathbf{v}_{\beta_0} = -(m_{\alpha}/m_{\beta}) \mathbf{v}_{\alpha_0}. \quad (2.7)$$



Это позволяет выразить их через одну векторную величину — относительную скорость частиц

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_{\alpha 0} - \mathbf{v}_{\beta 0}. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.7) в (2.8), получаем

$$\mathbf{v}_{\alpha 0} = m_\beta \mathbf{v} / (m_\alpha + m_\beta); \quad \mathbf{v}_{\beta 0} = -m_\alpha \mathbf{v} / (m_\alpha + m_\beta). \quad (2.9)$$

Таким образом, движение сталкивающихся частиц полностью определяется скоростью центра инерции  $\mathbf{v}_0$  (2.6) и скоростью относительного движения  $\mathbf{v}$  (2.8). Нетрудно выразить через эти величины скорости частиц в лабораторной системе. Используя (2.9), находим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\alpha 0} = \mathbf{v}_0 + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}; \\ \mathbf{v}_\beta &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\beta 0} = \mathbf{v}_0 - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

С помощью (2.10) определим суммарную кинетическую энергию:

$$K = m_\alpha v_\alpha^2 / 2 + m_\beta v_\beta^2 / 2 = [(m_\alpha + m_\beta) / 2] v_0^2 + \mu_{\alpha\beta} v^2 / 2. \quad (2.11)$$

Первое слагаемое в правой части называют обычно *энергией центра инерции*, второе — *энергией относительного движения*; величина

$$\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta) \quad (2.12)$$

называется *приведенной массой*. Используя (2.11), можно записать закон сохранения энергии при столкновении (2.4) в виде

$$(m_\alpha + m_\beta) v_0'^2 / 2 + \mu_{\alpha\beta} v'^2 / 2 = (m_\alpha + m_\beta) v_0^2 / 2 + \mu_{\alpha\beta} v^2 / 2.$$

Поскольку в процессе столкновения скорость и кинетическая энергия центра инерции остаются неизменными ( $v_0' = v_0$ ), получим

$$\mu v'^2 / 2 = \mu v^2 / 2 + \Delta \mathcal{E}. \quad (2.13)$$

Равенство (2.13) показывает, что во внутреннюю энергию может переходить только часть суммарной кинетической энергии  $K$ , соответствующая энергии относительного движения.

Полученные соотношения позволяют определить ограничения, накладываемые на столкновения законами сохранения. Как видно из (2.9), скорости частиц в системе центра инерции  $\mathbf{v}_{\alpha 0}$ ,  $\mathbf{v}_{\beta 0}$  пропорциональны относительной скорости  $\mathbf{v}$ . В соответствии с (2.13) они однозначно определяются законом сохранения энергии. Поэтому независимыми параметрами в этой системе, не ограничиваемыми законами сохранения, оказываются лишь углы, определяющие поворот вектора относительной скорости  $\mathbf{v}$  и соответственно векторов  $\mathbf{v}_{\alpha 0}$ ,  $\mathbf{v}_{\beta 0}$ .

Обсудим более подробно случай упругих столкновений. Как следует из (2.13), при упругих столкновениях, когда  $\Delta \mathcal{E} = 0$ , зна-

чение вектора относительной скорости не изменяется, он лишь меняет направление. Определим поворот вектора двумя углами  $\theta$  и  $\psi$ , соответствующими сферической системе координат (рис. 2.1). Угол  $\theta$ , который является углом между векторами скорости до и после соударения  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$ , называется *углом рассеяния*. Он определяется, очевидно, расстоянием между сталкивающимися частицами и силами взаимодействия между ними. Угол  $\psi$  (меридиональный угол) определяет положение плоскости взаимодействия (плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$ ) относительно некоторой фиксированной плоскости, проходящей через  $\mathbf{v}$ . При центрально-симметричных силах взаимодействия этот угол зависит только от взаимного расположения сталкивающихся частиц.

Выразим через углы  $\theta$  и  $\psi$  изменение импульса и кинетической энергии частиц при соударении. Изменение импульса частицы  $\alpha$

$$\begin{aligned} \Delta p_{\alpha} &= m_{\alpha} v'_{\alpha} - m_{\alpha} v_{\alpha} = \\ &= m_{\alpha} v'_{\alpha} \cos \theta - m_{\alpha} v_{\alpha} \end{aligned} \quad (2.14)$$

можно с помощью (2.9) связать с изменением вектора относительной скорости:

$$\begin{aligned} \Delta p_{\alpha} &= \frac{m_{\alpha} m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = \\ &= \frac{m_{\alpha} m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \Delta \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

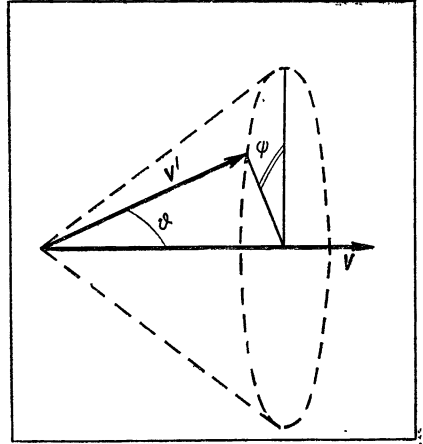


Рис. 2.1

Величина  $\Delta \mathbf{v}$  может быть выражена через углы  $\theta$  и  $\psi$ . Для этого представим ее в виде суммы трех проекций (см. рис. 2.1): проекции на направление  $\mathbf{v}$ , т. е.  $\Delta v_{(1)} = v \cos \theta - v = -v (1 - \cos \theta)$  и двух проекций на перпендикулярные направления  $\Delta v_{(2)} = v \sin \theta \cos \psi$  и  $\Delta v_{(3)} = v \sin \theta \sin \psi$ . Поскольку угол  $\psi$  определяется лишь взаимным расположением частиц, то при статистическом рассмотрении столкновений по углу  $\psi$  проводят усреднение. При этом компоненты  $\Delta v_2$  и  $\Delta v_3$  обращаются в нуль, так как  $\sin \psi = \cos \psi = 0$ . Поэтому усредненное по  $\psi$  изменение вектора  $\mathbf{v}$  равно  $\Delta \mathbf{v} = -(1 - \cos \theta) \mathbf{v} = -(1 - \cos \theta) (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta})$ . Подставляя его в (2.15), получаем

$$\begin{aligned} \Delta p_{\alpha} &= - \frac{m_{\alpha} m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} (1 - \cos \theta) (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}) = \\ &= -\mu_{\alpha\beta} (1 - \cos \theta) (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из формулы видно, что изменение импульса пропорционально относительной скорости сталкивающихся частиц. Его зависимость

от угла рассеяния определяется множителем  $(1 - \cos \vartheta)$ , который максимален при лобовом ударе ( $\vartheta = \pi$ ,  $\cos \vartheta = -1$ ) и мал при далеких столкновениях ( $\vartheta \rightarrow 0$ ,  $\cos \vartheta \rightarrow 1$ ).

Для случая столкновения с медленной частицей ( $v_\beta \ll v_\alpha$ ) формула (2.16) дает относительную потерю импульса при столкновении:

$$\frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha} = -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} (1 - \cos \vartheta). \quad (2.17)$$

Ее максимальная величина определяется отношением масс. При столкновении легкой частицы с тяжелой ( $m_\alpha \ll m_\beta$ ) импульс может измениться на противоположный:  $|\Delta p_\alpha/p_\alpha|_{\text{макс}} = 2$ ; при сравнимых массах ( $m_\alpha \approx m_\beta$ ) возможна полная потеря импульса; наконец, для столкновения тяжелой частицы с неподвижной легкой ( $m_\alpha \ll m_\beta$ ) максимальная потеря импульса порядка малого отношения масс  $m_\beta/m_\alpha$ .

Изменение кинетической энергии частицы в лабораторной системе в результате соударения можно связать с изменением импульса:

$$\begin{aligned} \Delta K_\alpha &= m_\alpha v_\alpha'^2/2 - m_\alpha v_\alpha^2/2 = (m_\alpha/2) [(v_0 + v_{\alpha 0}')^2 - (v_0 + v_{\alpha 0})^2] = \\ &= m_\alpha v_0 (v_{\alpha 0}' - v_{\alpha 0}) = v_0 \Delta p_\alpha. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Используя (2.16) и учитывая (2.6), (2.8), получаем

$$\begin{aligned} \Delta K_\alpha &= -\left( \frac{m_\alpha v_\alpha + m_\beta v_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right) \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} (v_\alpha - v_\beta) (1 - \cos \vartheta) = \\ &= -\frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} (1 - \cos \vartheta) [m_\alpha v_\alpha^2 - m_\beta v_\beta^2 - (m_\beta - m_\alpha) v_\beta v_\alpha]. \end{aligned}$$

Если распределение по скоростям частиц сорта  $\beta$  изотропно, то после соответствующего усреднения третий член в скобках обратится в нуль. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta K_\alpha &= -2 \frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} (1 - \cos \vartheta) \left( \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - \frac{m_\beta v_\beta^2}{2} \right) = \\ &= -\kappa_{\alpha\beta} (1 - \cos \vartheta) (K_\alpha - K_\beta), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где коэффициент

$$\kappa_{\alpha\beta} = 2m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)^2 \quad (2.20)$$

характеризует эффективность обмена энергией при столкновении (его называют *коэффициентом передачи энергии*). Видно, что обмен энергией между сталкивающимися частицами пропорционален разности их начальных энергий. Зависимость эффективности обмена энергией от угла рассеяния, как и для передачи импульса, определяется множителем  $(1 - \cos \vartheta)$ . Зависимость от соотношения масс определяется коэффициентом  $\kappa$ , который максимален при  $m_\alpha = m_\beta$  ( $\kappa_{\text{макс}} = 0,5$ ) и порядка малого отношения масс при  $m_\alpha \ll \ll m_\beta$  или  $m_\alpha \ll \ll m_\beta$ .

Полученные выражения легко упростить для важного случая столкновения электронов с тяжелыми частицами (атомами или ионами), когда резко различаются массы сталкивающихся частиц:  $m_\alpha = m_e \ll m_\beta = m_a$ . Кроме того, при не очень больших энергиях атомов (во всяком случае, при  $K_\alpha \lesssim K_e$ ) их скорость  $v_\alpha = \sqrt{2K_\alpha/m_\alpha}$  много меньше скорости электронов:  $v_\alpha = v_e \gg v_\beta = v_a$ . Положение центра инерции в рассматриваемом случае, очевидно, совпадает с положением тяжелой частицы, относительная скорость практически равна скорости электрона  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_a \approx \mathbf{v}_e$ , а приведенная масса — массе электрона

$$m_{ea} = m_e m_a / (m_e + m_a) \approx m_e.$$

Поэтому задача о столкновении в системе центра инерции сводится к задаче о движении электрона в поле неподвижного атома. Выражения (2.16), (2.19) для передачи импульса и энергии в упругих столкновениях при учете написанных неравенств принимают вид

$$\Delta p_e = -p_e (1 - \cos \vartheta); \quad \Delta K_e = -2 (m_e/m_a) (1 - \cos \vartheta). \quad (2.21)$$

Здесь  $\vartheta$  — угол рассеяния электрона при столкновении с неподвижным атомом.

При неупругих столкновениях равенство (2.13), следующее из закона сохранения энергии, принимает вид

$$m_e v_e'^2 / 2 = m_e v_e^2 / 2 - \Delta \mathcal{E}. \quad (2.22)$$

Оно означает, что изменение внутренней энергии тяжелой частицы равно изменению кинетической энергии электрона; кинетическая энергия тяжелой частицы не изменяется при столкновении. Этот вывод верен с точностью до отношения масс электрона и атома для любых столкновений электронов. Его можно получить непосредственно из закона сохранения импульса. Для неупругого столкновения электрона с неподвижным атомом этот закон приводит к равенству

$$m_e \mathbf{v}_e = m_e \mathbf{v}_e' + m_a \mathbf{v}_a'. \quad (2.23)$$

Переносим слагаемые, относящиеся к электронам, влево и возводя уравнение в квадрат, находим  $m_a^2 v_a'^2 = m_e^2 (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_e')^2$ . Учитывая, что  $v_e' < v_e$ , получаем неравенство для кинетической энергии атома после столкновения:

$$\frac{m_a v_a'^2}{2} < \frac{m_e}{m_a} \frac{m_e v_e^2}{2}; \quad K_a' < \frac{m_e}{m_a} K_e.$$

Оно показывает, что максимальная доля кинетической энергии электрона, которая может передаваться атому, равна  $m_e/m_a$ .

Такое же соотношение легко получить и для более сложных столкновений. Так, для процесса ионизации при столкновении электрона с атомами нужно учитывать в законах сохранения импульс и

энергию вновь образуемого электрона. Закон сохранения импульса принимает при этом вид

$$m_e v_e = m_a v'_a + m_e v'_e + m_e v''_e;$$

последний член в равенстве обозначает импульс вновь образовавшегося электрона. Переносим слагаемые, относящиеся к электронам, влево и возводя равенство в квадрат, получаем, как и раньше:

$$\frac{m_a v'_a{}^2}{2} = \frac{m_e^2}{2m_a} (v_e - v'_e - v''_e)^2 < \frac{m_e}{m_a} \frac{m_e v_e^2}{2}, \quad (2.24)$$

т. е.  $K'_a < (m_e/m_a) K_e$ . Таким образом, и при столкновениях, сопровождающихся ионизацией, доля кинетической энергии, передаваемая тяжелой частице, не более отношения масс  $m_e/m_a$ . С точностью до этого малого отношения закон сохранения энергии для процесса ионизации может быть записан в виде

$$K = K' + K'' \mathcal{E}_i, \quad (2.25)$$

где  $K''$  — энергия вновь образовавшегося электрона;  $\mathcal{E}_i$  — энергия, затрачиваемая на отрыв электрона от атома (энергия ионизации).

## § 2.2. Методы описания столкновений

Плазма представляет собой ансамбль большого числа хаотически движущихся и сталкивающихся частиц. В таком ансамбле влияние столкновений на макроскопические параметры плазмы усреднено по большому числу соударений, т. е. статистически проявляется обычно как средний результат большого числа столкновений. Более того, если невозможно пренебречь квантовомеханическими эффектами, то результат каждого соударения связан с исходным состоянием вероятностными соотношениями. Поэтому необходимо ввести статистические характеристики соударений.

Как отмечалось в предыдущем параграфе, при рассмотрении столкновений произвольно движущихся частиц удобно перейти к системе центра инерции. При этом скорости частиц будут однозначно связаны со скоростью относительного движения  $v$ . Поскольку скорость центра инерции не изменяется при взаимодействии, результат столкновения сводится к изменению вектора относительной скорости  $v$ , а в случае упругих столкновений — к его повороту. Классическое уравнение, описывающее изменение вектора  $v$ , легко получить из уравнений движения сталкивающихся частиц:

$$dv_{\alpha}/dt = F_{\alpha\beta}/m_{\alpha}; \quad dv_{\beta}/dt = F_{\beta\alpha}/m_{\beta}, \quad (2.26)$$

где  $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$  — сила взаимодействия между частицами. Разность этих уравнений  $dv_{\alpha}/dt - dv_{\beta}/dt = (1/m_{\alpha} + 1/m_{\beta}) F_{\alpha\beta}$  определяет уравнение для относительной скорости

$$\mu_{\alpha\beta} dv/dt = F_{\alpha\beta}, \quad (2.27)$$

в котором  $\mu_{\alpha\beta}$  — приведенная масса (2.12).

Обычно силы взаимодействия между частицами можно считать центральными. Потенциал  $U_{\alpha\beta}(r)$ , определяющий такое взаимодействие, зависит только от расстояния между сталкивающимися частицами  $r = |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|$ ; соответственно сила  $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\text{grad } U(r)$  направлена параллельно вектору  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ . В этом случае (2.27) можно представить в виде

$$\mu d^2 \mathbf{r} / dt^2 = -\text{grad } U(r), \quad (2.28)$$

т. е. оно эквивалентно уравнению движения частицы с массой  $\mu$  в центрально-симметричном поле неподвижного силового центра  $U(r)$ . В дальнейшем будем иметь в виду именно эту эквивалентную

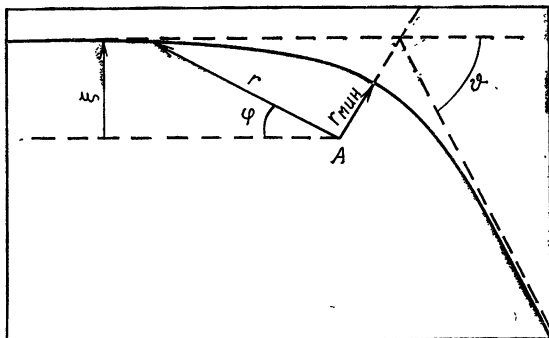


Рис. 2.2

задачу. Ее классическое решение состоит в интегрировании уравнения движения (2.28) для заданного закона взаимодействия и заданных начальных условий. Начальные условия включают скорость частицы  $\mathbf{v}$  до соударения и ее расположение.

Расположение частиц в классической задаче о столкновении характеризуют обычно прицельным расстоянием  $\xi$  (расстоянием между силовым центром и невозмущенной траекторией частицы) и положением в пространстве плоскости взаимодействия, проходящей через силовой центр и невозмущенную траекторию. В поле центральных сил положение плоскости взаимодействия, очевидно, не может измениться в процессе столкновения. Поэтому угол  $\varphi$ , характеризующий положение плоскости, в которой лежит скорость частицы после столкновения, определяется только начальным расположением частиц. Форма траектории частицы и угол рассеяния  $\theta$  при заданном законе взаимодействия однозначно определяются прицельным расстоянием  $\xi$ . Смысл этого параметра поясняет рис. 2.2, на котором изображена траектория движения частицы в поле силового центра  $A$ . Значение  $\xi$  может изменяться от нуля (лобовой удар) до больших значений, при которых силы взаимодействия малы (далекие столкновения). Соответственно угол рассеяния изменяется от  $\pi$  (отражение) до нуля.

Установление зависимости между углом рассеяния и прицельным параметром собственно и представляет задачу классической теории столкновений. Выражение, определяющее эту зависимость, можно получить с помощью законов сохранения, следующих из уравнения движения (2.28). Первый из них — закон сохранения энергии:

$$K = \mu v_{\infty}^2 / 2 = \mu v^2(r) / 2 + U(r) = \mu v_r^2 / 2 + \mu v_{\phi}^2 / 2 + U(r),$$

второй — закон сохранения момента количества движения:

$$M = \mu \xi v_{\infty} = \mu [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]_z = \mu r v_{\phi}.$$

Здесь  $v_{\infty}$  — скорость до столкновения;  $v_r$  и  $v_{\phi}$  — компоненты скорости в полярной системе координат в плоскости взаимодействия. Определяя эти компоненты из написанных равенств, получаем уравнение для траектории

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{v_{\phi}}{v_r} = \frac{\mu}{r^2 \sqrt{2\mu(K-U) - \mu^2/r^2}} = \frac{\xi}{r^2 \sqrt{1 - \xi^2/r^2 - U/K}}.$$

Интегрируя, находим для  $\Delta\phi = \pi - \phi$  (см. рис. 2.2)

$$\pi - \phi = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\xi dr}{r \sqrt{r^2 - \xi^2 - U(r) r^2 / K}}, \quad (2.29)$$

где  $r_{\min}$  — расстояние максимального сближения, при котором обращается в нуль знаменатель подынтегрального выражения. Формула (2.29) при заданном потенциале взаимодействия  $U(r)$  устанавливает связь между углом рассеяния  $\phi$  и прицельным расстоянием  $\xi$ . Для малых углов рассеяния, когда  $U \ll K$ , она может быть преобразована к виду

$$\phi = - \frac{\xi}{K} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}. \quad (2.30)$$

Переходя к статистическому описанию, выделим такие столкновения, для которых относительные скорости лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ . Частицы выделенной группы отличаются друг от друга прицельным параметром  $\xi$ . Поскольку взаимное расположение сталкивающихся частиц случайно, нужно рассмотреть рассеяние группы частиц, налетающих на неподвижный силовой центр широким потоком. Для столкновений электронов с тяжелыми частицами эта задача полностью соответствует реальной ситуации, так как тяжелая частица является практически неподвижным силовым центром. В общем случае ее решение позволяет определить результаты реальных столкновений различных частиц после перехода к лабораторной системе координат.

Итак, пусть поток частиц со скоростью  $v$  и плотностью  $n$  налетает на рассеивающий центр  $A$  (рис. 2.3). Определим среднее число частиц  $dN'$ , рассеивающихся в единицу времени в элемент телесного угла  $d\Omega$  вблизи направления, задаваемого углами  $\vartheta$  и  $\psi$ , т. е. в  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi$ . Очевидно, вероятность рассеяния пропорциональна  $d\Omega$ . В то же время число рассеянных частиц пропорционально плотности налетающего потока (числу частиц, проходящих

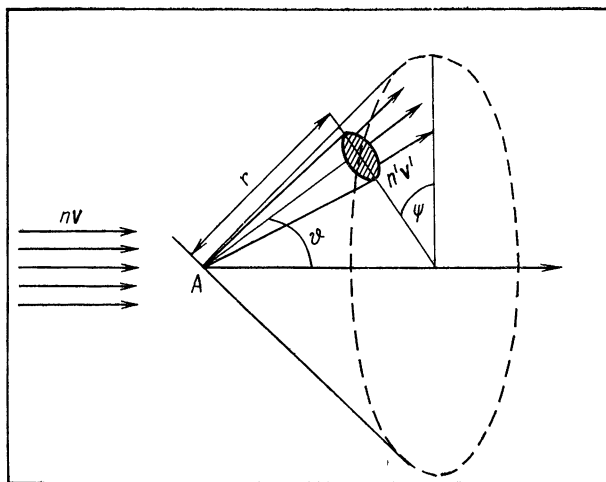


Рис. 2.3

в единицу времени через единицу площади). Поэтому число частиц, рассеянных в единицу времени в телесный угол  $d\Omega$ , равно

$$dN' = \sigma n v d\Omega. \quad (2.31)$$

Коэффициент пропорциональности  $\sigma$ , имеющий размерность площади, характеризует вероятность рассеяния частиц в определенном направлении. Он называется *дифференциальным сечением рассеяния*. Это название соответствует физическому смыслу  $\sigma$ . Действительно, в соответствии с (2.31) величина  $\sigma d\Omega$  определяет площадь элемента поверхности, перпендикулярной к направлению падающего потока, попадая в который частицы рассеиваются в телесный угол  $d\Omega$ :  $ds = \sigma d\Omega = \sigma \sin \vartheta d\vartheta d\psi$ . Нетрудно связать эту площадь с соответствующим изменением прицельного параметра. Запишем соотношение между ними (рис. 2.4):  $ds = \xi d\xi d\psi$ . Здесь изменение прицельного параметра  $d\xi$  соответствует изменению угла рассеяния  $d\vartheta^*$ . Сравнивая это соотношение с предыдущим, получаем формулу классической механики для дифференциального сечения

$$\sigma = (\xi / \sin \vartheta) \left| \frac{d\xi}{d\vartheta} \right|. \quad (2.32)$$

\* Приращение  $d\vartheta$  имеет знак противоположный  $d\xi$ , поскольку с ростом  $\xi$  угол  $\vartheta$  уменьшается.



Она определяет величину  $\sigma$  как функцию угла рассеяния  $\theta$ , если известна связь между  $\theta$  и  $\xi$  (2.29).

Мы привели классическое определение сечения рассеяния. Однако классическое рассмотрение возможно лишь в ограниченном диапазоне условий. Оно полностью неприменимо для анализа неупругих процессов, сопровождающихся изменением внутреннего состояния частиц. Что касается упругих столкновений, то их классический анализ возможен, если имеет смысл понятие траектории, т. е. если в каждый момент времени определены достаточно точно координаты и импульс частицы. Прежде всего для этого необходи-

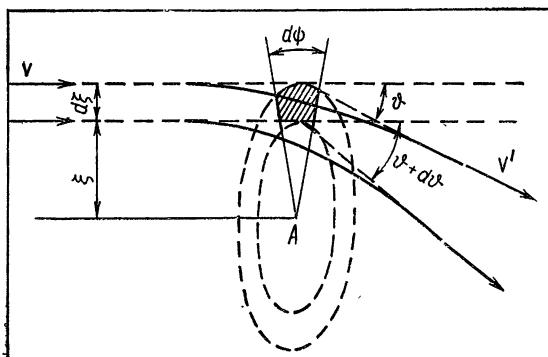


Рис. 2.4

мо, чтобы дебройлевская длина волны до взаимодействия была много меньше характерного масштаба области взаимодействия:  $\lambda = \hbar/\mu v \ll r_0, v \gg \hbar/\mu r_0$ . Если одна из частиц представляет собой нейтральный атом, то радиус действия сил определяется его размерами, т. е. имеет порядок борковского радиуса  $r_a \ll \hbar^2/m_e e^2 \approx 10^{-8}$  см. При этом условии сводится к неравенству

$$v \gg (e^2/\hbar) m_e/\mu, \quad K \gg m_e^2 e^4/\mu \hbar^2. \quad (2.33)$$

Отсюда для электрон-атомных столкновений получаем, что  $K_e \gg \gg m_e e^4/\hbar^2 \approx 10$  эв, для ион-атомных столкновений

$$K_i \gg \frac{m_e^2}{m_i} \frac{e^4}{\hbar^2} \approx 10^{-2} \frac{m_H}{m_i} \text{ эв}$$

( $m_H$  — масса атома водорода).

В то же время возможность использования классической механики для определения изменения импульса частиц при столкновении ограничивается условием, чтобы изменение импульса  $\Delta p$  было много больше квантовомеханической неопределенности импульса:  $\Delta p \gg \delta p \approx \hbar/\delta r$ . Так как  $\delta r$  должно быть много меньше  $r_m$  (минимального расстояния между частицами), то должно выполняться

неравенство  $\Delta p \gg \hbar/r_m$ . Изменение импульса  $\Delta p$  в процессе взаимодействия равно импульсу силы:

$$\Delta p = F \Delta t \approx F(r_m) r_m/v \approx U(r_m)/v.$$

Используя это соотношение, находим, что  $v \ll e r_m U(r_m)/\hbar$ . Для столкновений заряженных частиц с нейтральной значительное рассеяние должно наблюдаться при их проникновении внутрь электронной оболочки. Поэтому для оценки величину  $U$  можно принять равной кулоновскому потенциалу при  $r = r_m$ . Получим, таким образом, второе условие применимости классического описания столкновений, ограничивающее скорость частиц сверху:

$$v \ll e^2/\hbar, \quad K \ll \mu e^4/\hbar^2. \quad (2.34)$$

Подстановка численных значений приводит для электрон-атомных столкновений к

$$K_e \ll m_e e^4/\hbar^2 \approx 10 \text{ эв};$$

для ион-атомных столкновений к

$$K_i \ll m_i e^4/\hbar^2 \approx 10^4 m_i/m_H \text{ эв}.$$

Сопоставление неравенств (2.33) и (2.34) показывает, что описание электрон-атомных столкновений при всех энергиях требует использования аппарата квантовой механики. Для упругих ион-атомных столкновений и столкновений атомов друг с другом имеется широкий интервал энергий, внутри которого возможно классическое описание. Заметим, что он охватывает энергии тяжелых частиц плазмы почти во всех практически интересных случаях.

Аналогично тому, как это было сделано выше, определим теперь критерии применимости классического описания для столкновений заряженных частиц, взаимодействие которых обусловлено кулоновским потенциалом  $U = e^2/r$ . Радиус сильного взаимодействия, характеризующего отклонение частиц на большие углы, соответствует потенциальной энергии взаимодействия порядка кинетической:  $\mu v^2/2 \approx e^2/r_s$ ,  $r_s \approx e^2/\mu v^2$ . Поэтому критерий определенности траектории принимает вид  $\hbar/\mu v \ll e^2/\mu v^2$  или

$$v \ll e^2/\hbar. \quad (2.35)$$

Второе условие применимости классической механики — условие определенности изменения импульса — такое же, как и при столкновении заряженных частиц с нейтральными. Оно совпадает с (2.35). Таким образом, оба условия применимости классической механики для столкновений заряженных частиц ограничивают энергию только сверху: для электрон-электронных и электрон-ионных столкновений находим  $K_e \ll 10 \text{ эв}$ ; для ион-ионных столкновений  $K_i \ll 10^4 m_i/m_H \text{ эв}$ .

Обсудим теперь квантовомеханический подход к описанию столкновений частиц. В квантовой механике траектория взаимодействующих частиц не определена и для каждого столкновения мо-

гут быть установлены только вероятностные характеристики. Для их определения необходимо найти волновые функции взаимодействующих частиц. Как и при классическом рассмотрении, решение задачи проще всего получить в системе центра инерции, в которой она эквивалентна задаче о рассеянии на силовом центре. Для упругих столкновений задача сводится к нахождению стационарного решения уравнения Шредингера с заданным потенциалом взаимодействия. Его можно записать в виде

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = (2 \mu / \hbar^2) U \Psi. \quad (3.36)$$

При отсутствии взаимодействия решение уравнения представляет собой плоскую волну  $\Psi_0 = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$  — волновой вектор;  $\mathbf{p} = \mu \mathbf{v}$  — импульс частицы в эквивалентной задаче.

Рассматривая правую часть уравнения (2.34) как неоднородность, можно формально записать его решение в интегральном виде:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \left[ \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d^3 r' \right]. \quad (2.37)$$

Интегрирование проводится по всему объему области взаимодействия. Результат столкновения определяется, очевидно, асимптотическим поведением волновой функции на больших расстояниях от силового центра (при  $r \rightarrow \infty$ ). Чтобы определить его, надо положить в подинтегральном выражении в (2.37)  $r \gg r'$ . Тогда

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} \approx r(1 - \mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2) = r - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}'$$

и интеграл преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d^3 r' \approx \\ & \approx \frac{\exp(ikr)}{r} \int \exp(-ik\mathbf{r}_1 \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d^3 r', \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}_1$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}$ . В оставшееся под интегралом выражение уже не входит  $r$ ; интеграл зависит только от направления вектора  $\mathbf{r}$ , т. е. от угла  $\vartheta$  между  $\mathbf{r}$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ , определяющим направление движения частиц до столкновения (это единственное выделенное направление). Подставляя интеграл в (2.37), получаем общее выражение для асимптотического представления волновой функции

$$\Psi = \exp(ikr) + f(\vartheta)/r \exp(ikr), \quad (2.38)$$

где

$$f(\vartheta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \exp(-ik\mathbf{r}_1 \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

Первый член (2.38) описывает поток частиц, падающих на силовой центр, второй член — поток рассеянных частиц. Величину  $f(\vartheta)$  называют амплитудой рассеяния. Нетрудно видеть, что она и определяет поперечное сечение. Действительно, в соответствии с (2.31) попереч-

ное сечение определяется отношением числа частиц, рассеянных в элемент телесного угла  $dN' = n' v' r^2 d\Omega$ , к потоку частиц, падающих на силовой центр  $nv$ :

$$\sigma = \frac{1}{nv} \frac{dN'}{d\Omega} = \frac{n' v'}{nv} r^2, \quad (2.39)$$

где  $n'$  — плотность рассеянных частиц,  $v'$  — их скорость.

Плотности частиц в падающем и рассеянном потоках определяются квадратом модулей соответствующих членов асимптотического выражения (2.38):

$$n'/n = |\Psi_s|^2 / |\Psi_0|^2 = |f(\vartheta)|^2 / r^2.$$

Поскольку при упругом столкновении  $v' = v$ , получаем

$$\sigma = |f(\vartheta)|^2. \quad (2.40)$$

При анализе неупругого рассеяния в асимптотическом представлении волновой функции должна учитываться возможность изменения внутреннего состояния атома. Для волновой функции системы электрон — атом оно может быть записано в виде

$$\Psi(r, \rho) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \Phi_0(\rho) + \sum_j f_{0j}(\vartheta) \Phi_j(\rho) \frac{\exp(ik_j r)}{r}, \quad (2.41)$$

где  $\rho$  — совокупность внутренних координат атома;  $j$  — номер состояния атома; индексом «0» обозначено начальное состояние  $\Phi_0$ ,  $\Phi_j$  — волновые функции начального и конечного состояний. Величина  $f_{0j}(\vartheta)$  является амплитудой рассеяния, сопровождающегося переходом атома из состояния 0 в состояние  $j$ . Она определяет сечение рассеяния. В соответствии с (2.39)

$$\sigma_{0j}(\vartheta) = (v'/v) |f_{0j}(\vartheta)|^2. \quad (2.42)$$

Таким образом, квантовомеханическая задача о рассеянии сводится к нахождению с помощью уравнения Шредингера асимптотического представления волновой функции (2.41) и входящих в него амплитуд рассеяния  $f_{0j}(\vartheta)$ . При вычислении волновой функции ее обычно представляют в виде разложения по собственным функциям сохраняющихся величин. В задаче о движении частицы в поле силового центра такой величиной является момент количества движения  $M = \mu [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]_z = \mu \xi v$ , определяющийся начальным значением скорости и прицельным расстоянием. При классическом рассмотрении оба эти параметра фиксируются. В квантовой механике одновременное задание скорости и прицельного параметра невозможно в связи с соотношением неопределенностей. Поэтому, решая задачу при фиксированной начальной скорости, приходится допускать возможность широкого спектра значений прицельного параметра и момента количества движения. Возможные значения момента определяются орбитальным квантовым числом  $M = l\hbar$ , а соответствующие этим значениям собственные функции пропорциональ-

ны полиномам Лежандра  $P_l(\cos \vartheta)$ . Поэтому волновую функцию представляют в виде разложения по полиномам Лежандра. Ее асимптотический вид при таком разложении соответствует сумме сходящихся и расходящихся сферических волн:

$$\Psi = \frac{\exp(ikr)}{r} \sum_l a_l P_l(\cos \vartheta) + \frac{\exp(-ikr)}{r} \sum_l b_l P_l(\cos \vartheta).$$

При отсутствии рассеяния коэффициенты  $a_l, b_l$  выбираются такими, чтобы их суперпозиция давала плоскую волну  $\exp(ikz)$ . Учет рассеяния приводит к изменению коэффициентов  $a_l$ , они могут быть найдены в результате подстановки разложения в уравнение Шредингера. При упругом рассеянии возникает дополнительный сдвиг фаз в каждом коэффициенте, при неупругом рассеянии изменяются также и их амплитуды.

Изменение коэффициентов определяет амплитуду рассеяния  $f(\vartheta) = \sum_l f_l P_l(\cos \vartheta)$  и, в соответствии с (2.42), дифференциальное сечение.

Описанный общий подход дает возможность в принципе решить задачу о столкновениях частиц. Однако решение получается в виде бесконечных рядов. При больших энергиях сталкивающихся частиц во многих случаях можно считать, что взаимодействие приводит к слабому изменению первоначального состояния. Это позволяет решать задачу о столкновении методом возмущений. Такое рассмотрение называют *приближением Борна*. Оно может быть применено при условиях, когда изменение импульса в процессе столкновения много меньше квантовомеханической неопределенности импульса в невозмущенном состоянии  $\Delta p \ll \delta p$ . Если неравенство выполняется, то можно в нулевом приближении не учитывать взаимодействие частиц и рассматривать его как возмущение.

Видно, что этот критерий противоположен одному из условий применимости классического рассмотрения и может быть представлен в виде неравенства, противоположного (2.34):

$$v \gg eU(r_m) r_m / \hbar \approx e^2 / \hbar. \quad (2.43)$$

Для столкновений электронов с атомами неравенство (2.43) приводит к условию  $K_e \gg m_e^4 / \hbar^2 \approx 10 \text{ эв}$ . При выполнении этого условия применение теории возмущений позволяет получить сравнительно простые интегральные выражения для амплитуды рассеяния электронов атомами. Для упругих столкновений, например, их можно найти с помощью (2.38). Подставляя в подынтегральное выражение формулы (2.38) невозмущенную волновую функцию  $\Psi_0 = \exp(ikr)$ , получаем

$$f(\vartheta) = -\frac{m_e}{2\pi\hbar^2} \int \exp(-i\Delta\mathbf{k}\mathbf{r}) U(r) d^3r, \quad (2.44)$$

где вектор  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  —  $\mathbf{k}$  есть изменение волнового вектора при столкновении; при  $k' = k$   $\Delta k = 2k \sin(\vartheta/2) = 2(mv/\hbar) \sin(\vartheta/2)$ .

Аналогично определяется в приближении Борна амплитуда неупругого рассеяния электронов атомом:

$$f_{0j} = -\frac{m_e}{2\pi\hbar^2} \int \exp(-i\Delta\mathbf{k}\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, \rho) \Phi_j(\rho) \Phi_0(\rho) d^3r d^3\rho, \quad (2.45)$$

где по-прежнему  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} = m_e\mathbf{v}'/\hbar - m_e\mathbf{v}/\hbar$ ;  $U(\mathbf{r}, \rho)$  — потенциал взаимодействия свободного электрона с электронами атома и ядром;  $\Phi_0$  и  $\Phi_j$  — волновые функции начального и конечного состояний атома; интегрирование проводится по всем координатам  $d^3r$  свободного электрона и координатам  $d^3\rho$  электронов атома. При подстановке выражений для амплитуд рассеяния в (2.40), (2.42) определяют поперечные сечения упругого и неупругого рассеяния в приближении Борна.

### § 2.3. Интегральные характеристики столкновений

В § 2.2 было введено дифференциальное сечение столкновений, характеризующее рассеяние в эквивалентной задаче о движении частиц в поле неподвижного силового центра. С помощью  $\sigma$  можно определить характеристики реальных столкновений.

Прежде всего напомним выражение для числа столкновений частиц  $\alpha$  и  $\beta$ , происходящих в единицу времени в единице объема. Для этого воспользуемся определением поперечного сечения (2.31). Входящую в эту формулу плотность частиц, падающих на эквивалентный силовой центр, следует, очевидно, заменить числом пар сталкивающихся частиц в единице объема. Число таких пар с относительной скоростью в пределах от  $v$  до  $v + dv$  можно записать в виде  $n_\alpha n_\beta f_{\alpha\beta} dv$ , где  $f_{\alpha\beta}(v) dv$  — доля пар, обладающих значением относительной скорости в выбранных пределах от  $v$  до  $v + dv$ . Таким образом, число столкновений в единицу времени в единице объема, сопровождающихся рассеянием в телесный угол  $d\Omega$ , определяется соотношением

$$dQ_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta \sigma_{\alpha\beta} v f_{\alpha\beta}(v) dv d\Omega. \quad (2.46)$$

При изучении влияния столкновений на поведение плазмы обычно нет необходимости рассматривать отдельно столкновения, приводящие к рассеянию на различные углы. Это влияние определяется интегральными характеристиками столкновений, просуммированными по углам рассеяния. Можно вычислить, например, полное число столкновений частиц данной скорости. Для этого проинтегрируем (2.46) по телесному углу. Тогда число столкновений в единице объема в единицу времени будет равно:

$$dQ_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta v s_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}(v) dv; \quad (2.47)$$

величину

$$s_{\alpha\beta} = \int \sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (2.48)$$

называют *полным сечением рассеяния*.

При классическом подходе полное сечение определяет площадь поверхности (перпендикулярной к относительной скорости), попав в которую частицы испытывают столкновение, сопровождающееся рассеянием на произвольный угол\*. Кроме полного сечения вводят и другие связанные с ним величины. Входящую в (2.47) величину

$$v_{\alpha\beta}(v) = n_{\beta} v s_{\alpha\beta}(v) \quad (2.49)$$

называют *частотой столкновений* частиц сорта  $\alpha$  с частицами сорта  $\beta$  (или числом столкновений в единицу времени). В соответствии с классическим представлением сечения она определяет число попаданий частицы сорта  $\alpha$  в мишени, образованные частицами сорта  $\beta$ . Действительно, число таких попаданий в единицу времени равно произведению скорости на площадь сечения столкновений и на плотность мишеней. Величина обратная  $v$  дает среднее время между столкновениями

$$\tau_{\alpha\beta}(v) = 1/v_{\alpha\beta}(v). \quad (2.50)$$

С его помощью можно определить и *длину свободного пробега* — среднее расстояние между столкновениями:

$$\lambda_{\alpha\beta}(v) = v\tau_{\alpha\beta} = 1/n_{\beta}s_{\alpha\beta}(v). \quad (2.51)$$

Полное сечение и связанные с ним характеристики часто использовались и используются для описания столкновений. Следует, однако, иметь в виду, что они применимы далеко не всегда. Для упругих столкновений полное сечение во многих случаях вообще не имеет физического смысла. Это связано с тем, что в интеграл (2.48), определяющий полное сечение, с одинаковым весом входят «близкие» столкновения, сильно изменяющие траекторию сталкивающихся частиц, и «дальние» столкновения, почти не изменяющие ее. Классическое полное сечение может быть вычислено лишь для столкновений с резко ограниченным радиусом взаимодействия, например для столкновений нейтральных частиц. При столкновениях электронов и ионов с атомами или друг с другом радиус взаимодействия не ограничен — взаимодействие (пусть очень малое) имеет место на любых расстояниях. Поэтому интеграл (2.48), определяющий полное сечение, расходится. При квантовомеханическом подходе полное сечение конечно лишь для быстро убывающего потенциала ( $U < A/r^3$ ). Однако и в тех случаях, когда полное сечение упругих столкновений существует, оно не может непосредственно использоваться при рассмотрении кинетики движения частиц плазмы, так как в нем не учитывается различие влияния близких и далеких столкновений.

Для характеристики влияния упругих столкновений на движение частиц вводят обычно интегральное сечение, характеризующее изменение импульса и энергии при столкновениях. В соответствии с (2.16), (2.19) зависимость этих изменений от угла рассеяния опреде-

---

\* Заметим, что термин «поперечное сечение» в наибольшей степени характеризует именно столкновения твердых шаров, рассматривавшиеся раньше как модель атомных столкновений.

ляется множителем  $(1 - \cos \vartheta)$ . Поэтому следует ввести в интегральное сечение упругих столкновений, характеризующее изменение импульса и кинетической энергии, такой весовой множитель. Тогда выражение для сечения примет вид

$$s_{\alpha\beta}^t = \int_{(\Omega)} (1 - \cos \vartheta) \sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma_{\alpha\beta}(\vartheta) (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (2.52)$$

Весовой множитель  $(1 - \cos \vartheta)$  близок к нулю для далеких соударений (при  $\vartheta \rightarrow 0$ ), и поэтому интеграл сходится для всех видов электрон-атомных и ион-атомных взаимодействий. Лишь для кулоновского закона, характеризующего взаимодействие заряженных частиц друг с другом, интеграл (2.52) логарифмически расходится. В этом случае его удастся определить при учете экранирующего действия плазмы (см. § 2.4). Интегральное сечение  $s^t$ , определяющее изменение энергии и импульса при упругих столкновениях, называют *тормозным сечением*, *сечением передачи импульса* или *транспортным сечением*. Последнее название связано с тем, что это сечение входит в основные уравнения кинетики плазмы, описывающие процессы переноса частиц и энергии (см. гл. 5, 6). Наряду с транспортным сечением можно ввести и другие связанные с ним интегральные характеристики столкновений аналогично тому, как это было сделано выше при определении полного сечения [см. (2.49) — (2.51)]. Это — эффективная частота столкновений, время между столкновениями, длина свободного пробега:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{\alpha\beta}^t(v) &= n_\beta s_{\alpha\beta}^t(v) v; \\ \tau_{\alpha\beta}^t(v) &= 1/n_\beta s_{\alpha\beta}^t(v) v; \\ \lambda_{\alpha\beta}^t(v) &= 1/n_\beta s_{\alpha\beta}^t(v). \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Все введенные интегральные характеристики, вообще говоря, зависят от относительной скорости частиц. При их использовании для расчетов и оценок приходится проводить усреднение по скоростям сталкивающихся частиц, способ усреднения зависит от конкретной задачи.

Определим, например, с помощью транспортного сечения (2.52) изменение энергии при упругих столкновениях. Изменение кинетической энергии частицы  $\alpha$  при ее столкновении с частицей  $\beta$  определяется соотношением (2.19). Умножая его на число столкновений в единицу времени в единице объема [см. (2.46)], получаем изменение энергии частиц сорта  $\alpha$  в единице объема в результате таких столкновений

$$d(n_\alpha K_\alpha) = -\kappa_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta v \sigma_{\alpha\beta} (1 - \cos \vartheta) (K_\alpha - K_\beta) f_{\alpha\beta}(v) dv d\Omega.$$



Проинтегрировав по телесному углу и по скоростям, найдем изменение средней энергии частиц  $\alpha$  в единицу времени:

$$\begin{aligned} dK_\alpha/dt &= -\kappa_{\alpha\beta} \int_{(v)} n_\beta s_{\alpha\beta}^t v (K_\alpha - K_\beta) f_{\alpha\beta}(v) dv = \\ &= -\kappa_{\alpha\beta} \int_{(v)} v_{\alpha\beta}^t(v) (K_\alpha - K_\beta) f_{\alpha\beta}(v) dv. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Аналогичным образом получается выражение для изменения импульса. С помощью (2.16) найдем изменение среднего импульса частиц  $\alpha$  в результате их упругих столкновений с частицами  $\beta$ :

$$d\mathbf{p}_\alpha/dt = -\mu_{\alpha\beta} \int_{(v)} v_{\alpha\beta}^t(v) (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta) f_{\alpha\beta}(v) dv. \quad (2.55)$$

Остановимся теперь на определении интегральных сечений для неупругих столкновений. Для неупругих процессов полное сечение столкновений, определяемое формулой типа (2.48)

$$s_{\alpha\beta}^{(j)} = 2\pi \int_0^\pi \sigma_{\alpha\beta}^{(j)} \sin \theta d\theta, \quad (2.56)$$

имеет ясный физический смысл — оно дает число неупругих актов данного типа ( $j$ ). Скажем, для процессов возбуждения заданного уровня это сечение определяет полное число актов возбуждения, для процессов ионизации — полное число актов ионизации и т. д. Естественно, что интеграл, входящий в выражение для сечения, во всех случаях сходится. Так же как и для упругих, для неупругих столкновений могут быть введены частоты неупругих столкновений, приводящих к тому или иному процессу  $v_{\alpha\beta}^{(j)} = n_\beta v s_{\alpha\beta}^{(j)}$ , и соответствующие длины свободного пробега.

В отличие от упругих столкновений изменение энергии электронов при их неупругих столкновениях с атомами определяется полным сечением (2.56) и соответствующей частотой столкновений. Действительно, при каждом таком столкновении изменение энергии электронов практически равно изменению внутренней энергии атома  $\Delta K_e = -\mathcal{E}_{0j}$ , так как в соответствии с законами сохранения изменение кинетической энергии атома имеет порядок малого отношения масс  $m_e/m_a$ . Умножая  $\Delta K_e$  на число неупругих столкновений в единице объема в единицу времени и усредняя по скоростям, получаем изменение средней энергии электронов, связанное со столкновениями данного типа:

$$\overline{(dK_e/dt)}_{ea}^{(j)} = -\mathcal{E}_{0j} \int n_a v s_{ea}^{(j)} f_e(v) dv = -\bar{v}_{ea}^{(j)} \mathcal{E}_{0j}, \quad (2.57)$$

где  $s_{ea}^{(j)}$  — полное сечение вида (2.56); частота столкновений  $v_{ea}^{(j)}$  усреднена по скоростям электронов (относительная скорость при

столкновениях электронов с атомами практически равна скорости электронов). Полные потери энергии электронов при неупругих столкновениях получаются суммированием выражений (2.57) по всем возможным процессам возбуждения и ионизации атомов:

$$(d\bar{K}_e/dt)_{ea}^n \approx - \sum_j \bar{v}_{ea}^{(j)} \mathcal{E}_{0j}. \quad (2.58)$$

Для условий, когда средняя энергия электронов много меньше энергии возбуждения низшего уровня атома  $\mathcal{E}_{01}$ , неупругие процессы вызываемые электронами из «хвоста» функции распределения, число которых быстро уменьшается с ростом энергии. При этом возбуждение каждого уровня осуществляется электронами с энергией, близкой энергии возбуждения, и можно приближенно считать, что неупругие столкновения приводят к полной потере энергии электроном. Тогда выражение для суммарных потерь энергии электронов принимает вид

$$\left( \frac{dK_e}{dt} \right)_{ea}^n \approx - \sum_j v_{ea}^{(j)} K_e = -v_{ea}^n K_e, \quad (2.59)$$

где  $v_{ea}^n = n_a v s_{ea}^n = n_a v \sum_j s_{ea}^{(j)}$  — суммарная частота неупругих столкновений.

## § 2.4. Упругие столкновения между заряженными частицами

Перейдем к обзору имеющихся данных о столкновениях заряженных частиц. Обзор будет кратким и далеко не полным\*. Его цель — дать только общее представление о характеристиках столкновений, существенно влияющих на свойства плазмы. В этом параграфе будут рассмотрены упругие столкновения заряженных частиц друг с другом.

Главными силами, определяющими взаимодействие заряженных частиц друг с другом, являются дальнедействующие кулоновские силы. Внутренняя структура частиц обычно не существенна. Она сказывается лишь в близких соударениях ионов, которые вносят обычно малый вклад в интегральные характеристики столкновений.

Решение задачи о рассеянии в кулоновском поле с потенциалом

$$U = e^2/r \quad (2.60)$$

хорошо известно. При классическом подходе его можно получить по схеме, описанной в § 2.2. Подстановка кулоновского потенциала

---

\* Систематизированное изложение физики столкновений заряженных частиц содержится в монографиях, список которых приведен в конце книги.

в (2.29) позволяет определить связь угла рассеяния с прицельным расстоянием. Интегрирование приводит к следующему соотношению:

$$\xi = (e^2/\mu v^2) \operatorname{ctg}(\vartheta/2) = r_s \operatorname{ctg}(\vartheta/2). \quad (2.61)$$

Здесь введен параметр  $r_s = e^2/\mu v^2$ , называемый *радиусом сильного взаимодействия*. Он равен расстоянию, при котором потенциальная энергия взаимодействия  $U(r_s)$  в два раза больше кинетической энергии. Угол рассеяния, соответствующий  $\xi = r_s$ , равен  $\pi/2$ . Подставляя (2.61) в выражение для сечения (2.32), получаем формулу Резерфорда:

$$\sigma = (e^2/2 \mu v^2)^2 / \sin^4(\vartheta/2). \quad (2.62)$$

Она определяет быстрый рост сечения при уменьшении угла рассеяния (т. е. при увеличении прицельного расстояния), который связан с относительно медленным спадом поля на больших расстояниях ( $U \sim 1/r$ ). Медленный спад поля приводит также к сильной зависимости от энергии радиуса эффективного взаимодействия ( $r_s \sim \sim 1/K$ ) и сечения рассеяния ( $\sigma \sim 1/K^2$ ).

Квантовомеханическое решение задачи о рассеянии в кулоновском поле частиц различного типа также приводит к формуле Резерфорда. Некоторое отличие получается для столкновений одинаковых частиц. В этом случае квантовомеханический подход требует учета обменного взаимодействия, связанного с неразличимостью сталкивающихся частиц. Суперпозиция их волновых функций приводит к появлению в сечении столкновения интерференционного члена. При его учете дифференциальное поперечное сечение столкновений электронов друг с другом приобретает вид

$$\sigma(\vartheta) + \sigma(\pi - \vartheta) = \left( \frac{e^2}{m_e v^2} \right)^2 \left[ \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\vartheta/2)} - \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2) \cos^2(\vartheta/2)} \cos \left[ \frac{e^2}{\hbar v} \ln \operatorname{tg}^2(\vartheta/2) \right] \right] \quad (2.63)$$

(формула записана для суммы сечений при углах  $\vartheta$  и  $\pi - \vartheta$ , поскольку замена  $\vartheta$  на  $\pi - \vartheta$  эквивалентна перестановке электронов и потому неразличима). Эта формула иллюстрируется рис. 2.5, на котором различные кривые соответствуют следующим значениям параметра:  $1 - e^2/\hbar v = 1$ ,  $2 - e^2/\hbar v = 10$ ,  $3 - e^2/\hbar v = 100$ ; в интервале от  $\pi/4$  до  $3\pi/4$  масштаб  $\sigma$  увеличен в 100 раз. При малых скоростях  $v \ll e^2/\hbar$  интерференционный член в (2.63) быстро осциллирует при изменении  $\vartheta$ . Он обращается в нуль при усреднении даже по небольшому диапазону углов, поэтому его можно не учитывать (см. пунктирную кривую). В противном случае этот член оказывает заметное влияние на рассеяние при значительных углах. При малых углах рассеяния  $\vartheta \ll 1$  сечение во всех случаях практически не отличается от резерфордовского.

Перейдем теперь к нахождению транспортного сечения (2.52). Используя (2.62), запишем интеграл, входящий в сечение, следующим образом:

$$\begin{aligned}
 s_{\vartheta}^t &= 2\pi \int_{\vartheta_{\text{МИН}}}^{\pi} \sigma (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{e^2}{\mu v^2} \right)^2 \int_{\vartheta_{\text{МИН}}}^{\pi} \frac{(1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta}{\sin^4 (\vartheta/2)} d\vartheta = \\
 &= 4\pi \left( \frac{e^2}{\mu v^2} \right)^2 \ln \frac{1}{\sin (\vartheta_{\text{МИН}}/2)}. \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

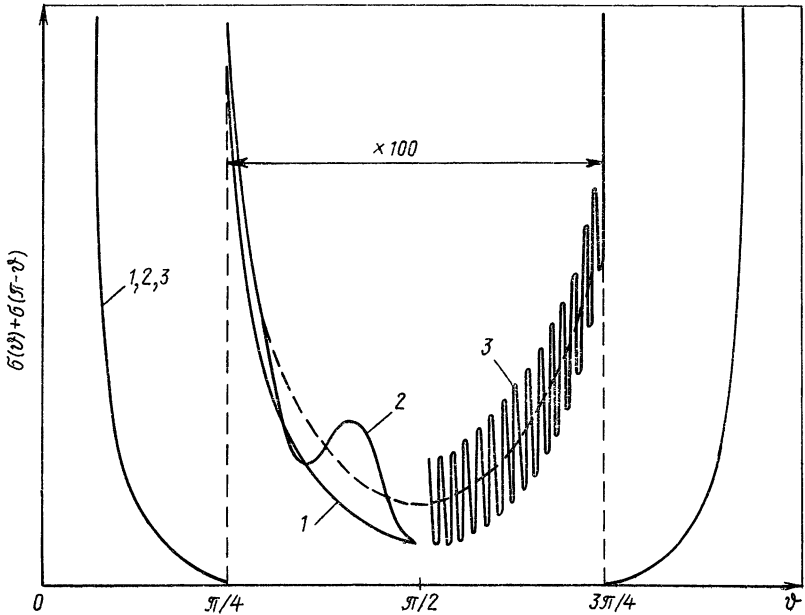


Рис. 2.5

Учитывая связь угла рассеяния с прицельным параметром, определяемую с помощью (2.61), т. е. считая, что  $\sin (\vartheta/2) = 1/\sqrt{1 + (\xi/r_s)^2}$ , формулу (2.64) при  $\xi_{\text{макс}} \gg r_s$  можно записать в виде

$$s^t = 4\pi \left( \frac{e^2}{\mu v^2} \right)^2 \ln \frac{\xi_{\text{макс}}}{r_s}.$$

При интегрировании в пределах от  $\vartheta_{\text{МИН}} = 0$  до  $\vartheta_{\text{макс}} = \pi/2$  или, соответственно, от  $\xi_{\text{макс}} = \infty$  до  $\xi_{\text{МИН}} = 0$  интеграл в (2.64) логарифмически расходится. Эта расходимость связана с большим вкла-

дом далеких столкновений, приводящих к рассеянию на малые углы (расходимость появляется при  $\vartheta_{\text{мин}} \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ ). Для устранения расходимости следует ограничить радиус кулоновского взаимодействия. В плазме такое ограничение связано с экранированием поля каждой из взаимодействующих частиц другими заряженными частицами. Размер области экранирования, как было показано в § 1.2, определяется дебаевским радиусом. Мы можем поэтому принять  $\xi_{\text{макс}} = r_D = (T/4 \pi n e^2)^{1/2}$ , причем для столкновений, в которых участвуют электроны, обычно можно считать  $T = T_e$ , поскольку в экранировании за время столкновения ионы не успевают принять участие; для ион-ионных столкновений надо учитывать экранирование, связанное с ионами, и подставлять в  $r_D$  меньшую из величин  $T_e$  и  $T_i$  [см (1.17)]. Подстановка  $\xi_{\text{макс}}$  позволяет представить логарифмический множитель, входящий в (2.64) (так называемый *кулоновский логарифм*), в виде

$$L = \ln \frac{r_D}{r_s} \approx \ln \left[ \frac{T^{3/2}}{e^3 n^{1/2}} \right], \quad (2.65)$$

где относительная скорость заменена среднеквадратической скоростью движения частиц в плазме  $\bar{v} = \sqrt{3T/\mu}$ . Если средняя энергия электронов и ионов различна, в кулоновский логарифм, определяющий сечения электрон-электронных и электрон-ионных столкновений, входит, очевидно, электронная температура  $T_e$  (она определяет радиус экранирования и относительную скорость при столкновениях). Кулоновский логарифм, входящий в сечение ионных столкновений, при  $T_e > T_i$  определяется ионной температурой; при  $T_i > T_e$  — электронной температурой. При квантовомеханическом подходе минимальный угол рассеяния на сфере с радиусом, равным дебаевскому, ограничен из-за дифракции:  $\vartheta_{\text{мин}} \approx \lambda/r_D = \hbar/\mu v r_D$ . Если эта величина больше угла  $\vartheta_{\text{мин}} = r_s/\xi_{\text{макс}} = r_s/r_D$ , то именно она определяет, в соответствии с (2.64), кулоновский логарифм. При  $\lambda > r_s$

$$L \approx \ln 2r_D/\lambda \approx (1/2) \ln [\mu T^2/e^2 \hbar^2 n]. \quad (2.66)$$

Отметим, что неточности в определении максимального и минимального прицельного расстояния (приближенный учет условий экранирования и грубая оценка квантовомеханического ограничения) слабо влияют на кулоновский логарифм, поскольку при типичных параметрах плазмы он достаточно велик. Полученная формула становится несправедливой при очень больших магнитных полях, когда ларморовский радиус электронов меньше дебаевского. Такие поля существенно изменяют траектории движения сталкивающихся электронов при больших прицельных параметрах. Учет этого эффекта приводит к изменению выражения для кулоновского логарифма.

Таким образом, транспортное сечение рассеяния (2.64) имеет вид

$$s^t = 4\pi (e^2/\mu v^2)^2 L = 4\pi r_s^2 L. \quad (2.67)$$

Заметим, что эту формулу можно применять и для описания электрон-электронных столкновений при условиях, когда существенно влияние обменного взаимодействия. Как отмечалось выше, это влияние приводит к изменению дифференциального сечения при не очень малых углах рассеяния [см. (2.64)]; такое изменение, однако, слабо влияет на транспортное сечение.

В соответствии с (2.67) транспортное сечение кулоновского рассеяния в  $4L$  раз превышает величину  $\pi r_s^2$ , определяющую сечение рассеяния на большие углы (как отмечалось выше, в классической модели при  $\xi < r_s$ ,  $\vartheta > \pi/2$ ). Поскольку величина  $L$  обычно много больше единицы, это свидетельствует о преобладающей роли далеких взаимодействий, для которых  $\vartheta \ll \pi/2$ . При далеких взаимодействиях прицельный параметр соизмерим с дебаевским радиусом, который много больше среднего расстояния между частицами плазмы (см. § 1.2). В этих условиях каждая частица взаимодействует одновременно со многими электронами и ионами. При таком взаимодействии направление движения частицы изменяется непрерывно и ее траекторию нельзя разбивать на чередующиеся участки свободного движения и взаимодействия с другими частицами (см. рис. 1.2). Строго говоря, лишь при таком разбиении имеет определенный физический смысл понятие парного столкновения. В случае кулоновского взаимодействия последовательный анализ рассеяния требует рассмотрения задачи об одновременном взаимодействии многих тел. Воздействие каждого электрона или иона на пробную частицу в принципе изменяет ее траекторию и, следовательно, влияет на ее взаимодействие с другими частицами. Этот факт не был учтен при вычислении кулоновских сечений рассеяния в плазме. Поэтому непосредственное использование полученных выражений для  $s^t$  при вычислениях связанных с ней кинетических величин в плазме требует обоснования.

Количественное обоснование допустимости описания взаимодействия заряженных частиц плазмы друг с другом, как совокупности парных столкновений, может быть получено путем сопоставления результатов такого описания со строгим решением задачи. Для ряда случаев, для которых удалось получить строгое решение\*, такое сопоставление приводит к очень хорошему соответствию. Качественно причины этого соответствия можно объяснить следующим образом. Взаимодействия заряженных частиц можно разбить на близкие столкновения, происходящие на расстояниях порядка  $r_s$  и далекие — на расстояниях существенно больших  $r_s$  (но меньших  $r_D$ ). Близкие взаимодействия можно считать парными столкновениями без вся-

\* Решение самосогласованной задачи о взаимодействии большого коллектива заряженных частиц удалось получить для некоторых простых случаев в результате применения методов современной теории поля (так называемой графической техники вычислений).

ких оговорок, поскольку в реальных условиях  $r_s$  много меньше расстояния между частицами ( $r_s \ll n^{-1/3}$ ). Рассматривая отдельные далекие взаимодействия, следует учитывать, что они характеризуются малым углом рассеяния. Поэтому воздействие каждой отдельной частицы плазмы приводит к незначительному изменению траекторий пробной частицы. При анализе рассеяния в поле остальных электронов и ионов, воздействующих на пробную частицу, в первом приближении этим изменением вследствие его малости можно пренебречь. Тогда полный результат рассеяния на всех электронах и ионах, взаимодействующих с рассматриваемой частицей, можно представить в виде суммы отклонений, возникающих при взаимодействиях с каждой из них. Отсюда следует, что далекие взаимодействия заряженных частиц также можно без большой ошибки свести к последовательности парных столкновений. Таким образом, оказывается возможным, несмотря на коллективный характер взаимодействия заряженных частиц друг с другом, использовать для описания их поведения в плазме понятие парных столкновений. Этот подход намного упрощает рассмотрение плазменных задач.

В соответствии со сказанным будем пользоваться для описания столкновений заряженных частиц транспортными сечениями, определяемыми формулой (2.67). Для различных видов столкновений (электронов друг с другом, электронов с ионами, ионов одного сорта друг с другом) эти сечения определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} s_{ee}^t &= 4\pi (e^2/\mu_{ee} v^2)^2 L_e = 16\pi (e^2/m_e v^2)^2 L_e; \\ s_{ei}^t &= 4\pi (e^2/\mu_{ei} v^2)^2 L_e = 4\pi (e^2/m_e v^2)^2 L_e; \\ s_{ii}^t &= 4\pi (e^2/\mu_{ii} v^2)^2 L_i = 16\pi (e^2/m_i v^2)^2 L_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

Кулоновский логарифм, входящий в формулы (2.68), можно определить с помощью (2.66). Приближенно выражение (2.66) можно написать в виде:

а) для электрон-электронных и электрон-ионных столкновений при  $T < m_e e^2/3 \hbar^2 \approx 10 \text{ эв}$

$$L_e \approx 23 + (3/2) \ln T_e - (1/2) \ln n;$$

при  $T_e > m_e e^2/3 \hbar^2 \approx 10 \text{ эв}$

$$L_e \approx 24 + \ln T_e - (1/2) \ln n;$$

б) для ион-ионных столкновений

при  $T_i < m_i e^2/3 \hbar^2 \approx 10^4 m_i/m_M \text{ эв}$

$$L_i \approx 23 + (3/2) \ln T_{ie} - (1/2) \ln n,$$

где  $n$  выражается в  $\text{см}^{-3}$ ,  $T$  — в эв;  $T_{ie}$  — меньшая из температур  $T_i$  или  $T_e$ . Как видно, зависимость  $L_e$  и  $L_i$  от параметров плазмы обычно является слабой. Поэтому при изменении концентрации и температур в небольших пределах можно считать  $L = \text{const}$ . При

Этом сечении определяются только энергией относительного движения при столкновениях. Полагая  $L \approx 10$ , получаем оценку сечений:  $s^t \approx 10^{-12}/K^2$ , где  $s^t$  измеряется в  $\text{см}^2$ ,  $K = \mu v^2/2$  — в эв.

Сечения столкновений (2.68) позволяют определить также другие интегральные характеристики — частоту столкновений, время между столкновениями, длину свободного пробега. Запишем здесь лишь используемые далее формулы для частот столкновений:

$$\left. \begin{aligned} v_{ee}^t &= \frac{16\pi e^4 n}{m_e^2 v^3} L_e; \\ v_{ei}^t &= \frac{4\pi e^4 n}{m_e^2 v^3} L_e; \\ v_{ii}^t &= \frac{16\pi e^4 n}{m_i^2 v^3} L_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

При одинаковых энергиях относительного движения отношение этих частот равно

$$v_{ee}/v_{ei} \approx \sqrt{2}; \quad v_{ii}/v_{ei} \approx \sqrt{2} (m_e/m_i)^{1/2} L_i/L_e.$$

## § 2.5. Упругие столкновения электронов с атомами

Рассмотрим упругие столкновения электронов с нейтральными атомами, определяющие обычно кинетику движения электронов в слабоионизованной плазме. Как отмечалось в § 2.2, упругие столкновения электронов с атомами должны описываться квантовомеханически. Полное решение квантовомеханической задачи удается получить лишь для простейших атомов (для водорода, гелия, водородоподобных атомов и т. д.). При этом учитывают три вида взаимодействия электрона с атомом: с невозмущенным полем атома, поляризационное и обменное.

На расстояниях масштаба радиуса атома и меньших основную роль играет взаимодействие первого вида. Оно описывается потенциалом кулоновского поля ядра атома, экранированным электронными оболочками. Для водородоподобных атомов в основном состоянии закон изменения потенциальной энергии дается соотношением (см. рис. 2.6, кривая 1)

$$e\varphi_1 = U_1 = e^2 (1/r + 1/r_a) \exp(-2r/r_a), \quad (2.70)$$

где  $r_a = \hbar^2/m_e e^2$  — боровский радиус атома. Решение задачи о рассеянии электрона в таком поле дает дифференциальное сечение, монотонно убывающее с углом рассеяния (рис. 2.7, кривая 1). Резкое уменьшение потенциала взаимодействия при  $r > r_a$  приводит к тому, что в области малых углов рассеяния, соответствующих далеким столкновениям, сечение остается постоянным.



Поляризационное взаимодействие связано с появлением у атома электрического дипольного момента под влиянием кулоновского поля пролетающего электрона (электрон притягивает ядро и отталкивает электронные оболочки атома). Величина дипольного момента  $d$  пропорциональна электрическому полю, создаваемому электроном вблизи атома  $d = \alpha_d e/r^2$ . Коэффициент пропорциональности  $\alpha_d = \chi r_a^3$  представляет так называемую поляризуемость атома,  $\chi$  — численный коэффициент (для атома водорода при малых скоростях электрона  $\chi \approx 4,5$ ). Соответственно потенциальная энергия взаимо-

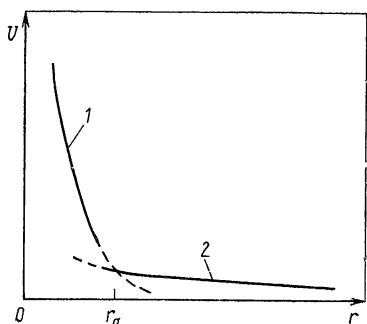


Рис. 2.6

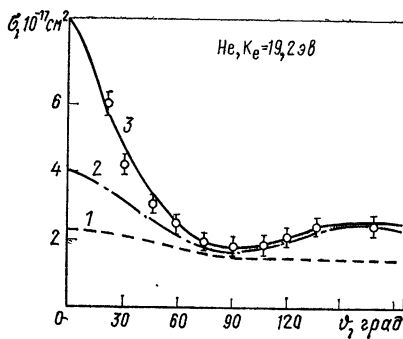


Рис. 2.7

действия индуцированного дипольного момента с электроном при  $r > r_a$  равна

$$e\varphi_2 = U_2 = 2 \alpha_d e^2/r^4 = 2 \chi r_a^3 e^2/r^4. \quad (2.71)$$

Этот потенциал на больших расстояниях убывает существенно медленнее потенциала невозмущенного атома (2.70). Поэтому далекие столкновения, соответствующие рассеянию на малые углы, определяются поляризационным взаимодействием. Оно приводит к резкому возрастанию сечения при малых углах.

При малых скоростях рассеиваемого электрона, когда время его пребывания вблизи атома велико по сравнению с периодом обращения атомного электрона, оказывается существенным эффект обменного взаимодействия между электронами. Оно связано с возможностью обмена свободного и атомного электронов или, точнее, с суперпозицией их волновых функций. Поскольку вероятность вылета атомного электрона слабо зависит от направления, учет обменного взаимодействия приводит к возрастанию сечения при больших углах рассеяния.

Учет названных факторов привел к хорошему соответствию теории упругого рассеяния электронов на атомах водорода и гелия с экспериментом. Это иллюстрируется рис. 2.7 для гелия. На нем кривая 1 соответствует рассеянию в поле экранированного ядра, кривая 2 учитывает также и обменное взаимодействие, кривая 3 — обменное и поляризационное взаимодействия. Для более

тяжелых атомов детальный теоретический анализ связан с большими трудностями, однако общий ход кривых сечения объясняется теорией. При малых энергиях электронов, при которых дебройлевская длина волны сравнима с размерами атома, угловая зависимость сечения немонотонна, причем число максимумов и минимумов на кривой растет с увеличением атомного номера (рис. 2.8). Этот дифракционный эффект связан с выполнением условий близких к условию резонанса для одной из гармоник волновой функции, пропорциональных полиномам Лежандра (см. с. 36). Условия резонанса соответствуют определенному соотношению между размерами потенциальной ямы и эффективной длиной волны электрона в области взаимодействия, при котором резко возрастает парциальная амплитуда рассеяния. При увеличении скорости электрона растет диапазон значений момента количества движения, в пределах которого существенно рассеяние ( $0 < M < m_e v r_a$ ). Соответственно растет и число гармоник, вносящих значительный вклад в сечение ( $I_{\text{макс}} \approx M_{\text{макс}}/\hbar$ ). Поэтому с увеличением скорости немонотонность угловой зависимости сечения сглаживается и сечение становится монотонно спадающей функцией угла рассеяния.

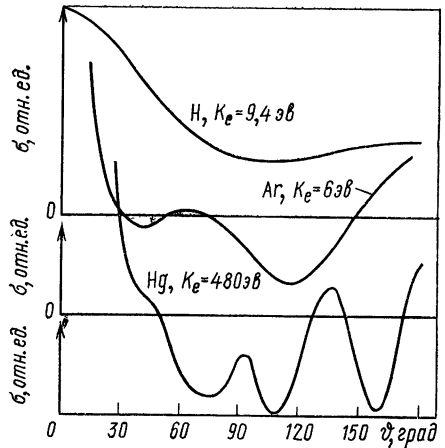


Рис. 2.8

При больших скоростях электронов сечение рассеяния может быть вычислено с помощью приближения Борна. Оно справедливо при  $v \gg e^2/\hbar$  [см. (2.43)] и используется обычно, начиная с энергий электронов 50—100 эв. Подстановка в (2.44) потенциала взаимодействия рассеиваемого электрона с атомом приводит к следующему общему выражению для амплитуды упругого рассеяния:

$$f(\vartheta) = \frac{e^2}{2m_e v^2 \sin^2(\vartheta/2)} [Z - F(q)], \quad (2.72)$$

где первое слагаемое определяется взаимодействием электрона с ядром, второе — с атомными электронами;  $F(q)$  — так называемый атомный форм-фактор

$$F(q) = \int g(r) \exp(iqr) d^3r, \quad q = (mv/\hbar) \sin(\vartheta/2);$$

где  $g(r) = |\psi(r)|^2$  — распределение концентрации электронов в атоме. Сечение рассеяния определяется  $|f(\vartheta)|^2$  [см. (2.40)]. Его

зависимость от угла рассеяния иллюстрирует рис. 2.9. В области малых углов при

$$qr_a = (m_e v r_a / \hbar) \sin(\vartheta/2) \ll 1, \quad \vartheta \ll \hbar / m_e v r_a \approx e^2 / \hbar v \ll 1$$

амплитуда рассеяния (2.72) и сечение не зависят от угла рассеяния и скорости электронов:

$$\sigma = \left( \frac{m_e e^2}{3\hbar^2} \int g r^2 d^3 r \right)^2 = \left( \frac{Z \bar{r}^2}{3r_a} \right)^2. \quad (2.73)$$

Видно, что  $\sigma$  определяется средним квадратом расстояния атомных электронов от ядра  $\bar{r}^2 = (1/Z) \int g r^2 d^3 r$ . В противном случае, при

$$qr_a = (m_e v r_a / \hbar) \sin(\vartheta/2) \gg 1, \quad \vartheta \gg e^2 / \hbar v,$$

$F(q) \ll Z$  и в амплитуде рассеяния существен только первый член, определяющий кулоновское рассеяние электрона в поле ядра  $Ze/r$ .

Слабое влияние экранировки поля атомными электронами связано здесь с глубоким проникновением рассеиваемого электрона внутрь атома. Сечение рассеяния для этого случая в соответствии с (2.72) определяется соотношением (2.62); его можно записать в виде

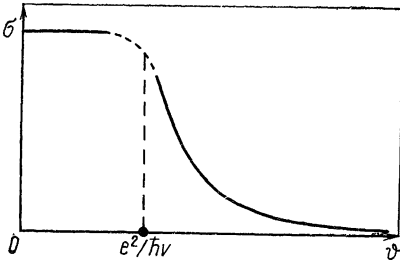


Рис. 2.9

$$\sigma = \left( \frac{Ze^2}{2m_e v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}, \quad (2.74)$$

т. е. оно является быстро убывающей функцией угла рассеяния.

По дифференциальному сечению  $\sigma(\vartheta)$  можно вычислить интегральные характеристики, в частности транспортное сечение  $s^t$  (2.52), определяющее потери импульса и энергии электронов при столкновениях. При больших скоростях электронов, когда применимо приближение Борна ( $K_e > 50 \div 100 \text{ эВ}$ ), с помощью (2.72) — (2.74) можно получить общее выражение для транспортного сечения. Нетрудно убедиться, что основной вклад в него вносит область значений  $\vartheta > e^2 / \hbar v$ , в которой рассеяние определяется кулоновским полем ядра. Учитывая это, аналогично (2.64) получаем

$$\begin{aligned} s^t &= 2\pi \int_{\vartheta_0}^{\pi} \sigma (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= 4\pi \left( \frac{Ze^2}{m_e v^2} \right)^2 \ln \frac{1}{\sin(\vartheta_0/2)}, \end{aligned}$$

и, далее, поскольку  $\vartheta_0 \approx e^2 / \hbar v$ ,

$$s^t = 4\pi \left( \frac{Ze^2}{m_e v^2} \right)^2 \ln \gamma \frac{\hbar v}{e^2}, \quad (2.75)$$

где  $\gamma$  — коэффициент порядка единицы (его точное определение требует учета малых углов  $\vartheta \leq \vartheta_0$  и не может быть выполнено в общем виде). Однако величина  $s^t$  слабо зависит от  $\gamma$ . В соответствии с (2.75) транспортное сечение при больших энергиях электронов уменьшается обратно пропорционально квадрату энергии.

В области малых и средних энергий (при  $K_e < 50-100$  эв) надежные теоретические данные о сечениях, как уже отмечалось, имеются только для простейших атомов — водорода и гелия. Для более сложных атомов обычно используются экспериментальные данные. Они получены в двух группах экспериментов. Наибольшее коли-

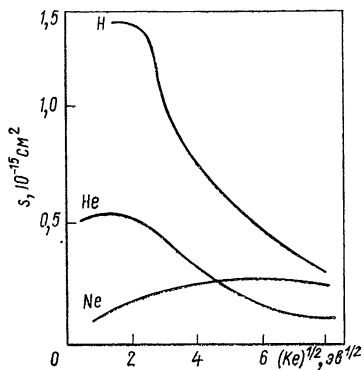


Рис. 2.10

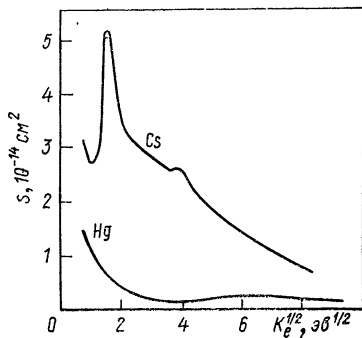


Рис. 2.11

чество сведений получено в опытах с монокинетическими электронными пучками. В этих опытах измерялось, однако, не транспортное сечение, а полное сечение, ограниченное со стороны малых углов:

$$s_{\vartheta} = 2\pi \int_{\vartheta_{\text{мин}}}^{\pi} \sigma \sin \vartheta d\vartheta,$$

причем значение минимального угла  $\vartheta_{\text{мин}}$  нельзя было определить точно. Сечение  $s^t$  отличается от транспортного; судя по данным об угловом распределении, отличие может достигать 30—50%.

Другая группа экспериментов по определению сечений основана на измерениях коэффициентов, определяющих процессы переноса в плазме (коэффициентов подвижности, диффузии, проводимости плазмы). Эти коэффициенты непосредственно связаны с транспортным сечением. Однако точность их определения и в этом случае невелика, так как данные измерений в плазме усреднены по широкому распределению скоростей электронов. Поэтому имеющиеся экспериментальные данные нельзя считать точными; они правильно передают зависимость сечений от скорости, но абсолютные значения определены лишь с точностью до коэффициента порядка единицы. Экспериментальные данные о сечениях столкновений электронов с атомами некоторых газов приведены на рис. 2.10—2.12. Максимальные

значения сечений для разных газов лежат в пределах  $10^{-14}$  —  $10^{-16}$  см<sup>2</sup>. Особенно они велики для атомов щелочных металлов. Общей особенностью кривых зависимости  $s(v)$  для всех газов при не очень малых энергиях является уменьшение сечения с ростом скорости электронов. Оно связано с уменьшением времени взаимодействия частиц  $\Delta t \sim r_a/v$ .

Обращает на себя внимание резкое уменьшение сечения рассеяния при малых энергиях электронов ( $K_e < 1$  эв) для ряда тяжелых атомов, в том числе для атомов тяжелых инертных газов. Это явление называется *эффектом Рамзауэра*. Так же как и немонотонный характер зависимости  $\sigma$  от угла  $\phi$ , он связан с дифракцией электронов на атомах. При малых скоростях, когда наблюдается этот эффект, в разложении волновой функции по полиномам Лежандра обычно существен только первый член с  $l = 0$ , определяющий изотропное рассеяние. Поэтому уменьшение сечения связывают с условиями, при которых сдвиг фазы нулевой гармоники в области взаимодействия отличается на  $\pi$  от сдвига фазы при отсутствии взаимодействия. При этом волновая функция вдали от атома такая же, как и при отсутствии взаимодействия, и, следовательно, амплитуда рассеяния  $f_0$ , соответствующая нулевой гармонике, обращается в нуль. Гармоники с  $l > 0$  дают малый вклад

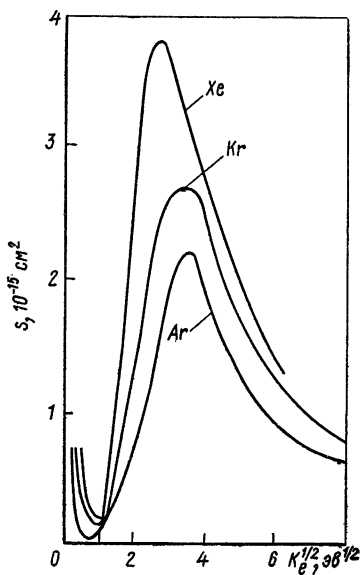


Рис. 2.12

в сечение рассеяния. Это приводит к глубокому минимуму сечения. Аналогичный эффект в принципе должен наблюдаться и при больших скоростях, при которых сдвиг фаз в области взаимодействия равен целому числу  $\pi$ . Однако соответствующие минимумы сглаживаются, поскольку с увеличением скорости возрастает влияние гармоник с  $l > 0$ .

Для кинетического описания движения электронов в плазме удобно аппроксимировать зависимость сечений от скорости электронов простыми соотношениями. Как видно из рис. 2.10—2.12, для разных атомов и молекул и для разных областей энергий электронов аппроксимации могут быть весьма различными. В области малых энергий ( $K_e < 1 \div 3$  эв) сечения для многих атомов можно приближенно считать постоянными (например, для водорода, гелия, азота). При больших энергиях сечение для некоторых из них оказывается убывающей функцией энергии. Например, у водорода и гелия в области энергий  $3 \text{ эв} < K_e < 50 \text{ эв}$  оно убывает приблизительно как

$1/v$ ; в этом случае частота столкновений  $\nu_{ea} = n_a s_{ea} v$  не зависит от скорости (для водорода  $\nu_{ea}/n_a \approx 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ , у гелия  $\nu_{ea}/n_a \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ ). Для некоторых других атомов (например, для азота и неона) сечения в этой области энергий можно считать постоянными. У тяжелых атомов при существенном влиянии эффекта Рамзауэра характер зависимости  $s_{ea}(v)$  изменяется с энергией — она имеет минимум при малых энергиях ( $K_e < 1 \text{ эв}$ ), растет при  $1 \text{ эв} < K_e < 5 \div 15 \text{ эв}$  и падает при больших энергиях. Соответственно для таких атомов использование простых аппроксимаций сечения возможно лишь в небольшом диапазоне энергий.

## § 2.6. Упругие столкновения ионов с атомами

Рассмотрим теперь упругие столкновения ионов с атомами, определяющие обычно кинетику их движения в плазме. Силы взаимодействия иона и атома можно разбить на два вида. При малых прицельных расстояниях происходит «перекрытие» электронных оболочек, приводящее к сильному взаимодействию и рассеянию на большие углы. Силы, связанные с эффектом перекрытия, убывают практически до нуля на расстояниях, сравнимых с размерами атома. Поэтому сечение рассеяния, связанное с таким взаимодействием, должно быть порядка  $\pi r_a^2$ . На расстояниях, превышающих радиус атома, взаимодействие обусловлено поляризацией, оно определяет рассеяние на малые углы.

Механизм поляризации атома ионом в принципе не отличается от механизма поляризации при электрон-атомных столкновениях. Пролетающий ион индуцирует дипольный момент  $d = \alpha_d(e/r^2)$ . Потенциал его взаимодействия с ионом равен  $U = 2 \alpha_d e^2 / r^4$  [см. (2.71)]. Анализ рассеяния ионов под действием этого потенциала легко провести в рамках классической модели (как было показано в § 2.2, для описания упругого рассеяния ионов в широком диапазоне энергий применима классическая механика). Подставляя потенциал поляризационного взаимодействия в (2.29), можно получить выражение для дифференциального сечения рассеяния. При малых углах рассеяния ( $\vartheta \ll 1$ ) оно принимает вид

$$\sigma \approx \frac{0,4}{\vartheta^{2,5}} (\alpha_d e^2 / \mu_{in} v^2)^{1/2}. \quad (2.76)$$

По зависимости  $\sigma(\vartheta)$  можно определить транспортное сечение:

$$s^t \approx 10 (\alpha_d e^2 / \mu_{in} v^2)^{1/2}. \quad (2.77)$$

Оно обратно пропорционально корню квадратному из кинетической энергии относительного движения и при фиксированной энергии зависит только от поляризуемости атома  $\alpha_d = \chi r_a^3$ . По порядку величины поляризационное транспортное сечение равно

$$s^t \sim r_a^2 (\chi \mathcal{G}_a / K)^{1/2},$$

где  $\mathcal{E}_a = m_e e^4 / \hbar^2 \approx 10$  эв. Поскольку значения  $\chi$  лежат в пределах от 1 до 300, то при  $K \ll \mathcal{E}_a$  вклад поляризационного взаимодействия в транспортное сечение намного превышает влияние взаимодействия, связанного с перекрытием электронных оболочек иона и атома. Этот вывод подтверждается тем, что для разных ионов сечения столкновений с одними и теми же атомами приблизительно одинаковы. На рис. 2.13 область, в которой лежат экспериментальные значения сечений разных ионов, заштрихована, и видно, что они различаются не более чем в два раза. Эти данные получены в экспериментах с монокинетическими ионными пучками. Здесь, как и в опытах по рассеянию электронного пучка, определялась величина

$$s_{\theta} = 2\pi \int_{\theta_{\text{мин}}}^{\pi} \sigma \sin \theta d\theta.$$

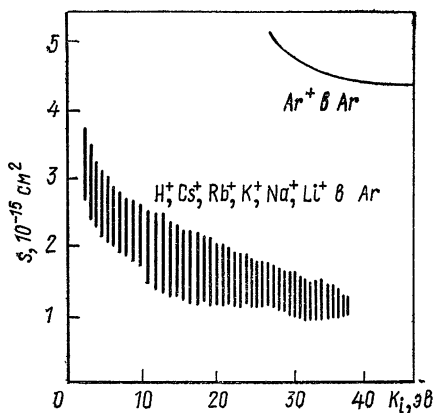


Рис. 2.13

Исследование рассеяния ионов в собственном газе привело к существенно иным результатам (см. рис. 2.13). Сечения такого рассеяния оказались гораздо больше, чем сечения рассеяния других ионов в этом же газе. Такое различие связано с *эффектом перезарядки*, состоящим в обмене электронами между ионом и атомом  $A_1^+ + A_2 \rightarrow A_1 + A_2^+$ .

Перезарядка ионов в собственном газе может происходить, очевидно, без изменения суммы внутренних энергий взаимодействующих частиц — электрон при этом переходит с основного уровня одного атома на основной уровень другого такого же атома. Такой процесс с нулевым «дефектом энергии» называют *резонансной перезарядкой*. Его можно отнести к упругим процессам, так как сумма кинетических энергий не изменяется после такого столкновения.

Механизм резонансной перезарядки можно качественно объяснить следующим образом. При сближении атома и иона высота и ширина потенциального барьера между ними для электрона постепенно уменьшается. На рис. 2.14 схематически изображены радиальные зависимости потенциальной энергии кулоновского поля атомных остатков частиц, находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга (штрихпунктирные линии — для каждой частицы, сплошная линия — суммарная зависимость), и положение энергетического уровня  $\mathcal{E}_0$  основного состояния валентного электрона. Как видно из рис. 2.14, потенциальный барьер достигает максимальной высоты на расстоянии  $r/2$  от каждого атомного остатка. Поэтому максимальное значение потенциала равно  $4 e/r$ . При уменьшении  $r$ , из-за уменьшения ширины и высоты потенциального барьера, резко возрастает вероят-

ность туннельного перехода электрона от атома к иону. В стационарном состоянии вероятность нахождения электрона в любом из атомных остатков равна  $1/2$ . Время установления стационарного состояния быстро падает с уменьшением высоты барьера ( $\mathcal{E}_0 \sim 4e^2/r$ ). При  $r \rightarrow r_0 = 4e^2/\mathcal{E}_0$  высота барьера стремится к нулю, а время

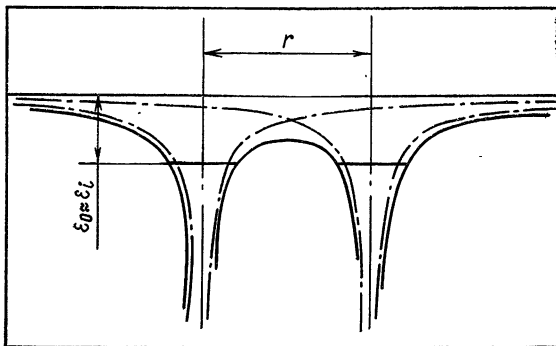


Рис. 2.14

установления стационарного состояния оказывается порядка времени обращения атомных электронов, т. е. много меньше времени взаимодействия между ионом и атомом при малых энергиях ( $K < 1 \text{ кэВ}$ ). Если пренебречь смещением энергетических уровней в атомных остатках вследствие их взаимодействия, то энергию  $\mathcal{E}_0$  можно приравнять энергии ионизации  $\mathcal{E}_i$ . Это дает грубую оценку для сечения перезарядки  $s^c \approx (1/2) \pi r_0^2 = 8 \pi e^4 / \mathcal{E}_i$ . (2.78)

Учет туннельного перехода при расстояниях больших  $r_0$  приводит к некоторому увеличению сечения резонансной перезарядки, однако оценка (2.78) правильно отражает порядок сечения. При не слишком малых энергиях ( $K > 0,1 \text{ эВ}$ ) оно значительно превышает поляризационное сечение (2.77). При больших энергиях ( $K \lesssim 1 \text{ кэВ}$ ) сечение перезарядки падает вследствие уменьшения времени взаимодействия частиц. Некоторые данные о сечениях рассеяния ионов атомами в собственном газе, определяемых резонансной перезарядкой, представлены на рис. 2.15. Здесь точки 1 получены из теоретических расчетов при  $K = 0,1 \text{ эВ}$ ; точки 2, 3 найдены эксперимен-

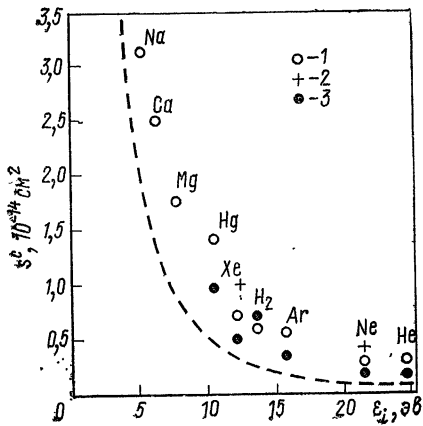


Рис. 2.15

ты. При больших энергиях ( $K \lesssim 1 \text{ кэВ}$ ) сечение перезарядки падает вследствие уменьшения времени взаимодействия частиц. Некоторые данные о сечениях рассеяния ионов атомами в собственном газе, определяемых резонансной перезарядкой, представлены на рис. 2.15. Здесь точки 1 получены из теоретических расчетов при  $K = 0,1 \text{ эВ}$ ; точки 2, 3 найдены эксперимен-



тально при скорости  $v = 10^5$  и  $10^6$  см/сек соответственно; пунктирная кривая рассчитана по приближенной формуле (2.78).

Эффект перезарядки сильно влияет на характер движения положительных ионов в плазме. При отсутствии перезарядки столкновения быстрых ионов с медленными атомами в основном приводят к малому рассеянию, при котором скорость и направление движения ионов изменяются незначительно. При перезарядке быстрая частица (ион) также в основном рассеивается на малые углы. Однако в результате перезарядки эта частица превращается в атом, а медленная частица становится ионом. Поэтому перезарядка оказывается эффективным механизмом обмена энергией между ионами и атомами плазмы. Она приводит к «эстафетному» механизму передачи положительного заряда от частицы к частице в процессе направленного движения ионов под действием электрического поля. Образующийся при перезарядке медленный ион ускоряется электрическим полем до следующего столкновения. После столкновения типа перезарядки он превращается в атом, а образующийся медленный ион снова ускоряется полем. Таким образом, перенос заряда в каждый период между такими столкновениями, соответствующий этапу «эстафеты», осуществляется новыми частицами.

## § 2.7. Неупругие столкновения электронов с атомами

Рассмотрим неупругие столкновения электронов с атомами, приводящие к их возбуждению. Во многих случаях такое взаимодействие является основным каналом потерь энергии электронов в плазме. Возбуждение атомов или атомарных ионов связано с перестройкой их электронных оболочек. Минимальная энергия, необходимая для возбуждения электронных уровней, имеет порядок  $10 \text{ эв}$  (табл. 2.1). Квантовомеханическое вычисление сечений возбуждения электронных состояний наиболее трудно провести в области энергий сталкивающихся электронов, соизмеримых с энергией возбуждения. В этой области энергий надежные вычисления проведены лишь для простых случаев, в частности для атомов водорода, гелия, ще-

Т а б л и ц а 2.1

Энергия возбуждения и ионизации некоторых атомов

Энергия	H	H <sub>2</sub>	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Cs	Hg
$\mathcal{E}_1$	10,2	11,2	21,2	16,7	11,6	10,0	8,5	1,5	4,9
$\mathcal{E}_{1M}$	—	—	19,8	16,5	11,5	9,9	8,3	—	4,6
$\mathcal{E}_i$	13,6	15,4	24,5	21,6	15,8	14,0	12,1	3,9	10,4

Примечание.

$\mathcal{E}_1$  — энергия возбуждения низшего уровня, переход на который из основного состояния разрешен (для H<sub>2</sub> — низшего электронного уровня);  $\mathcal{E}_{1M}$  — энергия возбуждения низшего метастабильного уровня;  $\mathcal{E}_i$  — энергия ионизации из основного состояния.

лочных металлов. Для многих атомов имеются, однако, экспериментальные данные о полных сечениях возбуждения. Зависимость сечения возбуждения уровня  $3s\ 3p^3P$  в гелии от кинетической энергии электронов приведена на рис. 2.16 ( $s^{0j}$ ). Сечение резко нарастает от порога, равного энергии возбуждения  $\mathcal{E}_{0j}$ . Для оптически разрешенных переходов (когда отличен от нуля соответствующий матричный элемент дипольного момента атома) максимум сечения достигается обычно при энергиях  $K = (1,5 \div 3) \mathcal{E}_{0j}$ , причем значения максимальных сечений обычно порядка  $10^{-19} - 10^{-17} \text{ см}^2$ . Уменьшение сечения при больших энергиях обусловлено, так же как и при упругих столкновениях, сокращением времени взаимодействия электрона с атомом. При столкновениях электрона с атомом возможно также возбуждение метастабильных уровней, переходы на которые из основного состояния при оптическом возбуждении запрещены. Оно связано с обменным взаимодействием сталкивающегося электрона с атомным. Поэтому сечение такого перехода имеет заметное значение только вблизи порога возбуждения, когда время пребывания электрона около атома относительно велико, и быстро уменьшается с ростом скорости электрона. Типичная кривая возбуждения метастабильного уровня гелия представлена на рис. 2.17 (1 — кривая для разрешенного уровня  $1s\ 4s^1\ S_0$ , 2 — для метастабильного уровня  $1s\ 2s^2\ S_1$ ).

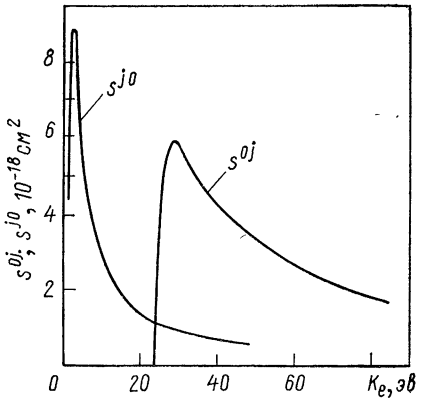


Рис. 2.16

Кривые возбуждения показывают, что максимум сечения возбуждения лежит близко к его порогу. Учитывая это при приближенных расчетах и оценках, часто полагают, что неупругие столкновения приводят к полным потерям энергии электронов. В таких расчетах, как уже отмечалось в § 2.3, эффективность потерь определяется суммарным сечением неупругих процессов  $s^n = \sum_j s^{(j)}$ . Для некоторых газов такие сечения определялись экспериментально (рис. 2.18), по потерям энергии электронов. С погрешностью, не превышающей 10—20%, зависимость  $s^n$  от энергии электронов вблизи порога можно аппроксимировать следующим образом:

$$s^n = \beta (K - \mathcal{E}_{01}).$$

При энергиях электронов, много больших энергии возбуждения, для определения сечения можно использовать приближение Борна,

которое дает следующее выражение для сечения возбуждения уровня:

$$s_{ea}^{0j} = 8 \pi (e^2/\hbar v)^2 |d_{0j}|^2 \ln(\gamma_j v \hbar/e^2), \quad (2.79)$$

где  $d_{0j}$  — матричный элемент дипольного момента перехода;  $\gamma_j$  — коэффициент порядка единицы. Просуммировав сечения по всем возможным переходам, т. е. по всем состояниям  $j$ , и по столкновениям, приводящим к ионизации, получим выражение для суммарного сечения неупругих процессов

$$s_{ea}^n = 8 \pi (e^2/\hbar v)^2 \bar{d}^2 \ln(\bar{\gamma} v \hbar/e^2), \quad (2.80)$$

где  $\bar{d}^2$  — среднее значение квадрата дипольного момента в основном состоянии ( $\bar{d}^2 = \sum_j |d_{0j}|^2$ ).

Из (2.79), (2.80) видно, что сечение неупругих столкновений

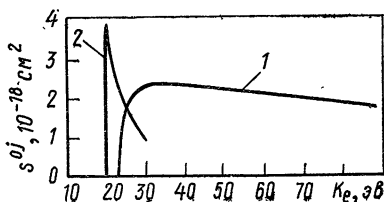


Рис. 2.17

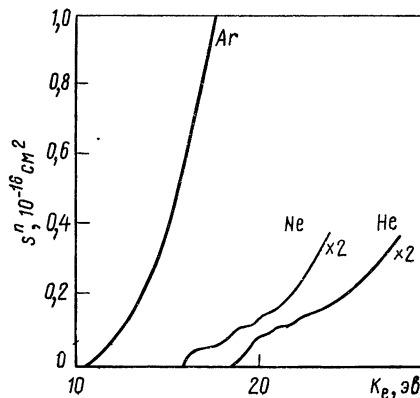


Рис. 2.18

в области применимости приближения Борна обратно пропорционально энергии (с точностью до медленно изменяющегося логарифмического множителя), т. е. убывает с ростом энергии медленнее, чем транспортное сечение упругих столкновений (2.75). Нетрудно убедиться, что по порядку отношение этих сечений равно

$$s_{ea}^n/s_{ea}^t = (\hbar^2 v^2/e^4) \bar{d}^2/Z^2 e^2 r_a^2.$$

Таким образом, при  $v \gg e^2/\hbar$  оно много больше единицы, т. е. роль упругих столкновений электронов с атомами пренебрежимо мала.

При столкновениях электронов в молекулярных газах наряду с процессами возбуждения электронных уровней неупругие столкновения могут приводить к возбуждению колебательных и вращательных уровней молекул. Энергетический зазор между колебательными уровнями составляет  $10^{-2}$  —  $1$  эв, между вращательными —  $10^{-3}$  —  $10^{-1}$  эв. Для медленных электронов потери энергии, связанные с возбуждением этих уровней, могут превосходить потери энергии при упругих столкновениях  $\Delta K = 2 (m_e/m_a) K$ . Поэтому такие неупругие столкновения играют существенную роль в балансе энергий медленных электронов в плазме.

Оценить энергию, передаваемую электроном молекуле при возбуждении вращательных степеней свободы, можно с помощью законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Из их совместного рассмотрения следует, что максимальная передача энергии при  $R < \xi < R\sqrt{m_a/m_e}$  имеет порядок

$$\Delta K/K \approx (m_e/m_a) \xi^2/R^2$$

( $m_a$  — масса молекулы;  $R$  — ее эффективный размер;  $\xi$  — прицельный параметр). Из этой оценки видно, что возбуждение вращательных уровней при малых энергиях электронов связано с далекими столкновениями  $\xi > R$ , при которых достаточно велик начальный момент количества движения электрона  $M \sim m_e v \xi$ . Однако вероятность возбуждения при таких столкновениях мала, поэтому интегральное сечение возбуждения вращательных уровней существенно меньше сечения упругого рассеяния (обычно на один-полтора порядка).

С энергий электронов 0,5—1 эв заметную роль начинают играть столкновения, связанные с возбуждением колебательных степеней свободы молекул. Максимальные значения интегральных сечений (и сечений упругих столкновений) достигаются при энергии 1—3 эв. Их большая эффективность связана с тем, что при взаимодействии электрона с молекулой могут образовываться промежуточные нестабильные связанные состояния (их называют автоионизационными).

Для характеристики влияния процессов возбуждения низколежащих уровней молекул на баланс энергии электронов часто вводят *эффективный коэффициент передачи энергии* электронов при столкновении  $\kappa_{ea}^s$ , определяя его по аналогии с (2.54) с помощью равенства

$$(dK/dt)_{ea} = -\kappa_{ea}^s \nu_{ea}^s K, \quad (2.81)$$

где  $\nu_{ea}^s$  — суммарная частота столкновений, зависящая от суммы транспортного сечения упругих столкновений и суммарного сечения неупругих столкновений электронов. Измерения скорости релаксации энергии медленных электронов в молекулярных газах позволяют получить экспериментальные данные о величине  $\kappa_{ea}^s$ , усредненной по распределению скоростей электронов. Такие данные для водорода (1) и азота (2) представлены на рис. 2.19 (пунктир —  $\kappa_{ea}^{(e)}$  для  $H_2$ ). Видно, что с ростом средней энергии электронов величина  $\kappa_{ea}^s$  увеличивается по сравнению с упругим коэффициентом передачи  $\kappa_{ea}^e = 2 m_e/m_a$ . Это увеличение при температурах  $10^{-2}$  —  $10^{-1}$  эв обусловлено возбуждением вращательных уровней, при  $10^{-1}$  — 1 эв — возбуждением колебательных уровней молекул.

Рассматривавшиеся выше неупругие столкновения электронов приводят к появлению в плазме возбужденных атомов. Концентра-

ция атомов в каждом возбужденном состоянии определяется частотой столкновений, приводящих к возникновению состояния  $\nu^{0j}$  с временем жизни  $\tau_j$ . Из условия равенства скорости образования и разрушения возбужденного состояния нетрудно найти соотношение между концентрациями атомов в нормальном и возбужденном состояниях  $n_0$  и  $n_j$ :

$$\nu^{0j} n_0 = n_j / \tau_j, \quad n_j / n_0 = \nu^{0j} \tau_j. \quad (2.82)$$

Время жизни возбужденного состояния относительно излучения обычно имеет порядок  $10^{-8}$  сек. Однако оно может быть на 5—8 порядков больше для первого возбужденного уровня, когда его переход в основное состояние оптически запрещен. Поэтому концентрация атомов в таком метастабильном состоянии много больше их концентрации в других возбужденных состояниях.

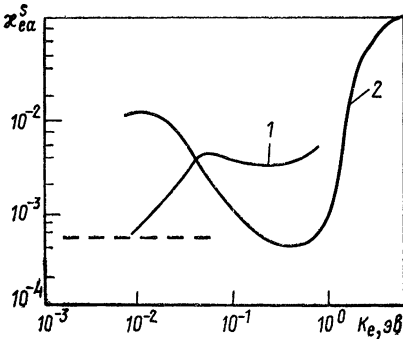


Рис. 2.19

При большой плотности нейтрального газа увеличение концентрации атомов в низшем возбужденном состоянии может быть связано также с эффектом, называемым *диффузией резонансного излучения*. Он вызывается излучением, сопровождающим переход атома из возбужденного состояния в основное. Поскольку энергия излучаемого кванта равна энергии возбуждения, его может поглотить атом в основном состоянии, что вызовет переход атома в возбужденное состояние: сечение такого процесса фотовозбуждения составляет обычно  $10^{-18} - 10^{-16}$  см<sup>2</sup>. Поэтому при размерах системы много больших длины свободного пробега излучения ( $L \gg 1/n_0 s_v$ ) возбужденное состояние будет многократно восстанавливаться в результате поглощения излученного кванта.

При значительных концентрациях возбужденных атомов наряду с неупругими столкновениями, приводящими к возбуждению атомов, определенную роль играют неупругие столкновения второго рода, вызывающие переход атомов из возбужденного состояния в основное и соответственно увеличение энергии электронов. Соотношение между сечением таких столкновений и сечением процессов возбуждения можно найти с помощью принципа детального равновесия.

В квантовой механике принцип детального равновесия вытекает из симметрии процессов рассеяния по отношению к обращению времени (так называемая теорема взаимности). Эта симметрия приводит к равенству модуля амплитуды рассеяния прямых и обратных переходов между двумя состояниями системы сталкивающихся частиц. Для неупругого столкновения электрона с заданной энергией  $K$  и атома, приводящего к возбуждению определенного со-

стояния атома  $e + A^{(0)} \rightleftharpoons A^{(j)} + e$ , обратным является, очевидно, процесс девозбуждения при столкновении этого атома с электроном, имеющим соответственно меньшую энергию ( $K' = K - \mathcal{E}_{0j}$ ). Равенство амплитуд рассеяния для таких столкновений приводит к следующему соотношению между сечениями прямого и обратного процессов:

$$g_0 v_{e0}^2 s^{0j}(v_{e0}) = g_j v_{ej}^2 s^{j0}(v_{ej}), \quad (2.83)$$

где  $s^{0j}$  — сечение возбуждения уровня  $j$ ;  $s^{j0}$  — сечение девозбуждения при столкновении;  $g_0$  и  $g_j$  — статистические веса уровней, определяющие число вырожденных состояний в каждом из состояний; скорости  $v_{e0}$  и  $v_{ej}$  связаны друг с другом законом сохранения энергии:  $v_{ej}^2 + v_{e0}^2 = 2\mathcal{E}_{0j}/m_e$ . Выражение (2.83) и представляет собой запись принципа детального равновесия для рассматриваемых прямого и обратного процессов\*.

Принцип детального равновесия позволяет найти сечения неупругих столкновений второго рода, сопровождающихся снятием возбуждения, если известны сечения процессов возбуждения. Из него следует, что при  $K_e \gg \mathcal{E}_{0j}$  сечения обоих процессов имеют одинаковый порядок, поэтому столкновения второго рода могут играть заметную роль, лишь если плотность возбужденных атомов близка к плотности атомов в основном состоянии. Сечение столкновений второго рода, сопровождающихся девозбуждением, максимально при энергиях, меньших энергии возбуждения (см. рис. 2.16, кривая  $s^{j0}$ ). В этой области энергий невозможны столкновения, сопровождающиеся возбуждением и столкновения второго рода могут играть определенную роль даже при относительно малых плотностях возбужденных атомов.

## § 2.8. Ионизация при столкновениях электронов с атомами

Ионизация атомов при их столкновениях с электронами — обычно основной источник возникновения заряженных частиц в плазме. Процесс ионизации можно записать с помощью равенства  $e + A \rightarrow A^+ + e + e'$ . Для ионизации энергия электрона должна превышать энергию связи одного из внешних (валентных) электронов в атоме — энергию ионизации. Значения энергии ионизации  $\mathcal{E}_i$  для некоторых атомов см. в табл. 2.1. Скорость образования заряженных частиц в результате процесса ионизации в плазме определяется полным сечением процесса  $s^i(v)$  или частотой ионизации  $\nu^i(v)$ . В соответствии с (2.47) для  $(\partial n/\partial t)_i$  имеем

$$\left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_i = n_e n_a \langle \nu s_{ea}^i(v) \rangle = k_{ea}^i n_e n_a = \langle \nu_{ea}^i \rangle n_e, \quad (2.84)$$

\* Иногда под принципом детального равновесия понимают соотношения типа (2.83), усредненные по максвелловскому распределению скоростей частиц. Такие соотношения можно получить из рассмотрения прямых и обратных переходов в условиях термодинамического равновесия.

где введена так называемая константа процесса  $k^i = \langle v^i(v) \rangle$ ; усреднение проводится по скоростям электронов, энергия которых достаточна для ионизации ( $mv^2/2 > \mathcal{E}_i$ ).

Квантовомеханическое решение задачи об ионизации при столкновении электрона с атомом позволяет в принципе определить сечение ионизации, найти распределение электронов, образующихся в процессе ионизации, по скоростям и углам рассеяния. Как и для других типов столкновений, полное решение удалось получить лишь для простейших атомов. Простая оценка сечения ионизации может быть получена из классической теории Томсона. Она основана на модели, в которой при рассмотрении обмена энергией между ионизирующим и атомным электроном последний предполагается свободным. Это предположение позволяет использовать формулу Резерфорда (2.62) для дифференциального сечения рассеяния  $\sigma(\vartheta)$ . Связь передаваемой энергии с углом рассеяния, учитывая (2.19), можно записать в виде

$$\Delta K = (1/2) (1 - \cos \vartheta) K = K \sin^2 (\vartheta/2).$$

Полагая, что ионизация атома, сопровождающаяся вырыванием электрона с внешней оболочки, происходит при передаче ему энергии, превышающей энергию ионизации, т. е. при  $\Delta K > \mathcal{E}_i$ ,  $\sin^2 (\vartheta/2) > \mathcal{E}_i/K$ , получаем с помощью формулы (2.62) сечение ионизации в модели Томсона:

$$\begin{aligned} s^i &= 2\pi Z_w \int_{\vartheta_{\text{мин}}}^{\pi} \sigma \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= 2\pi Z_w \left( \frac{e^2}{m_e v_0} \right)^2 \int_{\vartheta_{\text{мин}}}^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sin^4 (\vartheta/2)}, \end{aligned}$$

и после интегрирования

$$s^i = Z_w (\pi e^4 / K) (1/\mathcal{E}_i - 1/K) \quad (2.85)$$

и при  $K > \mathcal{E}_i$   $s^i \approx Z_w \pi e^4 / \mathcal{E}_i^2 (K - \mathcal{E}_i)$ , где  $Z_w$  — число электронов во внешней оболочке. Эта формула дает правильный порядок сечения ионизации.

Экспериментальные данные о сечении ионизации получены для многих газов. Типичные экспериментальные зависимости  $s^i(K)$  представлены на рис. 2.20. Вблизи порога зависимость  $s^i(K)$  обычно может считаться линейной:

$$s^i = b_i (K - \mathcal{E}_i) = \beta_i \frac{\pi e^4}{\mathcal{E}_i^2} (K - \mathcal{E}_i). \quad (2.86)$$

Максимального значения  $s^i$  достигает при  $K = (3 \div 5)\mathcal{E}_i$ ; оно имеет следующий порядок:  $(s^i)_{\text{макс}} \approx \rho_i \pi e^4 / \mathcal{E}_i^2 = 10^{-17} \div 5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ .

В довольно широкой области энергий сечение ионизации, приводящее к освобождению электрона с внешней оболочки атома, мож-

но аппроксимировать формулой

$$s^i = Z_w \frac{10\mathcal{E}_i (K - \mathcal{E}_i)}{K (K + 8\mathcal{E}_i)}. \quad (2.87)$$

Погрешность такой аппроксимации для атомов и ионов, у которых все электроны находятся в одинаковом состоянии, в области энергий меньших  $1 \text{ кэВ}$  не выше  $20\%$ .

При больших энергиях  $K \gg \mathcal{E}_i$  для определения сечения ионизации можно использовать приближение Борна. В этом приближении получаем следующее выражение для сечения ионизации:

$$s^i(k) = \frac{2\pi e^4}{m_e v^2} \frac{\zeta_i Z_w}{\mathcal{E}_i} \ln \gamma_i \frac{m_e v^2}{2\mathcal{E}_i} = \frac{\pi e^4}{K} \frac{\zeta_i Z_w}{\mathcal{E}_i} \ln \gamma_i \frac{K}{\mathcal{E}_i}, \quad (2.88)$$

где  $\zeta_i, \gamma_i$  — численные множители (для водорода, например,  $\zeta_i = 0,28, \gamma_i = 0,2$ ). Отличие этого выражения от формулы Томсона (2.85) при больших энергиях определяется логарифмическим множителем, несколько изменяющим зависимость  $s_i$  от  $K$ . Нетрудно убедиться, что в области применимости приближения Борна выражения для сечения ионизации (2.88) и для полного сечения неупругих столкновений (2.80) имеют практически одинаковую зависимость от энергии и одинаковый порядок величины. Их отношение, определяющее долю процессов ионизации среди неупругих столкновений, равно обычно  $0,2-0,5$  (для водорода, например,  $s^i/s^n = 0,31$ ).

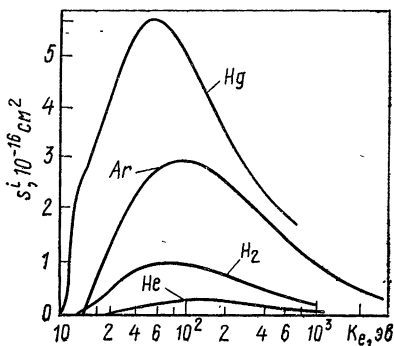


Рис. 2.20

Отметим, что при столкновении электронов со сложными атомами, кроме ионизации, сопровождающейся отрывом одного электрона, возможна так называемая *многократная ионизация*, приводящая к одновременному отрыву двух или нескольких электронов и к образованию многозарядного иона. При энергиях электрона, много больших энергии ионизации, вероятность такого процесса можно оценить в предположении независимого взаимодействия ионизирующего электрона с атомными; при  $K > \mathcal{E}_i$  она сопоставима с вероятностью однократной ионизации.

Наряду с прямой ионизацией атомов при столкновении их с электронами может быть существенной *ступенчатая ионизация*, происходящая в два этапа: первый — возбуждение атома, второй — ионизация атома, находящегося в возбужденном состоянии. Запишем схему этого процесса:  $e + A \rightarrow A^* + e$ ;  $e + A^* \rightarrow A^+ + e + e'$  (здесь  $A^*$  обозначает возбужденный атом). Эффективность ступенчатой ионизации определяется сечениями обеих реакций и временем жизни возбужденных атомов. Скорость образования заряженных



частиц в результате ионизации атома, находившегося в возбужденном состоянии  $j$ , равна

$$(\partial n / \partial t)_{i(j)} = n_e n_a^{(j)} \langle v s^{i(j)}(v) \rangle, \quad (2.89)$$

где  $n_a^{(j)}$  — концентрация возбужденных атомов в состоянии  $j$ ;  $s^{i(j)}$  — сечение ионизации из этого состояния; величина  $\langle v s^{i(j)} \rangle$  усреднена по скоростям электронов, энергия которых достаточна для ионизации. Концентрация возбужденных атомов, образующихся при столкновениях электронов с атомами в нормальном состоянии, удовлетворяет в стационарном случае соотношению (2.82). Подставляя его в (2.89) и суммируя по состояниям  $j$ , получаем выражение для скорости ступенчатой ионизации

$$\left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_{is} = n_a n_e^2 \sum_j \frac{\langle v s^{0j} \rangle}{\tau_j} \langle v s^{i(j)} \rangle = k^{is} n_a n_e^2. \quad (2.90)$$

Величину  $k^{is}$ , определяющую эту скорость, называют *константой ступенчатой ионизации*.

Для условий, когда время жизни возбужденных состояний не зависит от  $n_e$  и  $n_a$  (когда оно определяется излучением), константа  $k^{is}$  зависит только от электронной температуры. Она, очевидно, сильно возрастает при наличии метастабильных состояний с большим временем жизни, или состояний, поддерживающихся в результате диффузии резонансного излучения (см. § 2.7). Соотношение между скоростью ступенчатой ионизации и скоростью прямой ионизации (2.84) определяется концентрацией и температурой электронов:

$$\left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_{is} / \left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_i = \frac{k^{is}}{k^i} n_e.$$

При низких электронных температурах ( $T_e \ll \mathcal{E}_i$ ) число электронов, имеющих достаточную энергию для прямой ионизации, гораздо меньше числа электронов, энергия которых достаточна для ионизации из возбужденного состояния; при максвелловском распределении их отношение порядка  $\exp [ - (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_i^{(j)}) / T_e ]$ . Соответственно отношение  $k^{is}/k^i$  быстро увеличивается с уменьшением электронной температуры (при  $T_e \ll \mathcal{E}_i$ ), и при достаточно малых  $T_e$  и больших  $n_e$  эффективность ступенчатой ионизации становится больше эффективности прямой ионизации.

## § 2.9. Неупругие столкновения ионов с атомами

При столкновениях ионов с атомами могут происходить различные неупругие процессы, связанные с изменением внутреннего состояния сталкивающихся частиц и с их ионизацией. Как следует из законов сохранения (см. § 2.1), изменение внутренней энергии компенсируется при таких столкновениях изменением кинетической энергии относительного движения. В частности, процессы возбуждения некоторого состояния возможны, если энергия относительного

движения превосходит энергию возбуждения. При одинаковой массе иона и атома это условие приводит к неравенству  $\mu_{in}v^2/2 = m_i v^2/4 > \mathcal{E}_{0j}$ , или при  $v_i \ll v_n$   $K_i > 2\mathcal{E}_{0j}$ .

Однако вблизи порога сечение возбуждения атома очень мало. Оно сравнимо с сечением возбуждения электронами лишь при энергиях на три-четыре порядка больших пороговой. Причина низкой эффективности неупругих столкновений ионов при малых энергиях связана с тем, что их скорость много меньше скорости электронов атома (вблизи порога  $v_i/v_{ae} \approx \sqrt{m_e/m_i}$ ). При таких энергиях влияние электрического поля иона на атом почти квазистационарно. Медленное сближение частиц приводит к адиабатическому смещению и расщеплению энергетических уровней электронов в атоме под действием поля иона, как это происходит при эффекте Штарка. По мере удаления иона уровни вновь возвращаются в невозмущенное состояние. Вероятность изменения внутреннего состояния атома, связанная с нарушением адиабатичности, при таком медленном движении иона мала. Разумеется, при анализе столкновений сложных ионов с атомами необходимо учитывать не только влияние поля иона, но и взаимодействие, связанное с перекрытием электронных оболочек. Однако и его влияние на неупругие процессы уменьшается при малых скоростях.

Количественную оценку условий, при которых возбуждение эффективно, можно получить из следующих соображений. Переход атома из состояния с энергией  $\mathcal{E}_0$  в состояние с энергией  $\mathcal{E}_j$  можно рассматривать как возбуждение некоторого осциллятора с частотой  $\omega_{0j} = (\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_0)/\hbar = \mathcal{E}_{0j}/\hbar$ . Потенциал взаимодействия частиц, движущихся с относительной скоростью  $v$ , можно представить в виде интеграла Фурье

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Вероятность возбуждения осциллятора пропорциональна спектральной плотности вблизи  $\omega = \omega_{0j}$ . Величина  $g(\omega_{0j})$  близка к максимуму, если время взаимодействия  $\tau \sim r_a/v$  порядка  $1/\omega_{0j}$ , поэтому сечение максимально при скоростях

$$v_0 \sim r_a \omega_{0j} = (\mathcal{E}_{0j}/\hbar) r_a \quad (2.91)$$

или при энергиях  $K_0 \approx \mu v_0^2/2 \approx \mu r_a^2 \mathcal{E}_{0j}^2/2\hbar^2$  (так называемый *критерий Мессу*). Заметим, что эта оценка соответствует соотношению неопределенностей для энергии. Вероятность перехода из состояния 0 в  $j$  велика, если вследствие конечного времени взаимодействия  $\tau$  неопределенность энергетического состояния взаимодействующих частиц  $\delta\mathcal{E} \approx \hbar/\tau$  порядка  $\mathcal{E}_{0j}$ .

Равенство (2.91) определяет таким образом область скоростей, в которой сечение неупругого возбуждения атома максимально. Для радиуса взаимодействия порядка атомных размеров  $r_a \approx \hbar^2/m_e e^2$  она соответствует скоростям порядка скорости атомных электронов

$v_{ea} \approx e^2/\hbar \approx 10^8$  см/сек. Поэтому при столкновениях электронов с атомами критерий эффективного возбуждения выполняется уже вблизи порога (при  $K_e \approx 10$  эв.) При столкновениях ионов с атомами тем же скоростям соответствуют значительно большие энергии  $K_i \approx (m_i/m_e) e^4/\hbar^2$ . Даже для самых легких ионов водорода (протонов) они имеют порядок 10 кэв.

Аналогично оценивается оптимальная энергия для других типов неупругих столкновений ионов с атомами, а также других атомных частиц (ионов с ионами, атомов с атомами). В частности, это относится к процессам ионизации и нерезонансной перезарядки при столкновениях ионов с атомами. Оптимальные энергии для этих процес-

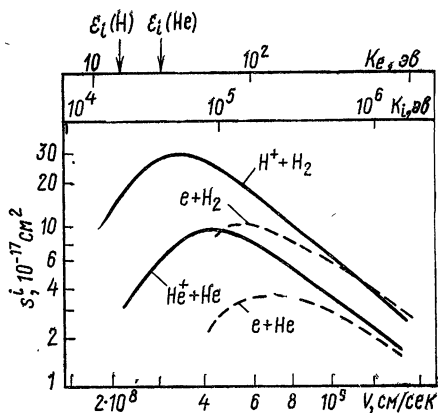


Рис. 2.21

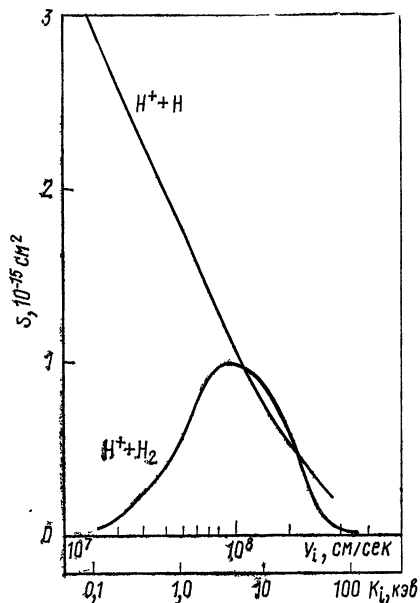
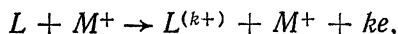


Рис. 2.22

сов можно определить с помощью критерия Мессе, подставляя в (2.91) соответственно энергию ионизации  $\mathcal{E}_i$  и дефект энергий при перезарядке  $\Delta\mathcal{E}$ . Экспериментальные зависимости сечений ионизации атомов водорода и гелия от скорости представлены на рис. 2.21. По оси абсцисс наряду со скоростью отложены кинетические энергии электронов и ионов. Из кривых видно, что максимумы сечений ионизации ионами находятся в области скоростей  $(3 \div 4) 10^8$  см/сек, близких к скоростям атомных электронов. При больших скоростях значения сечений ионизации при столкновениях электронов и ионов практически совпадают. Различие кривых резонансной и нерезонансной перезарядки в водороде иллюстрируется рис. 2.22. Видно, что сечение резонансной перезарядки монотонно убывает с ростом энергии электронов, в то время как сечение нерезонансной перезарядки имеет максимум при  $K_i \approx 10$  кэв.

Отметим, что при столкновениях сложных ионов большой энергии с атомами могут происходить и более сложные неупругие про-

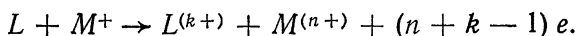
цессы. Это процессы многократной ионизации



процессы дальнейшей ионизации ионов (так называемой *обдирки*)



и комбинированные процессы ионизации атомов и ионов



При энергиях ионов порядка 10—100 кэв и больше сечения этих процессов сопоставимы с сечением однократной ионизации.

Таким образом, основные неупругие процессы при столкновениях атомных частиц (ионов и атомов) существенны лишь при энергиях порядка 1 кэв и больше. Эти энергии характерны для высокотемпературной термоядерной плазмы. В газоразрядной плазме средние энергии ионов и атомов обычно не превышают 10 эв. При данных энергиях неупругие столкновения рассматривавшегося типа не могут играть сколько-нибудь заметной роли. Существенными в такой плазме могут быть только упругие столкновения ионов и атомов и неупругие столкновения с очень малым дефектом энергии ( $\Delta\mathcal{E} < 1$  эв). Такие резонансные (или, точнее, почти резонансные) процессы возможны обычно в смесях газов. В качестве примера укажем на эффект Пеннинга, обнаруженный в смеси аргона и неона. Метастабильный уровень возбуждения неона имеет потенциал возбуждения  $\mathcal{E}_{0i} = 16,5$  эв, близкий к потенциалу ионизации аргона в основном состоянии ( $\mathcal{E}_i = 15,8$  эв). Поэтому при столкновении атома неона в метастабильном состоянии с атомом аргона возможен почти резонансный процесс ионизации аргона  $Ar + Ne^* \rightarrow Ne + Ar^+ + e$ . Дефект энергии такого процесса всего 0,7 эв, и его сечение даже при малых энергиях атомов порядка атомного. В связи с этим даже малая добавка аргона к неону приводит к резкому увеличению эффективности ионизации неона и облегчает возникновение разряда. Аналогичный эффект может наблюдаться и в других смесях.

## § 2.10. Рекомбинация при столкновениях электронов с ионами

При столкновениях электронов с ионами может происходить их рекомбинация — образование нейтрального атома в результате захвата электрона ионом. Эффективность процессов, приводящих к рекомбинации, значительна при малых энергиях электронов, при которых достаточно велико время взаимодействия электрона с ионом. Соответственно при малых электронных температурах (много меньших энергии ионизации) эти процессы сильно влияют на баланс заряженных частиц плазмы. Скорость устранения заряженных частиц, связанного с рекомбинацией в объеме, может быть определена с помощью полного сечения рекомбинации  $s_{ei}^r$ . В соответствии с об-

щим определением сечения [см. (2.47)] запишем

$$(\partial n / \partial t)_r = - n_e n_i \langle s_{ei}^f(v) v \rangle = - n^2 \langle v s^r(v) \rangle, \quad (2.92)$$

где положили  $n_e = n_i = n$ ; относительную скорость  $v$  при столкновениях электронов с ионами обычно можно считать равной скорости электронов; величина  $\langle v s^r(v) \rangle$  усреднена по скоростям. Как правило, для характеристики процесса рекомбинации в плазме вводят коэффициент рекомбинации  $\alpha$ , полагая

$$(\partial n / \partial t)_r = - \alpha n^2, \quad \alpha = \langle v s^r(v) \rangle. \quad (2.93)$$

Он определяется сечением рекомбинации и зависит от распределения электронов по скоростям, а при заданном распределении — от электронной температуры.

Процесс рекомбинации можно записать в виде реакции  $e + L^+ \rightarrow L$ . Нетрудно убедиться, что при отсутствии третьих тел он не происходит. Действительно, в реакциях с образованием одной частицы не могут быть одновременно удовлетворены законы сохранения энергии и импульса. Эти законы представляют собой четыре уравнения (три проекции закона сохранения импульса и закон сохранения энергии), тогда как образующаяся частица имеет три компоненты скорости. Поэтому, чтобы отобрать «лишний» импульс или «лишнюю» энергию, в процессах рекомбинации должно участвовать третье тело. Таким третьим телом могут быть электроны, ионы, нейтральные частицы, образующиеся в результате рекомбинации фотоны. Соответственно могут происходить следующие процессы рекомбинации электронов и ионов:

- 1)  $e + L^+ + e \rightarrow L + e$ ,
- 2)  $e + L^+ + M^+ \rightarrow L + M^+$ ,
- 3)  $e + L^+ + M \rightarrow L + M$ ,
- 4)  $e + L^+ \rightarrow L + h\nu$ .

При оценке вероятности этих процессов необходимо учитывать, что каждая реакция рекомбинации является обратной по отношению к соответствующему процессу ионизации. Поэтому можно использовать принцип детального равновесия, по которому вероятность прямого процесса пропорциональна вероятности обратного (см. § 2.7). В соответствии с этим можно сравнить первые три процесса. В § 2.9 было показано, что для энергий ионов и атомов, обычно встречающихся в плазме ( $K_i, K_a \ll 10$  кэВ), вероятность ионизации под действием тяжелых частиц много меньше, чем под действием электронов. Поэтому вероятность процесса рекомбинации (2) с ионом в качестве третьего тела всегда пренебрежимо мала по сравнению с двухэлектронным процессом рекомбинации (1). Рекомбинация же с нейтральным третьим телом (3) существенна лишь при очень низких степенях ионизации плазмы.

Рекомбинация, в которой участвуют два электрона и ион (ее иногда называют *ударной*) играет определяющую роль при высоких концентрациях заряженных частиц. Такая рекомбинация эффективна для медленных электронов, длительное время находящихся в поле иона. Процесс рекомбинации при этом состоит из двух этапов. Первым является захват электрона на далекую орбиту в поле иона. Такой захват связан с обменом энергией между электронами, в результате которого траектория одного из них из гиперболической превращается в эллиптическую (рис. 2.23). Захват происходит на орбиту, вблизи которой потенциальная энергия взаимодействия электрона с ионом порядка энергии, передаваемой при взаимодействии электронов, т. е. порядка их средней энергии  $e^2/r_s \approx T_e$ ,  $r_s \approx e^2/T_e$  (соответствующее расстояние  $r_s$  есть средний радиус сильного взаимодействия [см. (2.61)]. При  $T_e \ll \mathcal{E}_i$  эта орбита соответствует высоковозбужденному состоянию атома.

Вторым этапом рекомбинации является переход электрона из высоковозбужденного состояния на более низколежащие уровни в результате столкновений или излучения. Оценку коэффициента рекомбинации при столкновении двух электронов и иона можно сделать по сечению, определяющему вероятность такого столкновения в области с размерами порядка  $r_s$ . Оно равно, очевидно, сечению столкновения двух частиц (порядка  $\pi r_s^2$ ), умноженному на вероятность нахождения в этой области третьей частицы (порядка  $\pi r_s^3 n$ ):

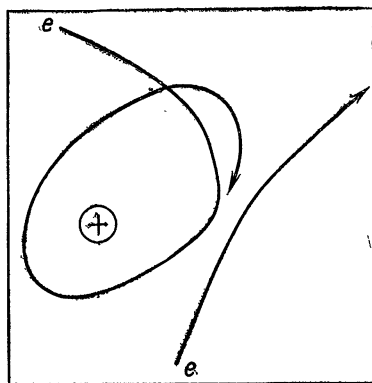


Рис. 2.23

Порядок значения коэффициента рекомбинации определяется произведением этого сечения на среднюю скорость электронов  $v_{T_e} \approx \sqrt{T_e/m_e}$ . Соответственно выражение для коэффициента рекомбинации можно записать в виде

$$s \approx \pi^2 n r_s^5 = \pi^2 n e^{10} / T_e^5.$$

$$\alpha = a \frac{e^{10}}{\sqrt{m_e}} \frac{n}{T_e^{4,5}} \approx 10^{-25} \frac{n}{T_e^{4,5}}, \quad (2.94)$$

где  $a$  — коэффициент порядка единицы. При численной оценке  $\alpha$  дан в  $см^3 \cdot сек^{-1}$ ,  $T_e$  — в эв,  $n$  — в  $см^3$ . Коэффициент  $a$  учитывает, в частности, эффективность второго этапа рекомбинации, определяющуюся соотношением между вероятностью перехода атома после захвата электрона из сильновозбужденного состояния в основное состояние и вероятностью его ионизации.

С уменьшением концентрации электронов и ростом электронной температуры коэффициент ударной рекомбинации с участием двух электронов падает. При этом все большую роль играет *радиационная рекомбинация*. Для оценки ее эффективности можно воспользоваться результатами квантовомеханического рассмотрения процесса фотоионизации, обратного по отношению к радиационной рекомбинации. В соответствии с этим рассмотрением сечение фотоионизации резко нарастает вблизи порога (при  $\hbar\nu \gtrsim \mathcal{E}_i$ ) до величины  $s_{vn}^i \approx (e^2/\hbar c) r_a^2$ , отличающейся от атомного сечения коэффициентом

порядка постоянной тонкой структуры ( $\alpha_R = e^2/\hbar c = 1/137$ ). При дальнейшем увеличении энергии фотона сечение фотоионизации падает. Связь между сечениями радиационной рекомбинации и фотоионизации находим с помощью принципа детального равновесия из соотношения, аналогичного (2.83):

$$m_e^2 v^2 s_{ei}^r \approx p_v^2 s_{vn}^i \approx (\mathcal{E}_v^2/c^2) s_{vn}^i,$$

где  $p_v = \mathcal{E}_v/c$  — импульс фотона. Эта связь при энергиях электрона, много меньших потенциала ионизации, когда

$\mathcal{E}_v \approx \mathcal{E}_i$ , приводит к следующей оценке среднего сечения:

$$\overline{s^r} \approx \frac{e^2}{\hbar c^2} \frac{r_a^2 \mathcal{E}_i^2}{m_e^2 v^2} \approx \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 r_a^2 \frac{\mathcal{E}_i}{T_e}.$$

Отсюда находим порядок коэффициента рекомбинации

$$\alpha \approx a^1 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 r_a^2 \frac{\mathcal{E}_i}{\sqrt{m_e T_e}} \approx \frac{10^{-13}}{\sqrt{T_e}} \quad (2.95)$$

( $\alpha$  дан в  $\text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $T_e$  — в эв). При  $T_e \gtrsim \mathcal{E}_i$  уменьшение коэффициента рекомбинации с ростом температуры электронов более сильное.

Ударную рекомбинацию с участием двух электронов и радиационную рекомбинацию можно рассматривать как крайние случаи общего процесса, называемого иногда *ударно-радиационной рекомбинацией*. При детальном рассмотрении его должны учитываться как возможность участия одного или нескольких дополнительных электронов, так и возможность излучения при захвате электрона ионом и переходе образующегося при захвате возбужденного атома в основное состояние. Результаты такого рассмотрения даны на рис. 2.24, где представлена зависимость коэффициента ударно-радиационной

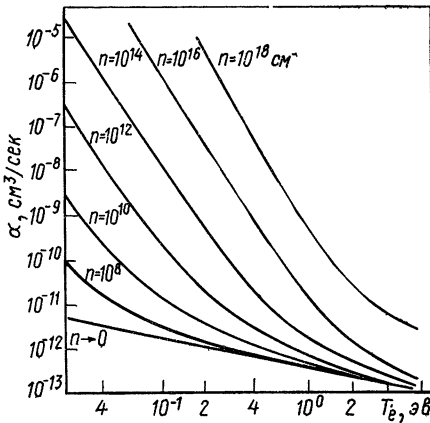


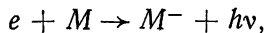
Рис. 2.24

рекомбинации в водороде от концентрации и температуры электронов.

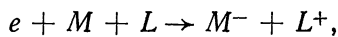
При наличии в плазме молекулярных ионов может оказаться наиболее эффективной рекомбинация, сопровождаемая диссоциацией иона  $e + (ML)^+ \rightarrow M + L$ ; ее называют *диссоциативной*. Этот механизм не требует тройного столкновения, третье тело образуется в процессе рекомбинации. Поэтому вероятность такой рекомбинации значительно больше вероятности рекомбинации при тройных столкновениях. При энергии электрона порядка энергии диссоциации сечение диссоциативной рекомбинации имеет порядок эффективного сечения молекулярного иона. С уменьшением энергии сечение растет. Типичные значения коэффициента диссоциативной рекомбинации при  $T_e < 1$  эВ лежат в диапазоне  $\alpha \approx (10^{-8} \div 10^{-10})/T_e^{3/2}$  ( $\alpha$  дан в  $\text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $T_e$  в эВ).

При оценке эффективности диссоциативной рекомбинации необходимо учитывать, что молекулярные ионы образуются не только в молекулярных газах. При не очень малых давлениях они формируются и в атомарных газах (даже в инертных газах) в результате столкновений атомарных ионов с атомами нейтрального газа  $L^+ + 2L \rightarrow L_2^+ + L$ . Поскольку сам процесс диссоциативной рекомбинации в атомарных газах обычно более эффективен, чем процесс образования молекулярных ионов, скорость рекомбинации определяется эффективностью последнего процесса.

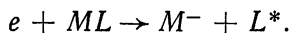
В так называемых *электроотрицательных газах*, атомы которых могут образовывать устойчивые отрицательные ионы, помимо рассмотренных процессов возможна двухступенчатая рекомбинация. На первой стадии происходит *захват электрона* нейтральным атомом или молекулой с образованием отрицательного иона. Вторая стадия состоит в рекомбинации положительного и отрицательного ионов. Значительной эффективностью захвата электрона характеризуется большинство химически активных молекул (например,  $O_2$ ,  $Cl_2$ ,  $H_2O$ ), многие органические соединения. Процесс захвата электрона может идти несколькими путями, в частности: с излучением



при тройном столкновении



в результате диссоциации молекулы



Наиболее эффективна последняя реакция, не требующая участия третьей частицы.

Процесс рекомбинации положительных и отрицательных ионов  $L^+ + M^- \rightarrow L + M$  также не требует присутствия третьей частицы. Вследствие больших размеров отрицательных ионов и малых



скоростей их относительного движения сечения рекомбинации положительных и отрицательных ионов могут на один-два порядка превышать атомное сечение. Эффективность процесса ион-ионной рекомбинации существенно возрастает с повышением давления нейтрального газа. При этом в результате столкновения ионов с нейтральным атомом один из ионов может быть захвачен на орбиту в поле другого. В такой квазимолекуле появляется большая вероятность туннельного перехода электрона от отрицательного иона к положительному, завершающего процесс рекомбинации. Обычно поперечное сечение ион-ионной рекомбинации значительно превышает сечение захвата электронов нейтральными атомами. Поэтому эффективность двухступенчатой рекомбинации определяется более медленным процессом захвата электронов.

### § 2.11. Взаимодействие заряженных частиц с поверхностью твердых тел

В реальных условиях плазма обычно соприкасается с различными твердыми телами: она окружена стенками баллона, в нее помещены электроды и т. д. Поэтому важен вопрос о том, что происходит с заряженными частицами, когда они попадают на поверхности этих тел (для краткости будем называть их стенками). Процессы взаимодействия частиц с поверхностью твердых тел весьма многообразны. Ниже будут упомянуты только те из них, которые могут существенно влиять на состояние плазмы.

Прежде всего стенка играет значительную роль в балансе частиц плазмы. Твердые поверхности могут служить источником заряженных частиц (*термоэлектронная, вторичная, авто- и фотоэмиссия*), но на стенке велика эффективность рекомбинации электронов и ионов, попадающих на нее из объема плазмы. Это обусловлено тем, что стенка является идеальным третьим телом, так как обладает практически бесконечной массой и непрерывным спектром изменения внутренней энергии (температуры). Кроме того, нейтрализация ионов и поглощение электронов могут быть в ней разделены во времени и в случае металлической стенки — в пространстве.

Бомбардировка стенок частицами приводит также к изменению состава плазмы за счет выбивания частиц материала стенки в виде атомов и ионов (так называемое *катодное распыление*). Кроме того, внедрение ионов в стенку ведет к «жестчению» газа в процессе разряда (уменьшению общего давления тяжелых частиц). Наконец, для баланса энергии плазмы важно, насколько изменяется энергия частиц при их отражении от стенок, а также с какой энергией поступают в плазму частицы, эмиттируемые стенкой.

Рассмотрим процессы, сопровождающие падение электронов на стенку. При малых энергиях основными являются упругое отражение и поглощение. В области больших энергий преобладающим процессом становится так называемая *вторичная электронная эмиссия* — «выбивание» электронов из стенки падающими электронами,

Эти вторичные электроны обладают энергией порядка единиц электронвольт. Кроме того, наблюдается также неупругое отражение первичных электронов.

Эффективность отражения зависит от материала стенки, состояния (чистоты) поверхности и энергии падающих электронов. Наибольшего значения (0,1—0,4 для металлов и 0,5—0,8 для диэлектриков) коэффициент упругого отражения (отношение числа отраженных частиц к числу падающих) достигает при энергиях 3—20 эв. С увеличением энергии его значение падает. Коэффициент неупругого отражения для любых материалов не превышает 0,5, он существен при энергиях порядка сотен электронвольт.

Потери энергии электронов при отражении можно связать с междузонными переходами электронов вещества и возбуждением собственных коллективных колебаний электронного газа как целого — все это дает *дискретные*, или так называемые *характеристические, потери*. Кроме того, происходит постепенное торможение первичного электрона при взаимодействии с электронами проводимости (кулоновское расстояние). Если импульс такого электрона меняет ся на обратный, то он может снова вернуться в плазму, потеряв часть своей энергии.

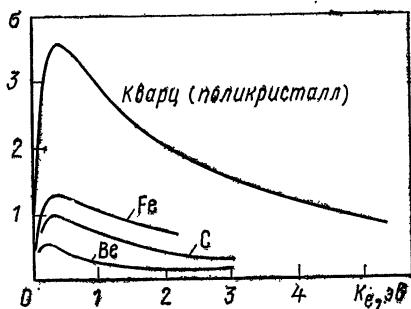


Рис. 2.25

Коэффициент вторичной электронной эмиссии  $\sigma$  имеет немонотонную зависимость от энергии (рис. 2.25). Практически для всех веществ (исключения составляют некоторые металлы, например Те, Al, Be) имеется интервал энергий электронов  $K_e' - K_e''$ , где  $\sigma > 1$ . Для металлов  $K_e' \lesssim 100-200$  эв,  $K_e'' \approx 1$  кэв. Для диэлектриков  $K_e' \approx 10-30$  эв,  $K_e'' \approx 2-10$  кэв. Для металлов  $\sigma_{\max}$  не превосходит двух, в то время как для диэлектриков  $\sigma_{\max}$  может достигать десятков. Еще одним механизмом, приводящим к выбиванию электронов из стенок, является фотоэффект, вызываемый излучением плазмы.

Рассмотренные процессы могут сильно влиять на состояние плазмы в отсутствие магнитного поля или если возможен обмен электронами между стенкой и плазмой вдоль силовых линий поля. Закручивая траектории заряженных частиц, магнитное поле препятствует уходу вторичных и отраженных электронов в объем плазмы, возвращая их на стенку.

Падение ионов на твердую поверхность, так же как и падение электронов, может сопровождаться упругим и неупругим отражением, поглощением (или, иначе, внедрением), ион-электронной эмиссией. Кроме того, обычно эффективной оказываются нейтрализа-

ция — отражение частицы с приобретением недостающего электрона. Важную роль может играть также катодное распыление. Поскольку распыление происходит в виде атомов и ионов, то по аналогии с электронными процессами это явление можно было бы назвать ион-атомной и ион-ионной эмиссией.

Эмиссия электронов из вещества при бомбардировке ионами может происходить по двум причинам. Если энергия ионизации налетающего иона больше, чем удвоенная работа выхода электрона из мишени, то возможно так называемое *потенциальное вырывание*. Механизм этого явления состоит в следующем. Состояние системы ион у поверхности — твердое тело можно рассматривать как возбужденное. Переход в основное состояние происходит в результате захвата ионом одного из электронов твердого тела. Избыточная энергия, выделяющаяся при нейтрализации, может быть передана другому электрону (*оже-процесс*), который, получив энергию большую, чем работа выхода, может выйти наружу. Вероятность потенциального вырывания электронов однозарядными ионами почти всегда много меньше единицы. Лишь при бомбардировке ионами гелия коэффициент такой вторичной ион-электронной эмиссии  $\sigma_i$  достигает 0,3—0,5. В случае многозарядных ионов эффективность потенциального вырывания увеличивается и  $\sigma_i$  может стать больше единицы. В области больших энергий (больше нескольких сот электронвольт) преобладает кинетическая ион-электронная эмиссия. Ее механизм, грубо говоря, аналогичен ударной ионизации атомов ионами (см. § 2.9). Кинетическая ион-электронная эмиссия также не эффективна при малых энергиях, когда возмущение состояний электронов в кристалле можно считать адиабатически медленным. Имеется обычно порог, начиная с которого кинетическая эмиссия сравнима с потенциальной. Пороговая скорость для разных ионов приблизительно одного порядка ( $0,5 \div 1$ )  $10^7$  см/сек. Кинетическая ион-электронная эмиссия достигает максимума при энергиях порядка десятков килоэлектронвольт для легких ионов и сотен килоэлектронвольт для тяжелых. Максимальное значение коэффициента вторичной эмиссии для металлов может составить несколько единиц, а для диэлектриков — более десяти.

Рассмотрим поведение атомарных частиц при бомбардировке ионами поверхности твердого тела. Здесь прежде всего следует обратить внимание на сравнительно небольшие значения коэффициента отражения падающих на поверхность первичных частиц. В случае легких ионов ( $H^+$ ,  $He^+$ ,  $Li^+$ ) он для большинства мишеней не превосходит 20%. С ростом массы налетающего иона коэффициент отражения увеличивается и достигает 40—60%. Однако если масса иона больше массы атомов мишени, то он резко падает и для тяжелых ионов составляет лишь несколько процентов. В интервале от нескольких сот до десятков килоэлектронвольт коэффициент отражения, как правило, не зависит от энергии ионов. При больших энергиях эффективность отражения монотонно уменьшается. В области

малых энергий (меньше 100 эв) наблюдается некоторый рост коэффициента отражения. При энергиях меньше десятка электронвольт экспериментальные данные практически отсутствуют. Если энергия налетающих ионов много больше энергии связи атомов в мишени, то в первом приближении взаимодействие иона с атомами можно рассматривать как последовательность независимых соударений. При этом потери энергии, так же как и для парных соударений в газе, определяются коэффициентом передачи (соотношением масс атома и иона) и возможностью ионизации. Отражение, как правило, происходит уже в результате первого соударения. Это обуславливает энергетический спектр отраженных частиц.

Эффективность нейтрализации ионов в большинстве случаев очень велика. Для ионов инертных газов коэффициент отражения от металлов без нейтрализации составляет  $10^{-1} - 10^{-2}\%$ , а от диэлектриков — менее 1%. Для протонов он не превосходит нескольких процентов. Механизм нейтрализации ионов при их отражении связан с возможностью перехода одного из электронов твердого тела на свободный уровень иона. Если такой переход из заполненных состояний кристалла энергетически выгоден, то эффективность нейтрализации оказывается высокой. Если ионы имеют не слишком большую энергию, систему ион — кристаллическая решетка для электронов можно считать квазистатической (адиабатически изменяющейся). В этих условиях вероятность нейтрализации можно оценить в первом приближении по вероятности заполнения соответствующих состояний иона и решетки. Поэтому степень нейтрализации велика, если энергия электрона в атоме у поверхности меньше энергии Ферми. Обратная ситуация имеет место лишь для атомов щелочных металлов, попадающих на поверхность металлов с большой работой выхода. Это приводит к поверхностной ионизации атомов. При отражении электрон покидает атом, переходя в твердую стенку. Для стационарного потока процесс поверхностной ионизации эффективен лишь при высокой температуре металлической поверхности (больше  $2000^\circ\text{C}$ ). Повышенная температура необходима для эффективного испарения атомов щелочного металла, проникающего в результате бомбардировки в поверхностные слои. В противном случае работа выхода мишени уменьшается и поверхностная ионизация практически прекращается.

Из сказанного ясно, что горячая стенка, материал которой имеет большую работу выхода (например, вольфрам), в присутствии паров щелочноземельных металлов может служить источником плазмы. При этом ионы возникают в результате поверхностной ионизации, а электроны — за счет термоэлектронной эмиссии. При достаточной плотности электронного и ионного потоков объемный заряд вблизи стенки автоматически создает перепад потенциала, регулирующий потоки так, чтобы в плазме обеспечивалась квазинейтральность.

Катодное распыление частиц твердого тела начинается с некоторых пороговых значений энергии ионов. Эта пороговая энергия

равна отношению энергии возгонки (сублимации) атомов данного твердого тела к коэффициенту передачи энергии от иона к атому в твердом теле. Порядок последнего близок к коэффициенту передачи энергии  $\kappa$  при атомных столкновениях. Энергия сублимации лежит в интервале 1,5 — 9 эв. Поэтому пороговая энергия в большинстве случаев составляет 3 — 20 эв. С ростом энергии первичного пучка коэффициент распыления  $\eta$  (отношение числа распыленных частиц

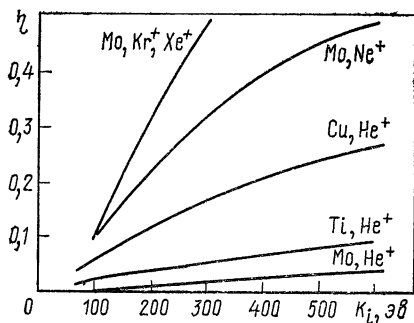


Рис. 2.26

к числу падающих) увеличивается (рис. 2.26). При энергиях приблизительно равных 1000 эв он становится сравнимым с единицей. В целом зависимость  $\eta$  от  $K_i$  представляет собой плавную кривую с максимумом. Для легких ионов этот максимум довольно резкий. Он наблюдается при энергиях порядка 10 кэв. Для тяжелых ионов ( $\text{Ar}^+, \text{Kr}^+$ ) наблюдается широкий максимум в области энергий 30 — 100 кэв. Так же как и при отражении, в процессе катод-

ного распыления образуются в основном нейтральные частицы (атомы, а иногда и целые комплексы). Их средняя энергия растет с ростом атомного номера распыляющихся ионов, но не превосходит 10 эв. Количество атомов, эмиттированных на один ион, зависит от атомного номера и структуры электронных оболочек иона и атомов мишени. Значение  $\eta$  увеличивается с ростом массы и по мере заполнения электронами внешних оболочек. Наименьшей эффективностью распыления обладают атомы водорода и гелия. Наиболее устойчивыми к распылению под действием этих атомов оказываются тяжелые вещества, например Та и W. Для них коэффициент распыления в максимуме меньше  $10^{-2}$ .

ГЛАВА 3  
**КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ  
ДЛЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

**§ 3.1. Функция распределения**

Как уже отмечалось, плазма представляет собой ансамбль большого числа движущихся и взаимодействующих друг с другом частиц. Точное описание поведения ансамбля, основанное на анализе траекторий всех составляющих его частиц, практически невозможно\*. Поэтому для решения плазменных задач пользуются статистическими методами физической кинетики. Основной статистической характеристикой ансамбля является функция распределения. Для ее определения следует разбить все конфигурационное пространство и весь диапазон скоростей частиц на малые интервалы, такие, чтобы изменением плотности частиц в пределах каждого интервала можно было пренебречь. Если число частиц, приходящихся на каждый интервал, достаточно велико, то флуктуации, связанные с хаотическим движением частиц, будут малы. При этом для описания поведения ансамбля правомерно использовать статистически усредненные значения числа частиц в каждом интервале. Средние значения отношения числа частиц в каждом интервале к самому интервалу и называются *функцией распределения*.

Выразим количественно функцию распределения. Для этого введем обозначения интервалов в конфигурационном пространстве и в пространстве скоростей. Обозначим элемент объема в конфигурационном пространстве  $\mathbf{r}d\mathbf{r}$ . Его положение определяется вектором  $\mathbf{r}$  с координатами  $x, y, z$ , его линейные размеры — приращениями координат  $dx, dy, dz$ . Объем будем обозначать  $d^3r$  ( $d^3r = dx dy dz$ ). Интервал скоростей, характеризующийся изменением величин проекции в пределах от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ , от  $v_y$  до  $v_y + dv_y$  и от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$ , будем обозначать  $dv$ . Этот интервал по аналогии с пространственным можно рассматривать как элемент объема в пространстве скоростей, положение которого определяется вектором  $\mathbf{v}$ , а размеры — приращениями  $dv_x, dv_y, dv_z$ ; соответственно объем равен  $d^3v = dv_x dv_y dv_z$ . Поскольку для полного определения интервала параметров, необходимо одновременно задать интервалы

---

\* Заметим, что такой подход в настоящее время реализуется в так называемых машинных экспериментах. В них с помощью ЭВМ вычисляются траектории некоторого ансамбля частиц при заданных начальных условиях. Однако современные ЭВМ дают возможность моделировать таким образом лишь простейшие задачи для сравнительно малого числа частиц в ансамбле.

координат и интервалы компонент скорости, часто пользуются понятием шестимерного фазового пространства, три координатных оси которого соответствуют осям конфигурационного пространства, а другие три—осям пространства скоростей. Радиус-вектор в шестимерном пространстве  $\mathbf{R}$  имеет при этом проекции  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$ ; элемент объема, соответствующий выбранным интервалам:

$$d^6R = d^3r d^3v = dx dy dz dv_x dv_y dv_z.$$

Полагая, что выбранные интервалы координат и скоростей удовлетворяют сформулированным выше условиям, можно написать выражение для среднего числа частиц  $dN_{rv}$  в шестимерном интервале:

$$dN_{rv} = F(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d^6R = F(v, \mathbf{r}, t) d^3r d^3v. \quad (3.1)$$

Здесь  $F(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  и есть функция распределения, определяющая число частиц в данном интервале координат и компонент скорости в данный момент времени. Она, очевидно, имеет смысл концентрации (плотности) частиц в шестимерном пространстве. Функции распределения могут быть введены для частиц каждого сорта (в плазме — для электронов, ионов и атомов). При наличии частиц в различных внутренних состояниях (например, атомов в различных возбужденных состояниях) можно ввести функции распределения, характеризующие распределение частиц не только по пространственным координатам и скоростям, но и по различным внутренним состояниям.

Проинтегрируем равенство (3.1) по скоростям. Очевидно, такое интегрирование дает полное число частиц в элементе объема конфигурационного пространства:

$$dN_r = d^3r \int_{(v)} F(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d^3v = n(\mathbf{r}, t) d^3r.$$

Это число пропорционально элементу объема, причем коэффициент пропорциональности равен, по определению, обычной концентрации (плотности) частиц в конфигурационном пространстве

$$n(\mathbf{r}, t) = \int_{(v)} F(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d^3v. \quad (3.2)$$

Функцию распределения  $F(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  можно представить в виде произведения

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t), \quad (3.3)$$

где функция  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  называется *функцией распределения частиц по скоростям*. Условие ее нормировки можно получить, интегрируя по скоростям выражение (3.3). Учитывая (3.2), находим

$$\int_{(v)} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d^3v = 1. \quad (3.4)$$

Функция распределения по скоростям  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  определяет, относительное число частиц, обладающих скоростями, лежащими в интервале  $v dv$  (в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ ). По отношению к одной частице она определяет вероятность того, что в заданных условиях частица будет обладать скоростью, лежащей в интервале  $v dv$ . Условие (3.4) соответствует естественному требованию, чтобы вероятность обнаружения у частицы скорости, лежащей в интервале, охватывающем все пространство скоростей, была равна единице.

Кроме  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  часто пользуются некоторыми «производными» функциями распределения. Для ряда задач полезна *одномерная функция распределения*, дающая распределение частиц по одной из составляющих скорости. Одномерная функция распределения может быть получена из  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  интегрированием по остальным составляющим скорости. Так, функция

$$f_x(v_x, \mathbf{r}, t) = \int_{(v_y)} \int_{(v_z)} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) dv_y dv_z \quad (3.5)$$

определяет относительное число частиц с  $x$ -компонентой скорости в пределах от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ . Естественно, что условие нормировки для  $f_x$  имеет вид аналогичный (3.4):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(v_x, \mathbf{r}, t) dv_x = 1.$$

Полезно также ввести функцию распределения по абсолютному значению скорости (*функцию распределения по полным скоростям*). Она получается из  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ , если перейти к сферической системе координат в пространстве скоростей и выполнить интегрирование по всем угловым координатам. Элемент объема в сферической системе равен  $d^3v = v^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dv$ , а  $f_v(v, \mathbf{r}, t)$ , соответственно

$$f_v(v, \mathbf{r}, t) = \int_{(\vartheta)} \int_{(\varphi)} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) v^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (3.6)$$

Для случая, когда  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  изотропна, т. е. зависит только от значения скорости, но не от углов  $\vartheta, \varphi$ , соотношение (3.6) принимает вид  $f_v(v, \mathbf{r}, t) = 4\pi v^2 f(v, \mathbf{r}, t)$ .

*Функция распределения по кинетическим энергиям* может быть получена из (3.6) заменой интервала скоростей  $dv$  соответствующим интервалом энергий, т. е.  $f_v dv = f_K(K, \mathbf{r}, t) dK$ , или, поскольку  $dK = mv dv$ ,

$$f_K = f_v/mv = f_v/\sqrt{2mK}. \quad (3.7)$$

Знание концентраций и функций распределения по скоростям частиц плазмы дает возможность получить полную информацию о макроскопических величинах, характеризующих свойства плаз-



мы. Функция распределения позволяет, в частности, провести усреднение любой интересующей величины по скоростям частиц. В соответствии с определением усреднение сводится к интегрированию по формуле

$$\langle g(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t) \rangle = \int_{(\mathbf{v}_\alpha)} g(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t) f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t) d^3 v_\alpha, \quad (3.8)$$

где  $g$  — величина, зависящая от скорости частиц  $\alpha$ ;  $f_\alpha$  — функция распределения скоростей этих частиц (учтено, что функция  $f_\alpha$  нормирована на единицу). С помощью (3.8) можно найти среднюю скорость частиц каждого сорта, среднюю энергию, средние потоки импульса и энергии и другие связанные с ними величины (см. § 6.1).

Функции распределения определяют и скорость процессов, связанных со столкновениями частиц, — процессов обмена импульсом, энергией, процессов возбуждения, ионизации и рекомбинации (см. § 3.3). Так, число парных столкновений частиц сорта  $\alpha$  со скоростями в интервале  $\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$  с частицами сорта  $\beta$  со скоростями  $\mathbf{v}_\beta d\mathbf{v}_\beta$  в единице объема в единицу времени в соответствии с (2.47) можно записать в виде

$$dQ_{\alpha\beta}^{(p)}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, \vartheta) = (n_\alpha f_\alpha d^3 v_\alpha) (n_\beta f_\beta d^3 v_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(p)} d\Omega, \quad (3.9)$$

где первые два множителя определяют плотность частиц  $\alpha$  и  $\beta$  в выделенных интервалах скоростей;  $\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$  — относительная скорость;  $\sigma_{\alpha\beta}^{(p)}$  — дифференциальное сечение столкновений данного типа ( $p$ ). Полное число таких столкновений в единице объема в единицу времени получается в результате интегрирования по углам и по скоростям частиц  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}^{(p)} &= n_\alpha n_\beta \int_{(\mathbf{v}_\alpha)} \int_{(\mathbf{v}_\beta)} v_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta d^3 v_\alpha d^3 v_\beta \int_{(\Omega)} \sigma_{\alpha\beta}^{(p)} d\Omega = \\ &= n_\alpha n_\beta \langle v_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}^{(p)}(v_{\alpha\beta}) \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Его можно выразить также через частоты столкновений [см. (2.49)]:

$$Q_{\alpha\beta}^{(p)} = n_\alpha \langle v_{\alpha\beta}^{(p)} \rangle = n_\beta \langle v_{\beta\alpha}^{(p)} \rangle, \quad (3.11)$$

где  $v_{\alpha\beta}^{(p)} = n_\beta v_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}^{(p)}(v_{\alpha\beta})$ . Аналогичные выражения можно получить для передачи энергии и импульса при столкновениях (см. § 3.3).

### § 3.2. Кинетическое уравнение

Получим теперь уравнение для функции распределения заряженных частиц плазмы  $F = n f$ . Функция распределения, представляющая концентрацию частиц в шестимерном пространстве, дает число частиц в каждом его элементе. Поэтому для определения изменений функции распределения, связанных с различными при-

чинами, надо рассмотреть их влияние на число частиц в элементе шестимерного объема. Изменение числа частиц каждого сорта в элементе  $\mathbf{r}d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}d\mathbf{v}$  может быть вызвано, во-первых, возникновением новых и исчезновением существующих частиц (применительно к заряженным частицам, например, в результате ионизации и рекомбинации) и, во-вторых, тем, что потоки, «втекающие» в рассматриваемый элемент шестимерного объема и «вытекающие» из него, могут не компенсировать друг друга\*. Эти потоки связаны с перемещением частиц и с изменением их скорости под действием различных сил.

Определим сначала изменение числа частиц в элементе  $\mathbf{r}d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}d\mathbf{v}$ , связанное с их перемещением. Рассмотрим, например, «втекание» частиц в этот элемент в направлении оси  $x$  через площадку  $dydz$  (рис. 3.1). За время  $dt$  через площадку пройдут все частицы, которые находятся от нее на расстоянии меньшем  $v_x dt$ . Число частиц

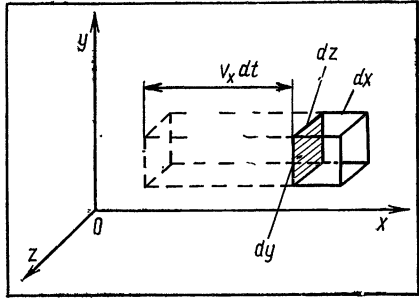


Рис. 3.1

равно произведению плотности частиц, относящихся к рассматриваемому интервалу скоростей  $nf d^3v$ , и объема, ограниченного площадью  $dydz$  и высотой  $v_x dt$ , т. е.  $(nf v_x)_x dt d^3v dy dz$ , причем величины  $n$ ,  $f$ ,  $v_x$  должны быть определены в точке  $x$ . Число вытекающих из объема через площадку  $dydz$  частиц получается таким же образом, но оно должно быть определено в точке  $x + dx$ , т. е.  $(nf v_x)_{x+dx} dt d^3v dy dz$ . Разность этих потоков дает изменение числа частиц в объеме, связанное с движением вдоль оси  $x$ :

$$[\partial(nf)/\partial t]_x dt d^3r d^3v = [(nf v_x)_x - (nf v_x)_{x+dx}] dt d^3v dy dz = \\ = -[\partial(nf v_x)/\partial x] dt d^3r d^3v,$$

где разность значений  $nf v_x$  в двух близких точках определена через частную производную по  $x$ , которая берется при фиксированных значениях остальных шести переменных ( $t$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ). Сокращая полученное соотношение на  $dt$  и на элементы объема  $d^3r$  и  $d^3v$ , находим скорость изменения функции распределения, связанную с движением частиц вдоль оси  $x$ :

$$[\partial(nf)/\partial t]_x = -\partial(nf v_x)/\partial x = -v_x \partial(nf)/\partial x.$$

Аналогичные выражения получаются для компонент  $(\partial nf/\partial t)_y$  и  $(\partial nf/\partial t)_z$ . Их сумма определяет полное изменение функции распре-

\* Заметим, что изменение функции распределения под действием потока частиц в шестимерном пространстве аналогично изменению обычной трехмерной плотности, входящему в дивергенцию потока.

деления, обусловленное движением частиц:

$$[\partial(nf)/\partial t]_r = -v_x \partial(nf)/\partial x - v_y \partial(nf)/\partial y - v_z \partial(nf)/\partial z = -\mathbf{v} \text{ grad}(nf). \quad (3.12)$$

Найдем теперь изменение числа частиц в элементе  $\mathbf{r}d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}d\mathbf{v}$ , вызванное изменением их скорости. Рассмотрим поток частиц в элемент объема пространства скоростей через «площадку»  $dv_y dv_z$  (рис. 3.2). Он связан с  $x$ -компонентой ускорения  $a_x$ . За время  $dt$  через границу в объем попадут частицы,  $x$ -компонента скорости которых находилась в пределах от  $v_x$  до  $v_x - a_x dt$ . Полное число частиц в элементе объема  $d^3r$

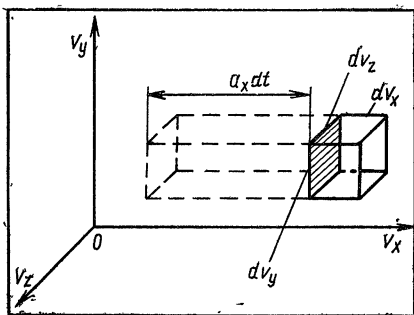


Рис. 3.2

равно  $nd^3r$ . Доля частиц, у которых  $x$ -компонента скорости находится в пределах  $\Delta v_x = -a_x dt$ , а компоненты  $v_y$  и  $v_z$  лежат в пределах  $dv_y, dv_z$ , составляет  $f a_x dt dv_y dv_z$ . Поэтому число частиц, входящих в элемент объема через площадку  $dv_y, dv_z$ , равно  $(nfa_x)_{v_x} dt d^3r dv_y dv_z$ , причем величины  $n, f, a_x$  должны быть определены при  $x$ -компоненте скорости  $v_x$ . Число частиц, выходящих из рас-

считываемого элемента из-за изменения их скорости, получается таким же образом, но при скорости  $v_x + dv_x$ , т. е.  $(nfa_x)_{v_x+dv_x} dt d^3r dv_y dv_z$ . Разность этих потоков дает изменение числа частиц в результате их ускорения в направлении оси  $x$ :

$$[\partial(nf)/\partial t]_{v_x} dt d^3r dv = -[\partial(nfa_x)/\partial v_x] dt d^3r dv,$$

где частная производная  $\partial/\partial v_x$  берется при фиксированных значениях всех остальных переменных ( $t, x, y, z, v_y, v_z$ ). Аналогичные соотношения получаются для изменения числа частиц под действием ускорения в направлениях  $y$  и  $z$ . Их сумма определяет полное изменение функции распределения в результате изменения скорости частиц:

$$[\partial(nf)/\partial t]_v = -\frac{\partial}{\partial v_x}(nfa_x) - \frac{\partial}{\partial v_y}(nfa_y) - \frac{\partial}{\partial v_z}(nfa_z). \quad (3.13)$$

Входящее в (3.13) ускорение частиц определяется действующей на них силой:  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ . На заряженные частицы плазмы действуют силы электрического и магнитного полей\*. Ускорение, вызванное этими силами, имеет вид

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m} \left( Ze \mathbf{E} + \frac{Ze}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right), \quad (3.14)$$

\* Мы пренебрегаем здесь действием гравитационных сил, существенных для плазмы некоторых космических объектов.

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — соответственно напряженности электрического и магнитного полей;  $Ze$  — заряд частиц. При подстановке (3.14) в (3.13), следует учитывать, что каждая из компонент ускорения не зависит от параллельной компоненты скорости. Сила  $Ze\mathbf{E}$  вообще не зависит от  $\mathbf{v}$ , лоренцева сила  $(Ze/c) [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$  зависит только от компоненты скорости, перпендикулярной ей. Поэтому в (3.13) компоненты ускорения можно вынести за операторы производных. Тогда получим

$$\begin{aligned} & [\partial (nf)/\partial t]_v = \\ & = -a_x \partial (nf)/\partial v_x - a_y \partial (nf)/\partial v_y - a_z \partial (nf)/\partial v_z = -\mathbf{a} \operatorname{grad}_v (nf), \end{aligned}$$

где  $\operatorname{grad}_v$  — оператор градиента в пространстве скоростей с компонентами  $\partial/\partial v_x$ ,  $\partial/\partial v_y$ ,  $\partial/\partial v_z$ . Учитывая (3.14), находим изменение функции распределения, связанное с ускорением в электрическом и магнитном полях:

$$[\partial (nf)/\partial t]_{E,H} = -\frac{Ze}{m} \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c} \right] \operatorname{grad}_v (nf). \quad (3.15)$$

Электрическое и магнитное поля, действующие на каждую частицу, складываются из внешних по отношению к плазме полей и полей, создаваемых всеми остальными частицами. Эти последние, в сущности, представляют силы взаимодействия частиц. Обычно силы взаимодействия удается разбить на два класса. Первый связан с коллективными движениями сравнительно больших объемов частиц. Здесь причинами возникновения этих сил могут быть разделение зарядов и протекание токов, приводящие к появлению макроскопических электрических и магнитных полей. Пространственные масштабы изменения этих полей много больше средних расстояний между частицами. Поэтому по отношению к группам частиц, входящих в каждый из элементов  $\mathbf{r}d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}d\mathbf{v}$  поля, связанные с коллективными движениями, можно считать внешними. Их можно обычно определять по усредненным значениям пространственного заряда и тока, не учитывая флуктуаций, связанных с хаотическим движением частиц.

Второй вид взаимодействия — «близкое» взаимодействие частиц — можно свести к столкновениям. Как отмечалось в гл. 2, упругие и неупругие столкновения заряженных частиц с нейтральными могут рассматриваться в кинетике плазмы как точечные. Это означает, что влияние их на траекторию заряженной частицы может быть сведено к мгновенному изменению вектора скорости частицы. Хотя кулоновское взаимодействие заряженных частиц весьма протяженно, его, как указывалось в § 2.4, также можно представить в виде последовательности точечных столкновений. Каждое точечное столкновение, очевидно, эквивалентно двуединому акту: исчезновению заряженной частицы со скоростью, которая была до столкновения, и появлению в том же месте частицы с новой скоростью. Поэтому все упругие и неупругие столкновения заряженных частиц можно рассматривать вместе с процессами ионизации

и рекомбинации как процессы, приводящие к изменению числа частиц внутри элемента объема шестимерного пространства. Изменение числа частиц в элементе  $\mathbf{r}d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}d\mathbf{v}$ , связанное со столкновениями, запишем в виде  $[\delta(nf)/\delta t] d^3r d^3v$ . При этом, поскольку различные столкновения происходят независимо друг от друга, скорость изменения функции распределения, связанного со столкновениями различного типа, можно просуммировать. Прделаем это, например, для частиц сорта  $\alpha$ :

$$\delta(n_\alpha f_\alpha)/\delta t = \sum_{\beta} \sum_p S_{\alpha\beta}^{(p)}(n_\alpha f_\alpha). \quad (3.16)$$

Здесь суммирование распространено на все сорта частиц  $\beta$  и все виды столкновений  $p$ . Явный вид слагаемых  $S_{\alpha\beta}^{(p)}$  для некоторых типов столкновений будет дан в § 3.3.

Складывая полученные выражения для изменения функции распределения, связанного с перемещением частиц  $[\partial(nf)/\partial t]_r$  (3.12), с изменением скорости в электрическом и магнитном полях  $[\partial(nf)/\partial t]_{E, H}$  (3.12) и со столкновениями  $\delta(nf)/\delta t$ , находим уравнение для функции распределения:

$$\begin{aligned} \partial(nf)/\partial t = & -\mathbf{v} \text{grad}(nf) - (Ze/m) \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\} \text{grad}_v(nf) + \\ & + \delta(nf)/\delta t, \end{aligned}$$

или, перенеся второй и третий члены в левую часть,

$$\begin{aligned} \partial(nf)/\partial t + \mathbf{v} \text{grad}(nf) + (Ze/m) \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\} \text{grad}_v(nf) = \\ = \delta(nf)/\delta t. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Это уравнение называется *кинетическим*, или *уравнением Больцмана*. Его можно записать для частиц каждого сорта (электронов, ионов, нейтральных частиц). Для установления конкретного вида уравнения надо определить в нем поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и столкновительные члены  $\delta(nf)/\delta t$ . Как указывалось выше, поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  могут быть связаны не только с внешними источниками, но и с пространственными зарядами и токами, создаваемыми заряженными частицами плазмы. Их самосогласованное определение требует в общем случае использования уравнений поля, в которых в число источников включены плотности заряда и тока заряженных частиц, определяемые с помощью их функций распределения. При этом нужно совместно рассматривать кинетические уравнения и уравнения поля.

### § 3.3. Столкновительный член кинетического уравнения

Как было отмечено, столкновения различного типа аддитивно входят в столкновительный член кинетического уравнения (3.16). Поэтому их влияние на функцию распределения можно рассматривать независимо. Определим сначала изменение функции распределения, связанное с упругими столкновениями, например изме-

нение функции распределения частиц сорта  $\alpha$  в результате их упругих столкновений с частицами сорта  $\beta$ . Для этого найдем изменение в результате столкновений числа частиц  $\alpha$ , находящихся в элементе объема  $\mathbf{r}d\mathbf{r}$  и в интервале скоростей  $\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$ . Это число определяется функцией распределения:

$$dN_\alpha = n_\alpha(\mathbf{r}) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 r d^3 v_\alpha.$$

Рассматривая столкновения как точечные, будем считать, что они приводят к резкому изменению скоростей сталкивающихся частиц и не влияют непосредственно на их положение в конфигурационном пространстве. В частности, каждое упругое столкновение в выделенном интервале скоростей приводит к изменению скорости частицы  $\alpha$  и к выходу ее из этого интервала. Определим число столкновений рассматриваемых частиц  $\alpha$  с частицами  $\beta$  со скоростями в интервале  $\mathbf{v}_\beta d\mathbf{v}_\beta$  [их плотность равна  $dn_\beta = n_\beta(\mathbf{r}) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta) d^3 v_\beta$ ]. Как было показано в § 2.1, 2.2, при упругом столкновении законы сохранения однозначно определяют связь между начальными скоростями  $\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta$  и конечными скоростями  $\mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{v}'_\beta$ , если заданы углы рассеяния  $\vartheta, \psi$ . Поэтому столкновение частиц из интервалов  $\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$  и  $\mathbf{v}_\beta d\mathbf{v}_\beta$ , сопровождающееся рассеянием в телесный угол  $d\Omega$ , приводит к их переходу во вполне определенные интервалы пространства скоростей  $\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_\alpha$  и  $\mathbf{v}'_\beta d\mathbf{v}'_\beta$  (рис. 3.3). Число таких столкновений в единицу времени определяется дифференциальным поперечным сечением [см. (2.46)]

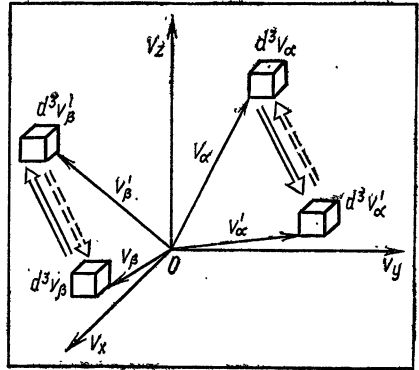


Рис. 3.3

сопровождается рассеянием в телесный угол  $d\Omega$ , приводит к их переходу во вполне определенные интервалы пространства скоростей  $\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_\alpha$  и  $\mathbf{v}'_\beta d\mathbf{v}'_\beta$  (рис. 3.3). Число таких столкновений в единицу времени определяется дифференциальным поперечным сечением [см. (2.46)]

$$\begin{aligned} dQ(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta | \mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{v}'_\beta) &= dN_\alpha n_\beta v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega = \\ &= n_\alpha n_\beta f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3 v_\alpha d^3 v_\beta d^3 r, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$  — относительная скорость. Полный уход частиц  $\alpha$  из рассматриваемого элемента объема в результате их упругих столкновений с частицами  $\beta$  получим, суммируя (3.18) по углам рассеяния и по скоростям частиц  $\beta$ :

$$dQ_{\alpha\beta}^- = n_\alpha n_\beta \int_{(\mathbf{v}_\beta)} \int_{(\Omega)} f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3 v_\alpha d^3 v_\beta. \quad (3.19)$$

Столкновения могут также приводить к попаданию частиц  $\alpha$  в рассматриваемый элемент  $\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$  из других элементов. В частности, к этому приводят столкновения, обратные по отношению к

рассмотренным выше (см. рис. 3.3), — столкновения частиц из элементов  $\mathbf{v}'_{\alpha} d\mathbf{v}'_{\alpha}$  и  $\mathbf{v}'_{\beta} d\mathbf{v}'_{\beta}$ , определяющиеся углами поворота вектора относительной скорости  $\vartheta' = -\vartheta$  и  $\psi' = -\psi$ . Число таких столкновений в единицу времени можно записать аналогично (3.18):

$$dQ_{\alpha\beta}^+ (\mathbf{v}'_{\alpha}, \mathbf{v}'_{\beta} | \mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{v}_{\beta}) = n_{\alpha} n_{\beta} f_{\alpha} (\mathbf{v}'_{\alpha}) f_{\beta} (\mathbf{v}'_{\beta}) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} (\mathbf{v}_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3 v'_{\alpha} d^3 v'_{\beta}. \quad (3.20)$$

Здесь учтено, что относительная скорость не изменяется при упругом столкновении ( $v'_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta}$ ). Полный прирост частиц  $\alpha$  в элементе  $\mathbf{v}_{\alpha} d\mathbf{v}_{\alpha}$  можно получить, проинтегрировав (3.20) по всем комбинациям углов  $\Omega$  и скоростей  $\mathbf{v}'_{\alpha}$  и  $\mathbf{v}'_{\beta}$ , которые приводят к заданному значению скорости  $\mathbf{v}_{\alpha}$ :

$$dQ_{\alpha\beta}^+ = n_{\alpha} n_{\beta} \int_{(\Omega)} \int_{(\mathbf{v}'_{\alpha})} \int_{(\mathbf{v}'_{\beta})} f_{\alpha} (\mathbf{v}'_{\alpha}) f_{\beta} (\mathbf{v}'_{\beta}) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} (\mathbf{v}_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3 v'_{\alpha} d^3 v'_{\beta}. \quad (3.21)$$

Проще всего учесть условие  $\mathbf{v}_{\alpha} = \text{const}$ , перейдя от интегрирования по переменным  $\mathbf{v}'_{\alpha}$ ,  $\mathbf{v}'_{\beta}$  (скоростям после столкновения) к интегрированию по переменным  $\mathbf{v}_{\alpha}$ ,  $\mathbf{v}_{\beta}$  (скоростям до столкновения). Как уже отмечалось, связь между этими скоростями при заданных углах рассеяния однозначна. Нетрудно убедиться, что якобиан такого перехода равен единице, т. е. в подынтегральном выражении можно положить\*  $d^3 v'_{\alpha} d^3 v'_{\beta} = d^3 v_{\alpha} d^3 v_{\beta}$ . Поэтому интегрирование по скоростям  $\mathbf{v}'_{\alpha}$ ,  $\mathbf{v}'_{\beta}$  при  $\mathbf{v}_{\alpha} = \text{const}$  в (3.21) после перехода к  $\mathbf{v}_{\alpha}$ ,  $\mathbf{v}_{\beta}$  можно заменить интегрированием по  $\mathbf{v}_{\beta}$ . Тогда получим

$$dQ_{\alpha\beta}^+ = n_{\alpha} n_{\beta} \int_{(\mathbf{v}_{\beta})} \int_{(\Omega)} f_{\alpha} (\mathbf{v}'_{\alpha}) f_{\beta} (\mathbf{v}'_{\beta}) v_{\alpha\beta} \sigma (\mathbf{v}_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3 v_{\beta} d^3 v_{\alpha}, \quad (3.22)$$

где скорости  $\mathbf{v}'_{\alpha}$  и  $\mathbf{v}'_{\beta}$  должны быть выражены через  $\mathbf{v}_{\alpha}$  и  $\mathbf{v}_{\beta}$  с помощью законов сохранения.

Соотношения (3.19) и (3.22) позволяют определить изменение числа частиц  $\alpha$  в элементе  $\mathbf{r} d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}_{\alpha} d\mathbf{v}_{\alpha}$  вследствие упругих столкновений с частицами  $\beta$ :

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^e d^3 v_{\alpha} d^3 r &= dQ_{\alpha\beta}^+ - dQ_{\alpha\beta}^- = \\ &= n_{\alpha} n_{\beta} \left[ \int_{(\mathbf{v}_{\beta})} \int_{(\Omega)} (f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta}) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_{\beta} \right] d^3 v_{\alpha} d^3 r, \end{aligned}$$

где для краткости введены обозначения  $f_{\alpha} (\mathbf{v}'_{\alpha}) = f'_{\alpha}$ ,  $f_{\beta} (\mathbf{v}'_{\beta}) = f'_{\beta}$ . Окончательно для скорости изменения функции распределения,

\* В этом можно убедиться, перейдя от интегрирования по  $\mathbf{v}_{\alpha}$  и  $\mathbf{v}_{\beta}$  к интегрированию по  $\mathbf{v}_0$  (скорость центра инерции) и  $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$  (относительная скорость) с помощью формул § 2.1. Поскольку упругие столкновения вообще не изменяют скорость  $\mathbf{v}_0$ , а изменения скорости  $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$  сводятся к ее повороту, в этой системе, очевидно,  $d^3 v'_{\alpha} d^3 v'_{\beta} = d^3 v_0 d^3 v_{\alpha\beta}$ .

связанной с упругими столкновениями, получаем

$$S_{\alpha\beta}^e \equiv n_\alpha n_\beta \int \int_{(\mathbf{v}_\beta)} (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_\beta. \quad (3.23)$$

Аналогично можно найти изменение функции распределения, обусловленное неупругими столкновениями. Определим его для неупругих столкновений, связанных с изменением внутреннего состояния участвующих в столкновении частиц (ионов или атомов). При рассмотрении таких столкновений надо использовать функцию распределения, задающую распределение частиц не только по пространственным координатам и скоростям, но также и по их внутренним состояниям. Соответственно будем считать функцию распределения зависящей от совокупности квантовых чисел, характеризующих внутреннее состояние; обозначим эту совокупность индексом  $j$ , нумерующим все дискретные состояния (в том числе и различные вырожденные состояния, характеризующиеся одинаковой внутренней энергией). Определим, как и раньше, изменение числа частиц  $\alpha$ , находящихся в элементе объема  $\mathbf{r}d\mathbf{r}$  и в интервале скоростей  $\mathbf{v}d\mathbf{v}$  в результате их столкновений с частицами  $\beta$ , сопровождающихся заданным изменением внутреннего состояния частиц. Столкновения выделенной группы частиц  $\alpha$  по-прежнему приводят к уходу частиц из рассматриваемого элемента. Число столкновений такого типа, просуммированное по всем углам рассеяния и по всем скоростям частиц  $\beta$ , определяется формулой, аналогичной (3.19):

$$dQ^- (j_\alpha j_\beta | j'_\alpha j'_\beta) = n_\alpha n_\beta d^3 r d^3 v_\alpha \int \int_{(\mathbf{v}_\beta)} f_\alpha(v_\alpha, j_\alpha) \times \\ \times f_\beta(\mathbf{v}_\beta, j_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{j'_\alpha j'_\beta}^{j_\alpha j_\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3 v_\beta, \quad (3.24)$$

в которой  $\sigma_{j'_\alpha j'_\beta}^{j_\alpha j_\beta}$  — дифференциальное сечение рассматриваемого процесса.

Так же как и раньше, определим и число обратных неупругих процессов, приводящих к появлению частиц  $\alpha$  в интервале скоростей  $\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$ :

$$dQ^+ (j'_\alpha, j'_\beta | j_\alpha j_\beta) = n_\alpha n_\beta \int \int_{(\mathbf{v}'_\alpha)} \int \int_{(\mathbf{v}'_\beta)} f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha, j'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta, j'_\beta) v'_{\alpha\beta} \times \\ \times \sigma_{j_\alpha j_\beta}^{j'_\alpha j'_\beta}(v'_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega' d^3 v'_\beta |_{v_\alpha = \text{const}}. \quad (3.25)$$

Поскольку интегрирование должно проводиться при условии  $\mathbf{v}_\alpha = \text{const}$ , удобно и здесь перейти от переменных  $\mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{v}'_\beta$  к переменным  $\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta$ . Для такой замены можно воспользоваться принципом детального равновесия, в соответствии с которым вероятности прямых и обратных переходов между различными состояниями долж-



ны быть равны. Для рассматриваемых переходов имеем

$$v_{\alpha\beta} \sigma_{j'_\alpha j'_\beta}^{i'_\alpha i'_\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d^3 v_\alpha d^3 v_\beta d\Omega = v'_{\alpha\beta} \sigma_{j'_\alpha j'_\beta}^{i'_\alpha i'_\beta}(v'_{\alpha\beta}, \vartheta) d^3 v'_\alpha d^3 v'_\beta d\Omega'.$$

Учитывая это равенство, получаем с помощью (3.24) и (3.25) изменение числа частиц  $\alpha$  и связанное с ним изменение функции распределения:

$$S_{j'_\alpha i'_\alpha j'_\beta i'_\beta} = \frac{dQ_{\alpha\beta}^+ - dQ_{\alpha\beta}^-}{d^3 r d^3 v_\alpha} = n_\alpha n_\beta \int_{(v_\beta)} \int_{(\Omega)} [f_\alpha(v'_\alpha, j'_\alpha) f_\beta(v'_\beta, j'_\beta) - f_\alpha(v_\alpha, j_\alpha) f_\beta(v_\beta, j_\beta)] v_{\alpha\beta} \sigma_{j'_\alpha i'_\alpha j'_\beta i'_\beta}^{i'_\alpha i'_\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3 v_\beta. \quad (3.26)$$

Просуммировав выражение (3.26) по всем начальным состояниям частиц  $\beta$  (по  $j_\beta$ ) и по всем возможным переходам (по всем возможным значениям  $j'_\alpha$  и  $j'_\beta$ ), получим полное изменение функции распределения частиц  $\alpha$  в результате их столкновений с частицами  $\beta$ :

$$S_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta \sum_{j_\beta, i'_\alpha, i'_\beta} \iint [f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta] v_{\alpha\beta} \sigma_{j'_\alpha i'_\alpha j'_\beta i'_\beta}^{i'_\alpha i'_\beta}(v_{\alpha\beta}, \vartheta) d\Omega d^3 v_\beta. \quad (3.27)$$

Выражение (3.27) учитывает все виды парных столкновений частиц  $\alpha$  и  $\beta$ . Столкновительный член кинетического уравнения для функции распределения частиц  $\alpha$  (3.16) можно получить суммированием выражений (3.27) по всем «сортам» частиц  $\beta$ . В сумму входит также интеграл, учитывающий столкновения частиц  $\alpha$  между собой (случай при  $\beta = \alpha$ ), он должен быть включен с весом 1/2, так как при  $\beta = \alpha$  каждое столкновение в интеграле учитывается дважды. В случае необходимости в столкновительный член могут быть включены также столкновения с участием трех частиц (например, процессы ионизации и рекомбинации при столкновениях).

Таким образом, столкновительный член кинетического уравнения представляет собой сложное интегральное выражение. Его называют поэтому *интегралом столкновений*. При учете столкновительного члена кинетическое уравнение (3.17) оказывается интегро-дифференциальным, включающим частные производные по семи независимым переменным и интегральные операторы. Кроме того, из (3.27) видно, что в общем случае кинетические уравнения для различных компонент плазмы не являются независимыми. Связь между ними обусловлена тем, что в подынтегральное выражение столкновительных членов для парных взаимодействий входят функции распределения двух сортов частиц. Такая связь естественна, так как при столкновениях частицы обмениваются энергией и импульсом, что приводит к взаимному влиянию их распределений по скоростям. Решение системы «зацепляющихся» интегро-дифференциальных уравнений в общем случае — чрезвычайно сложная задача. Однако во многих конкретных ситуациях удается найти возможности для ее упрощения.

Одна из таких возможностей относится к решению кинетического уравнения для электронов. Она основана на том, что из-за малой массы электронов их скорость практически всегда много больше скорости тяжелых частиц. Во многих случаях можно считать также, что и средняя кинетическая энергия электронов много больше средней энергии тяжелых частиц. При этом интеграл столкновений электронов с тяжелыми частицами практически не зависит от их функций распределения. Соответствующее выражение для него может быть получено из общих формул. Проще, однако, получить его непосредственно, полагая атомы неподвижными. Для того чтобы сделать это, определим изменение плотности электронов, скорость которых находится в интервале  $\mathbf{v}_e dv_e$ . Эта плотность равна  $n_e f_e d^3 v_e$ . Скорость ухода электронов (находящихся в единице объема) из рассматриваемого элемента пространства скоростей в результате столкновений с атомами равна

$$dQ^- = n_a n_e \int_{\Omega} v_e \sigma(v_e, \vartheta) d\Omega f_e(\mathbf{v}_e) d^3 v_e. \quad (3.28)$$

Появление электронов в рассматриваемом элементе связано с обратными столкновениями. Скорость появления электронов имеет вид

$$dQ^+ = n_a n_e \int_{\Omega} v'_e \sigma(v'_e, \vartheta) d\Omega f_e(v'_e) d^3 v'_e, \quad (3.29)$$

где при заданных углах рассеяния (при фиксированном  $d\Omega$ ) скорость электронов после столкновения  $\mathbf{v}'_e$  однозначно связана с их скоростью до столкновения. Разность  $dQ^+$  и  $dQ^-$  дает изменение функции распределения электронов

$$\begin{aligned} S_{ea} d^3 v_e = dQ^+ - dQ^- = n_e n_a \int_{\Omega} \left[ v'_e \sigma(v'_e, \vartheta) f_e(\mathbf{v}'_e) \times \right. \\ \left. \times \frac{d^3 v'_e}{d^3 v_e} - v_e \sigma(v_e, \vartheta) f_e(\mathbf{v}_e) \right] d\Omega d^3 v_e. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отношение элементарных объемов пространства скоростей для упругих столкновений определяется изменением значения скорости

$$d^3 v'_e / d^3 v_e = (v'_e)^2 dv'_e / v_e^2 dv_e = v_e'^3 / v_e^3.$$

Учитывая это, получаем интеграл столкновений электронов с тяжелыми частицами в виде

$$S_{ea}^e = \frac{n_a n_e}{v_e^3} \int_{(\Omega)} [v_e'^4 \sigma_{ea}(v'_e, \vartheta) f_e(\mathbf{v}'_e) - v_e^4 \sigma_{ea}(v_e, \vartheta) f_e(\mathbf{v}_e)] d\Omega. \quad (3.31)$$

Выражение (3.31) справедливо как для упругих, так и для неупругих столкновений электронов при условиях, когда их энергия много больше энергии атомов. Поскольку оно не зависит от функции распределения атомов, кинетическое уравнение для функции

распределения электронов не связано с кинетическими уравнениями тяжелых частиц.

Другая возможность упрощения столкновительного интеграла относится к упругим столкновениям заряженных частиц друг с другом. Как было показано в § 2.4, при таких столкновениях определяющую роль играют далекие взаимодействия, приводящие к малому изменению скорости. Легко показать, что интеграл столкновений в этом случае может быть представлен как дивергенция плотности потока в пространстве скоростей:

$$S(nf) = -\operatorname{div}_v \Gamma_v = -(\partial \Gamma_{vx} / \partial v_x + \partial \Gamma_{vy} / \partial v_y + \partial \Gamma_{vz} / \partial v_z), \quad (3.32)$$

где компоненты вектора плотности потока равны

$$\Gamma_{vh} = nf \langle \Delta v_h \rangle - \frac{1}{2} \sum_l \frac{\partial}{\partial v_l} [nf \langle \Delta v_l \Delta v_h \rangle_1], \quad (3.33)$$

а величины  $\langle \Delta v_h \rangle_1$  и  $\langle \Delta v_l \Delta v_h \rangle_1$  просуммированы по столкновениям, испытываемым частицей в единицу времени.

Вычисление  $\langle \Delta v_h \rangle_1$  и  $\langle \Delta v_l \Delta v_h \rangle_1$  для столкновений с малым изменением скорости приводит к следующему выражению для компонент плотности потока частиц  $\alpha$ , связанного с их столкновениями с частицами  $\beta$ :

$$\Gamma_{vh} = \frac{1}{2} \frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} n_\alpha n_\beta \sum_l \int_{(v_\beta)}^l v_{\alpha\beta}^i(v_{\alpha\beta}) (v^2 \delta_{hl} - v_l v_h) \times \\ \times \left[ f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial v_{\beta k}} - \frac{m_\beta}{m_\alpha} f_\beta \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha k}} \right] d^3 v_\beta. \quad (3.34)$$

Это выражение было получено Ландау при исследовании влияния кулоновских столкновений на функцию распределения и часто используется для рассмотрения процессов в сильноионизованной плазме. Столкновительный член, получающийся при подстановке (3.34) в (3.32), называют *интегралом столкновений Ландау*.

Соотношения (3.33), (3.34) можно записать в виде векторного равенства

$$\Gamma_v = \mathbf{g}nf - \check{\mathbf{D}}_v \operatorname{grad}_v (nf). \quad (3.35)$$

Первое слагаемое определяет направленное изменение скорости частиц данного сорта в результате их столкновений с другими частицами, которое можно назвать эффектом трения; соответственно вектор  $\mathbf{g}$  называют коэффициентом динамического трения. Второе слагаемое описывает поток, связанный с производными функции распределения по компонентам скорости. Он направлен в сторону уменьшения функции распределения, т. е. стремится выровнять ее. По аналогии с диффузионным потоком в конфигурационном пространстве (пропорциональным градиенту концентрации) этот поток называют диффузией в пространстве скоростей, а тензор  $\check{\mathbf{D}}_v$  — коэффициентом диффузии.

Подставляя столкновительный член (3.32) в (3.17), приведем кинетическое уравнение к виду

$$\partial(nf)/\partial t + \operatorname{div}(\mathbf{v}nf) + \operatorname{div}_{\mathbf{v}}[(\mathbf{F}/m)nf + \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{v}}] = 0. \quad (3.36)$$

Второй член в уравнении определяет дивергенцию потока в координатном пространстве, связанного с движением частиц, третий член — дивергенцию потока в пространстве скоростей, связанного с внешней силой  $\mathbf{F}$  и со столкновениями. Сумма этих членов определяет дивергенцию в шестимерном пространстве. Поэтому кинетическое уравнение в форме (3.36) представляет собой уравнение непрерывности для функции распределения в шестимерном пространстве. Его называют *уравнением Фоккера — Планка*. Использование этого уравнения в ряде случаев существенно облегчает решение кинетических задач.

## ГЛАВА 4 РАВНОВЕСНАЯ ПЛАЗМА

### § 4.1. Функция распределения в равновесной плазме

В этой главе рассмотрим характеристики плазмы, находящейся в состоянии статистического или термодинамического равновесия. Прежде всего определим функции распределения частиц в равновесной плазме. В замкнутой системе при отсутствии внешних сил равновесное состояние является пространственно-однородным. Кинетическое уравнение (3.17) для частиц однородной плазмы при отсутствии внешних сил имеет вид

$$\partial(n_\alpha f_\alpha)/\partial t = \delta(n_\alpha f_\alpha)/\delta t. \quad (4.1)$$

Для стационарного состояния уравнение сводится к условию обращения в нуль столкновительного члена. В случае, когда существуют только упругие столкновения, его можно записать следующим образом:

$$\sum_{\beta} S_{\alpha\beta}^e = n_\alpha \sum_{\beta} n_\beta \int \int_{(\mathbf{v}_\beta)} (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_\beta = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2), очевидно, удовлетворяется, если для функций распределения выполняется соотношение

$$f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) = f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta) \quad (4.3)$$

для любых пар частиц.

Как будет показано в § 4.2, при произвольных начальных условиях функции распределения со временем стремятся к стационарному состоянию, определяемому соотношением (4.3). Прологатифмировав это соотношение, получим

$$\ln f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) + \ln f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) = \ln f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \ln f_\beta(\mathbf{v}_\beta). \quad (4.4)$$

Это равенство означает, что сумма логарифмов функции распределения не изменяется при столкновениях. Как было установлено, имеется четыре независимые комбинации скоростей частиц, сумма которых не изменяется при упругих столкновениях, — три компоненты импульса  $p_k = mv_k$  и кинетическая энергия  $K = mv^2/2$  (см. § 2.1). Очевидно,  $\ln f(\mathbf{v})$  должен быть их линейной комбинацией:

$$\begin{aligned} \ln f_\alpha &= a + b_x m_\alpha v_{\alpha x} + b_y m_\alpha v_{\alpha y} + b_z m_\alpha v_{\alpha z} - c m_\alpha v_\alpha^2/2 = \\ &= a' - c (m_\alpha/2) [(v_{\alpha x} - b_x/c)^2 + (v_{\alpha y} - b_y/c)^2 + (v_{\alpha z} - b_z/c)^2]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Нетрудно убедиться, что при этом сумма  $\ln f$  для любых пар частиц сохраняется, если постоянные коэффициенты  $a$ ,  $b_h$ ,  $c$  одинаковы для всех частиц.

Обозначая  $b_x/c = u_x$ ,  $b_y/c = u_y$ ,  $b_z/c = u_z$ ,  $c = 1/T$ , находим

$$f_\alpha = A \exp \{ -(m_\alpha/2T) [(v_{\alpha x} - u_x)^2 + (v_{\alpha y} - u_y)^2 + (v_{\alpha z} - u_z)^2] \} = A \exp [(-m_\alpha/2T) (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2]. \quad (4.6)$$

Константу  $A$  можно найти из условия нормировки (3.4):

$$A \int_{(v)} \exp \left[ -\frac{m_\alpha}{2T} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \right] d^3 v = \\ = A \int_{(v_x)} \int_{(v_y)} \int_{(v_z)} \exp \left[ -\frac{m_\alpha}{2T} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \right] dv_x dv_y dv_z = 1. \quad (4.7)$$

Тройной интеграл здесь является произведением трех однотипных интегралов, каждый из которых равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m_\alpha}{2T} (v_h - u_h)^2 \right] dv_h = \\ = \sqrt{\frac{2T}{m_\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2T}{m_\alpha}}.$$

Подставляя этот результат в (4.7), получаем  $A = (m_\alpha/2\pi T)^{3/2}$ . Таким образом, функция распределения принимает вид

$$f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = (m_\alpha/2\pi T)^{3/2} \exp [ - (m_\alpha/2T) (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u})^2 ]. \quad (4.8)$$

Описываемое ею распределение скоростей называется, как известно, *распределением Максвелла*.

Функция распределения (4.8) может быть представлена как произведение одномерных функций  $f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = f_x(v_{\alpha x}) f_y(v_{\alpha y}) f_z(v_{\alpha z})$ , где

$$f_h(v_{\alpha h}) = \left( \frac{m_\alpha}{2\pi T} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{m_\alpha}{2T} (v_{\alpha h} - u_h)^2 \right]. \quad (4.9)$$

Каждая из них, как следует из (3.5), дает распределение по одной из компонент скорости.

Входящие в функцию распределения (4.8) параметры  $\mathbf{u}$  и  $T$  определяют среднюю скорость и среднюю энергию частиц. Покажем это. Среднее значение любой из компонент скорости можно найти

с помощью одномерных функций распределения (4.9):

$$\begin{aligned}
 \langle v_{\alpha k} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} v_{\alpha k} f_k(v_{\alpha k}) dv_{\alpha k} = \\
 &= \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\alpha k} \exp \left[ -\frac{m_{\alpha}}{2T} (v_{\alpha k} - u_k)^2 \right] dv_{\alpha k} = \\
 &= \frac{u_k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = u_k. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Среднюю скорость  $\mathbf{u}$  называют еще *направленной скоростью*. Поскольку вектор  $\mathbf{u}$  одинаков для частиц всех сортов, он определяет движение всей плазмы в целом. Поэтому при рассмотрении физических характеристик удобно перейти в систему отсчета, в которой направленная скорость равна нулю. Найдем среднюю кинетическую энергию частиц в этой системе — среднюю энергию хаотического движения. Составляющие средней энергии, связанные с каждой из компонент скорости, равны

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{m_{\alpha} (v_{\alpha k} - u_k)^2}{2} \right\rangle &= \frac{m_{\alpha}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (v_k - u_k)^2 f_k(v_k) dv_k = \\
 &= \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_{\alpha} (v_k - u_k)^2}{2} \exp \left[ -\frac{m_{\alpha} (v_k - u_k)^2}{2T} \right] dv_k = \\
 &= \frac{T}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{T}{2}.
 \end{aligned}$$

Их сумма дает среднюю энергию:

$$\left\langle \frac{m_{\alpha} (v_{\alpha} - \mathbf{u})^2}{2} \right\rangle = \sum_k \left\langle \frac{m_{\alpha} (v_{\alpha k} - u_k)^2}{2} \right\rangle = \frac{3T}{2}. \quad (4.11)$$

Формула (4.11) показывает, что параметр  $T$ , определяющий среднюю энергию хаотического движения, представляет собой температуру системы. Таким образом, упругие столкновения приводят к максвелловскому распределению скоростей частиц всех сортов [см. (4.8)] с одинаковой средней энергией и одинаковой направленной скоростью.

Определим теперь влияние неупругих столкновений на функцию распределения частиц равновесной плазмы. Для этого воспользуемся формулой (3.27) для столкновительного члена, учитывающей неупругие столкновения. В ее подынтегральные выражения, как и в (4.2), входит разность произведений функций распределения до и после столкновения ( $f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta}$ ). Поэтому условие обращения

в нуль столкновительного члена и для неупругих столкновений можно записать в форме (4.3) или (4.4). Однако для неупругих столкновений надо учитывать возможность изменения внутреннего состояния частиц; при этом в закон сохранения энергии входят не кинетические, а полные энергии частиц  $E_{\alpha j} = m_{\alpha} v_{\alpha}^2/2 + \mathcal{E}_{\alpha j}$  ( $\mathcal{E}_{\alpha j}$  — внутренняя энергия в состоянии  $j$ ). Соответственно  $\ln f$  для частиц каждого сорта должен быть линейной комбинацией компонент импульса и полной энергии [ср. (4.5)]:

$$\ln f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}, j_{\alpha}) = a + b m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} - c E_{\alpha j} = a + b m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} - c m_{\alpha} v_{\alpha}^2/2 - c \mathcal{E}_{\alpha j}. \quad (4.12)$$

С помощью (4.12) получим так же, как и раньше, функцию распределения

$$f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}, j_{\alpha}) = A \exp[-m_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u})^2/2T] \exp(-\mathcal{E}_{\alpha j}/T); \quad (4.13)$$

она дает распределение как по скоростям, так и по внутренним состояниям. Нормировочная постоянная  $A$  определяется в результате интегрирования (4.13) по скоростям и суммирования по всем состояниям дискретного спектра:

$$A \sum_j \exp(-\mathcal{E}_j/T) \int_{(\mathbf{v})} \exp[-m_{\alpha}(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2/2T] d^3 v = 1;$$

$$A = \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi T}\right)^{3/2} \left[ \sum_j \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_j}{T}\right) \right]^{-1} = \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi T}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \left[ \sum_j^* g_j \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_j}{T}\right) \right]^{-1}.$$

Отметим, что при суммировании по  $j$  в  $\sum_j$  учитываются все состояния независимо от вырождения; в  $\sum_j^*$  вырожденные состояния учитываются одним слагаемым, включающим статистический вес  $g_j$ .

Подставляя  $A$  в (4.13), находим нормированную функцию распределения. Ее можно представить в виде

$$f(\mathbf{v}_{\alpha}, j) = f_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_{\alpha}) f_j(j), \quad (4.14)$$

где первый множитель представляет собой максвелловское распределение по скоростям (4.8), а второй определяет распределение по внутренним состояниям

$$f_j = \frac{\exp(-\mathcal{E}_j/T)}{\sum_l \exp(-\mathcal{E}_l/T)} = \frac{\exp(-\mathcal{E}_j/T)}{\sum_l^* g_l \exp(-\mathcal{E}_l/T)}, \quad (4.15)$$

которое называют *распределением Больцмана*. Таким образом, и при неупругих столкновениях равновесное распределение частиц по скоростям остается максвелловским. В то же время неупругие столкновения приводят к равновесному распределению между различ-



ными внутренними состояниями атомов и ионов, определяемому их энергией.

Равновесное состояние с максвелловской функцией распределения по скоростям может быть и при наличии внешних постоянных потенциальных полей, если направленная скорость равна нулю ( $\mathbf{u} = 0$ ). Разумеется, в этом случае плазму нельзя уже считать однородной. Кинетическое уравнение (3.17) для стационарной функции распределения [при  $\partial(nf)/\partial t = 0$ ] принимает вид

$$\mathbf{v} \operatorname{grad} (nf) + (\mathbf{F}/m) \operatorname{grad}_{\mathbf{v}}(nf) = \delta (nf)/\delta t \quad (4.16)$$

(для частиц любого сорта).

Предположим, что распределение скоростей определяется формулой (4.8) при  $\mathbf{u} = 0$ :

$$f(\mathbf{v}) = (m/2\pi T)^{3/2} \exp(-m\mathbf{v}^2/2T). \quad (4.17)$$

Подставим его в (4.16). Учитывая, что для этого распределения столкновительный член  $\delta(n, f)/\delta t$  обращается в нуль, получаем  $f\mathbf{v} \operatorname{grad} n - f(n/T)\mathbf{v} \mathbf{F} = 0$ . Далее, используя выражение силы через потенциал [ $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r})$ ], приведем это уравнение к виду  $(1/n)\operatorname{grad} n + (1/T)\operatorname{grad} U = 0$ .

Интегрируя, получим зависимость концентрации от координат:

$$n = n_0 \exp(-U(\mathbf{r})/T), \quad (4.18)$$

где  $n_0$  — концентрация в точке  $U = 0$ . Эта формула называется *формулой Больцмана*, а распределение  $nf$ , определяемое (4.17) и (4.18), — *распределением Максвелла — Больцмана*.

## § 4.2. Установление равновесной функции распределения

В предыдущем параграфе были определены функции распределения, удовлетворяющие стационарному кинетическому уравнению для равновесных условий. Покажем теперь, что любое однородное в пространстве распределение при отсутствии внешних полей со временем стремится к равновесному. Введем функцию

$$H(t) = - \sum_{\alpha} \int_{(\mathbf{v}_{\alpha})} n_{\alpha} f_{\alpha} \ln(n_{\alpha} f_{\alpha}) d^3 v_{\alpha}. \quad (4.19)$$

В соответствии с термодинамическим определением она равна энтропии единицы объема. Найдем характер изменения функции  $H$  во времени. Для этого вычислим ее производную

$$\frac{dH}{dt} = - \sum_{\alpha} \int_{(\mathbf{v}_{\alpha})} [1 + \ln(n_{\alpha} f_{\alpha})] \frac{\partial(n_{\alpha} f_{\alpha})}{\partial t} d^3 v_{\alpha}. \quad (4.20)$$

В рассматриваемых условиях изменение функции распределения со временем определяется столкновительным членом [см. (4.1)].

Полагая, что существенны только упругие столкновения, подставим в (4.20) столкновительный член в форме (4.2). Тогда

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha, \beta} n_{\alpha} n_{\beta} \iiint [1 + \ln(n_{\alpha} f_{\alpha})] [f_{\alpha} f_{\beta} - f'_{\alpha} f'_{\beta}] v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_{\alpha} d^3 v_{\beta}, \quad (4.21)$$

где суммирование нужно распространить на столкновения всех возможных сортов частиц  $\alpha$  и  $\beta$ .

Рассмотрим один из членов этой двойной суммы:

$$J_{\alpha\beta} = n_{\alpha} n_{\beta} \iiint [1 + \ln(n_{\alpha} f_{\alpha})] [f_{\alpha} f_{\beta} - f'_{\alpha} f'_{\beta}] v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_{\alpha} d^3 v_{\beta}. \quad (4.22)$$

Переобозначим формально скорости под интегралом  $v_{\alpha}$  и  $v_{\beta}$  (без штриха) на  $v'_{\alpha}$  и  $v'_{\beta}$  (со штрихом) и наоборот. Поскольку столкновения обратимы (каждому столкновению с изменением скоростей  $v'_{\alpha}, v'_{\beta} \rightarrow v_{\alpha}, v_{\beta}$  соответствует обратное), это приведет лишь к изменению порядка суммирования столкновений, но не изменит самого интеграла. После переобозначений он примет вид

$$J_{\alpha\beta} = n_{\alpha} n_{\beta} \iiint [1 + \ln n_{\alpha} f'_{\alpha}] [f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta}] v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v'_{\alpha} d^3 v'_{\beta}. \quad (4.23)$$

При упругих столкновениях относительная скорость  $v_{\alpha\beta}$  и сечение  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $v_{\alpha\beta}$ ) остаются без изменений. Кроме того, выполняется равенство  $d^3 v'_{\alpha} d^3 v'_{\beta} = d^3 v_{\alpha} d^3 v_{\beta}$ , так как якобиан перехода от переменных  $v_{\alpha}, v_{\beta}$  к  $v'_{\alpha}, v'_{\beta}$  равен единице (см. с. 86). Учитывая это и складывая (4.22) и (4.23), получаем

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} n_{\alpha} n_{\beta} \iiint \left( \ln \frac{f'_{\alpha}}{f_{\alpha}} \right) (f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta}) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_{\alpha} d^3 v_{\beta}. \quad (4.24)$$

Аналогичное выражение можно получить для  $J_{\beta\alpha}$  (из (4.24) оно получается в результате обмена индексов  $\alpha$  и  $\beta$ ). Сумма их равна

$$J_{\alpha\beta} + J_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} n_{\alpha} n_{\beta} \iiint (f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta}) \left( \ln \frac{f'_{\alpha} f'_{\beta}}{f_{\alpha} f_{\beta}} \right) \times \\ \times v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_{\alpha} d^3 v_{\beta}.$$

Подставляя ее в (4.21), находим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta} n_{\alpha} n_{\beta} \iiint (f_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta}) \left( \ln \frac{f_{\alpha} f'_{\beta}}{f_{\alpha} f_{\beta}} \right) \times \\ \times v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_{\alpha} d^3 v_{\beta}. \quad (4.25)$$

Аналогичное выражение для  $dH/dt$  легко найти и при учете неупругих столкновений. Для этого надо подставить в (4.20) интеграл

столкновений в форме (3.27) и при преобразованиях использовать принцип детального равновесия (2.83). В результате получим уравнение, отличающееся от (4.25) лишь тем, что правая часть суммируется по всем состояниям частиц  $\alpha$  и  $\beta$  до и после столкновения.

В подынтегральное выражение каждого слагаемого (4.25) входит функция  $(f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) \ln(f'_\alpha f'_\beta / f_\alpha f_\beta)$ . Если  $f'_\alpha f'_\beta > f_\alpha f_\beta$ , то оба множителя в ней положительны; если  $f'_\alpha f'_\beta < f_\alpha f_\beta$ , оба множителя отрицательны. Поэтому независимо от значения скоростей функция не может быть отрицательной. Поскольку этот вывод справедлив для любого из слагаемых, входящих в (4.25) (и в аналогичное выражение, учитывающее неупругие столкновения), можно заключить, что

$$dH/dt \geq 0, \quad (4.26)$$

т. е. функция  $H$  может только увеличиваться со временем (этот результат называют *H-теоремой Больцмана*). В то же время функция  $H$  не может стать бесконечно большой. Действительно, в определяющих ее интегралах (4.19) при конечных скоростях подынтегральные выражения конечны, а при  $v \rightarrow \infty$  функции распределения  $f(v) \rightarrow 0$  и входящие в интегралы произведения  $nf \ln(nf)$  также стремятся к нулю. Таким образом, при любых начальных распределениях скоростей частиц через достаточно большое время должно установиться стационарное распределение, при котором  $dH/dt = 0$ . Поскольку все входящие в (4.25) слагаемые неотрицательны, обращение в нуль суммы возможно, только если для любых столкновений удовлетворяются равенства (4.4) или

$$f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) = f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta). \quad (4.27)$$

Как было установлено в предыдущем параграфе, эти равенства выполняются для всех столкновений при равновесных (максвелловских) функциях распределения по скоростям и при равновесных распределениях по внутренним состояниям.

Таким образом, столкновения между частицами приводят в однородной плазме к установлению равновесного распределения частиц; столкновения между частицами каждого сорта приводят к «максвеллизации» распределения скоростей; столкновения частиц разных сортов ведут к выравниванию средних скоростей и температур; неупругие столкновения способствуют установлению равновесного распределения по внутренним состояниям частиц.

### § 4.3. Ионизационное равновесие

Как было установлено, в равновесной плазме распределение частиц по скоростям является максвелловским, причем определяющие его температура и направленная скорость одинаковы для всех компонент. Поскольку направленная скорость характеризует движение плазмы в целом, она не может влиять на процессы, проис-

ходящие в плазме. Поэтому характеристики равновесной плазмы однозначно определяются ее температурой и концентрацией ее компонент. Знание функции распределения позволяет выяснить, как происходят в плазме любые процессы, поперечное сечение которых известно. С ее помощью, в частности, определяется эффективность ионизации и рекомбинации и из условия баланса этих процессов (ионизационного равновесия) — соотношение между концентрациями нейтральных и заряженных частиц. Однако это соотношение в замкнутой равновесной плазме можно найти и без анализа кинетики процессов ионизации и рекомбинации, основанного на использовании поперечных сечений. Для его определения можно воспользоваться общими термодинамическими соотношениями.

Рассмотрим более подробно условия ионизационного равновесия в замкнутой плазме. Как указывалось в § 2.8 и 2.10, в плазме возможны различные процессы ионизации и рекомбинации, причем каждому процессу ионизации соответствует обратный процесс рекомбинации. Анализ каждого из них позволяет установить соотношение между концентрациями нейтральных и заряженных частиц. Рассмотрим для примера два процесса: 1) ударную ионизацию  $L + e \rightleftharpoons L^+ + 2e$  (обратный процесс — тройная рекомбинация); 2) фотоионизацию  $L + h\nu \rightleftharpoons L^+ + e$  (обратный процесс — рекомбинация с излучением).

Для первого процесса скорость протекания прямой реакции (ударной ионизации) пропорциональна концентрациям нейтральных атомов и электронов  $Q_{i1} = k_{i1}n_a n_e$ . Соответственно скорость обратной реакции пропорциональна квадрату концентрации электронов и концентрации ионов  $Q_{r1} = k_{r1}n_e^2 n_i$ . В замкнутой равновесной системе скорости прямого и обратного процессов должны быть равны. Приравняв  $Q_i$  к  $Q_r$ , получаем соотношение между концентрациями частиц в виде

$$n_e n_i / n_a = k_{i1} / k_{r1} = \mathcal{K}_1. \quad (4.28)$$

Для второго процесса (фотоионизации) скорости прямой и обратной реакций определяются формулами  $Q_{i2} = k_{i2} I n_a$ ,  $Q_{r2} = k_{r2} n_e n_i$ , где  $I$  — интенсивность равновесного излучения. Приравняв их, получаем

$$n_e n_i / n_a = I k_{i2} / k_{r2} = \mathcal{K}_2. \quad (4.29)$$

Величины  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  являются константами равновесия рассматриваемых процессов. Так как оба процесса идут одновременно в одной и той же системе, то из (4.28), (4.29) следует, что  $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ . Это означает, что в термодинамически равновесной плазме соотношение между нейтральными и заряженными частицами не определяется конкретным видом реакций ионизации и рекомбинации. Константа равновесия  $\mathcal{K}$  зависит только от температуры и внутренней структуры частиц.

Для определения этой константы воспользуемся термодинамическими соотношениями для обратимых реакций. В общем виде обратимую реакцию можно записать следующим образом:



где  $A, B, \dots$  — исходные компоненты, а  $M, L, \dots$  — продукты реакции; малыми буквами обозначены стехиометрические коэффициенты, определяющие соотношение между числом частиц различного сорта, участвующих в реакции;  $\Delta^{\mathcal{E}}$  — энергетический выход реакции, равный разности сумм внутренних энергий исходных компонент и продуктов реакции.

В состоянии равновесия полная энтропия системы должна быть максимальна. Это означает, что частные производные от энтропии по числу частиц любого сорта должны быть равны нулю. Поскольку общая энтропия аддитивно складывается из энтропии отдельных частей всей системы

$$S = S_A + S_B + \dots + S_L + S_M + \dots,$$

то условие максимума энтропии имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial N_A} = \frac{\partial S_A}{\partial N_A} + \frac{\partial S_B}{\partial N_B} \frac{\partial N_B}{\partial N_A} + \dots + \frac{\partial S_L}{\partial N_L} \frac{\partial N_L}{\partial N_A} + \frac{\partial S_M}{\partial N_M} \frac{\partial N_M}{\partial N_A} + \dots = 0,$$

где, очевидно,  $\partial N_B / \partial N_A = b/a, \dots; \partial N_L / \partial N_A = -l/a; \partial N_M / \partial N_A = -m/a, \dots$ . Для каждой компоненты величина  $\partial S_k / \partial N_k$  равна отношению химического потенциала ( $\mu_k$ ) к температуре. Поэтому условие равновесия реакции можно записать следующим образом:

$$a\mu_a + b\mu_b + \dots = l\mu_l + m\mu_m + \dots \quad (4.30)$$

Условие (4.30) определяет так называемый *закон действующих масс*.

Рассмотрим обратимую реакцию ионизации. В общем виде ее можно записать с помощью равенства  $q + A \rightleftharpoons e + A^+ + q$ , где  $q$  — частица, вызывающая ионизацию (это может быть электрон, фотон, ион или нейтральный атом). Для такой реакции условие равновесия (4.30) принимает вид

$$\mu_a = \mu_e + \mu_i \quad (4.31)$$

( $\mu_q$  входят справа и слева и могут быть сокращены). Химический потенциал компонент плазмы определим по формуле для идеального газа

$$\mu_\alpha = -T \ln (\Sigma_\alpha / N_\alpha), \quad (4.32)$$

где  $N_\alpha = n_\alpha V$  — число частиц данного сорта в объеме плазмы;  $\Sigma_\alpha$  — так называемая статистическая сумма

$$\Sigma_\alpha = \sum_j g_{\alpha j} \exp(-E_{\alpha j} / T). \quad (4.33)$$

В ней суммирование распространено на все состояния частиц  $\alpha$ ; множитель  $\exp(-E_{\alpha j}/T)$  определяет относительную вероятность состояния с энергией  $E_{\alpha j}$  ( $E_{\alpha j}$  отсчитаны от общего уровня группы частиц, участвующих в реакции);  $g_{\alpha j}$  — статистический вес. Подставляя (4.32) в (4.31), получаем условие равновесия в виде

$$T \ln (\Sigma_{\alpha}/N_{\alpha}) = T \ln (\Sigma_e/N_e) + T \ln (\Sigma_i/N_i)$$

или

$$N_e N_i / N_{\alpha} = \Sigma_e \Sigma_i / \Sigma_{\alpha}. \quad (4.34)$$

Уточним выражение для статистической суммы  $\Sigma$  [см. (4.33)] (для простоты индекс  $\alpha$  будем опускать). Входящая в нее полная энергия частиц складывается из энергии, связанной с внутренними степенями свободы  $\mathcal{E}_j$ , и энергии поступательного движения  $K$ . Соответственно величину  $\Sigma$  можно записать следующим образом:

$$\Sigma = \sum_{j,v} g_j g_v \exp[-(\mathcal{E}_j + K)/T] = \sum_j g_j \exp(-\mathcal{E}_j/T) \times \\ \times \sum_v g_v \exp(-K/T), \quad (4.35)$$

где  $\sum_j$  означает суммирование по внутренним состояниям, а  $\sum_v$  — по скоростям. Первую сумму удобно представить в виде

$$\sum_j g_j \exp(-\mathcal{E}_j/T) = \exp(-\mathcal{E}_0/T) \sum_j g_j \exp(-\Delta \mathcal{E}_j/T) = \\ = \exp(-\mathcal{E}_0/T) G, \quad (4.36)$$

где выделена энергия основного (наинизшего) состояния частицы  $\mathcal{E}_0$  и введена «внутренняя» статистическая сумма  $G$ . Энергию  $\mathcal{E}_0$ , как указывалось, надо отсчитывать от общего уровня системы. При этом, очевидно, разность энергии системы электрон — ион до и после ионизации равна энергии ионизации

$$\mathcal{E}_{0\alpha} - \mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0e} = -\mathcal{E}_i. \quad (4.37)$$

Именно этот дефект энергий реакции ионизации входит в выражение для соотношения статистических сумм (4.34).

Внутренние статистические суммы атомов и ионов можно найти по формуле

$$G = \sum_j (2l + 1)(2s + 1) \exp(-\Delta \mathcal{E}_j/T), \quad (4.38)$$

где квантовые числа  $l$  и  $s$  определяют орбитальный момент количества движения и спин. При  $T < \Delta \mathcal{E}_1$  члены суммы (4.38) быстро падают. Обычно при расчетах для атомов в этой сумме можно ограничиться двумя членами, для ионов — одним. У электронов нет внутренней структуры, и их внутренний статистический вес равен  $G = 2$ , он соответствует двум направлениям спина.

Определим теперь статистическую сумму, связанную с поступательными степенями свободы. Найдем число возможных состояний,

исходя из представлений квазиклассического приближения квантовой механики. Соотношение неопределенностей связывает интервалы координат и импульсов каждой частицы, которые нельзя различить:  $\delta x \delta p_x \approx \delta y \delta p_y \approx \delta z \delta p_z \approx h$ . Относя их к одному состоянию, определим объем соответствующей ячейки шестимерного пространства:  $\delta^{(6)} R = \delta x \delta y \delta z \delta v_x \delta v_y \delta v_z \approx h^3/m^3$ .

Число состояний, приходящихся на интервал скоростей  $\Delta^{(3)} v$  во всем объеме плазмы  $V$ , равно

$$g_v = \frac{\Delta^{(6)} R}{\delta^{(6)} R} = \frac{V^{(3)} \Delta^3 v}{\delta^{(6)} R} = \frac{m^3 V}{h^3} \Delta^{(3)} v.$$

Подставляя его в статистическую сумму, получаем

$$\Sigma_v = \sum_v g_v \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) = \frac{m^3}{h^3} V \sum_v \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) \Delta^{(3)} v.$$

Заменяя суммирование по скоростям интегрированием, находим

$$\Sigma_v = \frac{m^3}{h^3} V \int_{(v)} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) d^{(3)} v = \frac{V}{h^3} (2\pi mT)^{3/2} \quad (4.39)$$

(см. вычисление этого интеграла на с. 93). С помощью (4.35), (4.36), (4.39) получим полную статистическую сумму

$$\Sigma = \frac{V (2\pi mT)^{3/2}}{h^3} G \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_0}{T}\right). \quad (4.40)$$

Используя (4.40) для частиц всех сортов и учитывая соотношение (4.37), приведем формулу (4.34) к виду

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{(2\pi m_e)^{3/2} 2G_i}{h^3 G_a} T^{3/2} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_i}{T}\right). \quad (4.41)$$

Эта формула, определяющая константу ионизационного равновесия, называется *формулой Саха*. Она позволяет вычислить соотношение между концентрациями заряженных и нейтральных частиц. Учтя, что в квазинейтральной плазме  $n_e = n_i = n$ , получим из (4.41)

$$\rho = \frac{n}{n_a} = \frac{(2\pi m_e)^{3/4}}{h^{3/2} n_a^{1/2}} \left(\frac{2G_i}{G_a}\right)^{1/2} T^{3/4} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_i}{2T}\right). \quad (4.42)$$

Подставляя в (4.42) численные значения констант и полагая  $G_i \approx G_a$ , можно приближенно записать (4.42) в виде

$$\rho \approx 10^{11} n_a^{-1/2} T^{3/4} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_i}{2T}\right).$$

Здесь  $T$  выражено в эв,  $n$  — в  $см^{-3}$ . Степень ионизации газа определяется обычно как отношение числа ионов ( $n_i$ ) к полному числу тяжелых частиц — атомов и ионов ( $n_0 = n_i + n_a$ ). В соответствии с (4.42) она равна  $\eta = n_i/n_0 = \rho/(1 + \rho)$ .

На рис. 4.1 представлены зависимости степени ионизации от температуры для водорода, гелия и цезия, вычисленные с помощью (4.42). Видно, что при достаточно больших температурах степень ионизации резко увеличивается, достигая при  $T \approx 0,05 \div 0,2 \mathcal{E}_i$  значений, близких к единице. Кривые рис. 4.1 характеризуют переход от слабоионизованного состояния газа к состоянию ионизованной плазмы.

При выводе формулы Саха принималась во внимание лишь однократная ионизация. Для достаточно высоких температур следует учитывать также и процессы многократной ионизации атомов с  $Z > 1$ . Запишем соответствующую им реакцию ионизации

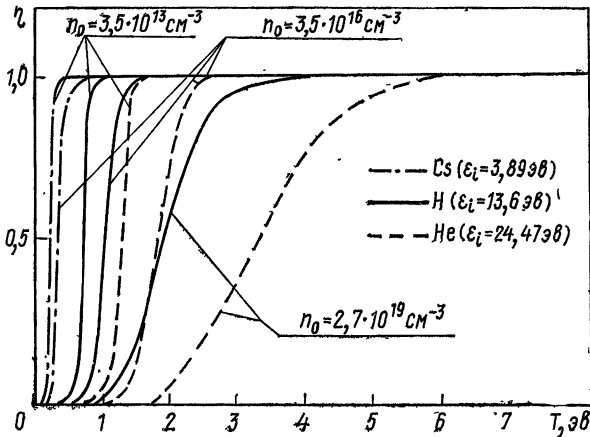
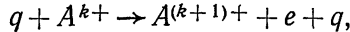


Рис. 4.1

где  $A^{k+}$  — ион с зарядовым числом  $k$ . Это равенство аналогично равенству для однократной ионизации (отличие состоит в замене атома  $A$  на ион  $A^{k+}$ ). Поэтому оно приводит к формуле Саха, аналогичной (4.41):

$$\frac{n_e n_{i(k)}}{n_{i(k+1)}} = \frac{(2\pi m_e)^{3/2} 2G_{i(k+1)}}{h^3 G_{i(k)}} T^{3/2} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{i(k)}}{T}\right). \quad (4.43)$$

В ней индекс  $i(k)$  относится к иону  $A^{k+}$ , индекс  $i(k+1)$  — к иону  $A^{(k+1)+}$ ;  $\mathcal{E}_{i(k)}$  представляет собой энергию «отрыва»  $(k+1)$ -го электрона. Формулы (4.43) для разных  $k$  позволяют определить равновесные концентрации ионов с любым зарядом.

#### § 4.4. Частичное равновесие в плазме

Плазма, создаваемая в лабораторных условиях, как правило, далека от состояния термодинамического равновесия, поскольку ее даже приближенно нельзя считать замкнутой системой. Находясь в контакте с окружающей средой, плазма непрерывно теряет



запасенную в ней энергию по различным каналам, главными из которых чаще всего оказываются электромагнитное излучение и перенос энергии заряженными и нейтральными частицами на стенки ограничивающего плазму баллона. Для поддержания плазменного состояния необходима компенсация энергетических потерь за счет внешних источников. В тех случаях, когда полные потоки поступающей и уходящей энергии одинаковы, достигается стационарное состояние плазмы, которое, однако, термодинамически не равновесно, поскольку поступление и уход энергии из плазмы осуществляются обычно по разным каналам. В отсутствие термодинамического равновесия средние энергии электронов, ионов и атомов могут быть различными, а функция распределения частиц по скоростям может отличаться от максвелловской.

В некоторых случаях может иметь место так называемое *частичное равновесие* по отношению к отдельным процессам. Как будет показано ниже, в плазме при не слишком больших плотностях частиц существует состояние с почти максвелловским распределением электронов и ионов по скоростям, для которого  $T_i \approx T_e$ , но  $T_e \neq T_i$ . Такую плазму принято называть *неизотермической*. Распределение для частиц данного сорта практически максвелловское, если для них скорость обмена энергией с частицами других сортов и с внешней средой мала по сравнению со скоростью обмена энергией между электронами и тяжелыми частицами происходит медленно. Поэтому можно говорить отдельно о частичном равновесии электронной компоненты и тяжелых частиц. Все процессы, в которых участвует только одна компонента, в этих условиях должны протекать так же, как и в термодинамически равновесной плазме. В процессах ионизации и рекомбинации участвуют, вообще говоря, все три компонента плазмы. В связи с этим вопрос о применимости термодинамических соотношений к расчету баланса числа заряженных частиц в плазме должен решаться с учетом конкретных условий.

Как правило, лишь одна из возможных реакций ионизации и одна из реакций рекомбинации являются определяющими. Если они идут по одному и тому же пути, то процесс взаимно обратим и для вычисления константы ионизационного равновесия можно пользоваться соотношениями, полученными из термодинамических соображений. Действительно, вероятности актов ионизации и рекомбинации зависят от относительной скорости взаимодействующих частиц. Если массы частиц сильно различаются, то приближенно можно считать, что относительная скорость равна скорости легкой частицы. Поэтому условия применимости формулы Саха сводятся к требованиям, чтобы прямая и обратная реакции, обеспечивающие баланс заряженных частиц, шли по одному пути и чтобы понятие частичного равновесия было применимо к легким компонентам плазмы. В частности, если ионизация и рекомбинация происходят вследствие неупругих соударений тяжелых частиц с электронами,

то в состоянии частичного равновесия должен находиться электронный газ. Если же определяющими процессами являются фотоионизация и излучательная рекомбинация, то в равновесии с электронным газом должно, кроме того, находиться излучение.

Для оценок условий равновесия с излучением пользуются понятием оптической толщины. Известно, что интенсивность направленного потока излучения при прохождении через однородную плазму (так же как и через любую среду) ослабляется по экспоненциальному закону  $I = I_0 \exp(-\gamma x)$ , причем коэффициент ослабления  $\gamma$  характеризует как поглощение, так и рассеяние излучения. Если произведение  $\gamma$  на характерный размер плазмы  $L$  (называемое *оптической толщиной*) мало, то по отношению к излучению плазма является *открытой системой*. Соответственно вероятность взаимодействия как внешнего, так и возникшего внутри плазмы излучения с частицами оказывается пренебрежимо малой. В противоположном случае (оптически плотной плазмы) выход излучения в окружающее пространство возможен лишь в результате многократного «переизлучения» и рассеяния. Излучение оказывается «запертым» в объеме плазмы. При этом число квантов электромагнитного поля, излучаемых с поверхности плазмы в единицу времени, много меньше числа квантов, поглощаемых и излучаемых частицами в объеме, и можно говорить, что в объеме существует равновесная плотность излучения.

В реальных условиях нередки случаи, когда плазма по отношению к излучению не является замкнутой системой. При этом возникающее в результате рекомбинации излучение свободно выходит из плазмы. В таких условиях при не слишком высокой концентрации заряженных частиц ионизация и рекомбинация идут разными путями. Ионизация осуществляется электронным ударом, а устранение заряженных частиц в объеме — путем рекомбинации с излучением. Если эффективность этого механизма устранения значительно превосходит эффективность других механизмов (в частности, связанных с уходом частиц из объема), то стационарное состояние достигается при равенстве скоростей названных процессов  $Q_i = k_{i1} n_a n_e$ ,  $Q_r = k_{r2} n_i n_e$ , которое приводит к соотношению

$$n_i/n_a = k_{i1}/k_{r2}. \quad (4.44)$$

Это соотношение (называемое *формулой Эльверта*) показывает, что в рассмотренных условиях степень ионизации определяется только температурой и не зависит от концентрации частиц. Очевидно, что в зависимости от конкретных механизмов ионизации и устранения заряженных частиц возможны также иные соотношения, описывающие ионизационное равновесие в плазме.

Вопрос о применимости тех или иных соотношений в реальных системах сводится к анализу конкретного состояния плазмы. Этот анализ требует установления вида функции распределения частиц разных сортов и выяснения характера взаимодействия между частицами и излучением.

ГЛАВА 5  
**ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
 В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

**§ 5.1. О влиянии электрического поля  
 на распределение заряженных частиц по скоростям**

Под воздействием внешних сил происходит отклонение функций распределения частиц от равновесных. При этом могут измениться не только средняя энергия и направленная скорость частиц, но и вид функции распределения—ее зависимость от компонент скорости. Влияние сил на функцию распределения частиц различных сортов различно. В электрическом поле заряженные частицы ускоряются, изменяя свою энергию. Магнитное поле изменяет траекторию движения. На нейтральные частицы эти силы вообще не действуют. В большинстве случаев нейтральные частицы плазмы имеют хороший контакт с окружающей средой (например, стенками баллонов, содержащих плазму). Поэтому средняя энергия нейтральных частиц ниже, чем энергия других компонент, а их распределение по скоростям ближе к равновесному.

Оценим, при каких условиях электрическое поле существенно влияет на распределение по скоростям заряженных частиц слабоионизованной плазмы. Ускоряясь в электрическом поле, заряженные частицы за время  $\tau$  между столкновениями приобретают дополнительную скорость

$$\Delta v_E \approx (eE/m) \tau \approx eE/mv. \quad (5.1)$$

Соответствующее приращение энергии равно

$$\Delta K_E = m (v + \Delta v_E)^2/2 - mv^2/2 = mv\Delta v_E + m (\Delta v_E)^2/2,$$

или после усреднения (при  $\langle v \rangle = 0$ )

$$\langle \Delta K_E \rangle = \langle m (\Delta v_E)^2/2 \rangle = \langle e^2 E^2/2 mv^2 \rangle \quad (5.2)$$

В то же время потери энергии заряженных частиц при столкновениях с нейтральными пропорциональны разности их энергий (см. § 2.1):

$$\Delta K_v = \kappa (K - K_a). \quad (5.3)$$

В слабоионизованной плазме эти потери обычно преобладают. Поэтому в стационарном состоянии средняя энергия, приобретаемая в поле, должна равняться энергии, теряемой при столкновениях

$\langle \Delta K_E \rangle = \langle \Delta K_v \rangle$ . Баланс энергий определяет разницу средних энергий заряженных и нейтральных частиц:

$$\langle K - K_a \rangle \approx e^2 E^2 / m \kappa v^2, \quad (5.4)$$

где  $v$  и  $\kappa$  — усредненные значения частоты столкновений и коэффициента передачи энергии.

С помощью (5.4) получим условие малого влияния электрического поля на среднюю энергию  $\langle K - K_a \rangle \ll \langle K \rangle \approx T$  или

$$E \ll E_p = (v/e) \sqrt{\kappa m T} = \sqrt{\kappa} T / e \lambda, \quad (5.5)$$

где  $\lambda \approx v_T / v \approx (1/v) (\sqrt{T/m})$  — усредненная длина свободного пробега. Если это условие не выполняется, т. е.  $E \gtrsim E_p$ , то средняя энергия заряженных частиц в соответствии с (5.4) значительно превышает среднюю энергию нейтральных частиц. При  $E \ll E_p$  средняя хаотическая скорость определяется соотношением

$$v_T = \sqrt{2 \langle K \rangle / m} \approx (1/\sqrt{\kappa}) e E / m v, \quad (5.6)$$

Средняя направленная скорость  $u_E$  приблизительно равна усредненному приращению скорости за время между столкновениями (5.1), так как столкновения приводят к существенному изменению направления скорости. Отсюда находим

$$u_E = \langle \Delta v_E \rangle \approx e E / m v = v_T \sqrt{\kappa}. \quad (5.7)$$

Для ионов коэффициент передачи энергии при упругих столкновениях близок к единице ( $\kappa \approx m_i / m_a \approx 1$ ). При этом условие (5.5) принимает вид  $E \ll E_{pi} \approx T_i / e \lambda_{ia}$ , или в численном виде  $E$  (в см)  $\ll 10^2 T_i$  (эв)  $p$  (мм рт. ст.) (здесь использовано среднее значение  $\lambda_{ia} \approx 10^{-2} / p$ , значения  $\lambda_{ia}$  в разных газах отличаются от него не очень сильно). Если условие не выполнено, то средняя энергия и функция распределения значительно отличаются от равновесных. При этом для ионов в соответствии с (5.7)  $u_E \sim v_T$ , т. е. функция распределения существенно анизотропна.

Для электронов коэффициент передачи энергии обычно много меньше единицы, при упругих столкновениях  $\kappa \approx 2m_e / m_a$ . Поэтому критерий слабого влияния электрического поля на функцию распределения (5.5) гораздо более жесткий, чем для ионов  $E \ll E_{pe} = \sqrt{\kappa_{ea}} T_e / e \lambda_{ea}$ . Для электронов в водороде, например, при  $K < 2$  эв  $E_p \approx T_{ep}$ , при  $K > 2$  эв  $E_p \approx 1,5 T_e^{3/2} p$ , в неоне  $E_p \approx 5 \cdot 10^{-2} T_{ep}$  (здесь  $E_p$  дано в в/см,  $T_e$  — в эв,  $p$  — в мм рт. ст.). Отсюда видно, что уже в сравнительно слабых электрических полях средняя энергия электронов определяется полем. При этом, однако, независимо от значения поля направленная скорость (5.7) много меньше хаотической  $u_E / v_T \sim \sqrt{\kappa}$ , т. е. анизотропия функции распределения мала. Относительно малое значение направленной скорости связано, как уже отмечалось, с тем, что при каждом столкновении электрон сильно изменяет направление движения, в то время

как значения скорости и энергии изменяются очень мало ( $\Delta K \approx \approx \kappa K$ ), т. е. электрон «накапливает» свою энергию на протяжении многих периодов между столкновениями. Другими словами, время релаксации импульса определяется временем между столкновениями ( $\tau_p \approx 1/\nu$ ), а время релаксации энергии много больше этого времени ( $\tau_K \approx 1/\kappa\nu \gg \tau_p$ ).

В сильноионизованной плазме при рассмотрении баланса энергии электронов надо учитывать их столкновения не только с нейтральными частицами, но и с ионами. При этом условие малого влияния электрического поля на среднюю энергию электронов можно по-прежнему представить в виде неравенства (5.5), используя суммарную частоту столкновений электронов с атомами и ионами  $\nu_e = \nu_{ea} + \nu_{ei}$ . Заметим, что при приближении напряженности электрического поля к критической (5.5) нагрев электронов приводит к уменьшению частоты их столкновений с ионами ( $\nu_{ei} \sim \sim 1/T_e^{3/2}$ ). Уменьшение  $\nu$  вызывает в свою очередь увеличение энергии, получаемой электронами от поля (5.2), и уменьшение потерь энергии (5.3), т. е. приводит к дальнейшему росту электронной температуры. Этот процесс ограничивается либо столкновениями электронов с нейтральными частицами, либо другими видами потерь (связанными, например, с излучением или теплопроводностью). В первом случае остается справедливым вывод о слабой анизотропии функции распределения.

## § 5.2. Метод решения кинетического уравнения

В условиях, когда отклонение функции распределения от равновесной мало, решение кинетического уравнения может быть найдено методом последовательных приближений. При использовании этого метода функцию распределения представляют в виде ряда по степеням параметров, определяющих ее отклонение от равновесия (сил, действующих на частицы, градиентов концентрации и температуры):

$$f = f_{(0)} + f_{(1)} + f_{(2)} + \dots \quad (5.8)$$

Первый член ряда  $f_{(0)}$  есть равновесное (максвелловское) распределение, во второй член  $f_{(1)}$  входит линейная комбинация параметров, в третий  $f_{(2)}$  — квадратичная комбинация и т. д. Подстановка ряда в кинетическое уравнение позволяет получить последовательность уравнений различного порядка малости. В уравнение первого приближения входят функции  $f_{(0)}$  и  $f_{(1)}$ , в уравнение второго приближения функции  $f_{(0)}$ ,  $f_{(1)}$  и  $f_{(2)}$ , и т. д. Последовательно решая их, можно найти поправки различных порядков к функции распределения. Совокупность этих поправок описывает как отступление сферически-симметричной части функции распределения от максвелловской, так и анизотропию функции распределения, возникающую при отклонениях от равновесия. Определение анизотропной составляющей особенно важно в рассматриваемом случае

малых отклонений от равновесного распределения, поскольку она дает возможность вычислить такие важные макроскопические характеристики, как направленную скорость, поток энергии, поток импульса и т. п. Не будем останавливаться здесь на этих вычислениях. Позже, в гл. 6, будет описан более общий способ определения анизотропных характеристик, основанный на уравнениях моментов.

При условиях, когда отклонение функции распределения от равновесной велико, метод решения кинетического уравнения, использующий разложение по степеням возмущения, неприменим. Однако для электронов в электрическом поле можно использовать другой способ разложения, основанный на малой анизотропии функции распределения. Как было показано в § 5.1, из-за малых потерь энергии электрона при столкновениях с тяжелыми частицами направленная скорость обычно много меньше хаотической. Поэтому даже в сильном электрическом поле при больших отклонениях от равновесия анизотропия распределения электронов по скоростям остается малой. Это позволяет использовать при решении кинетического уравнения разложение функции распределения по параметрам, характеризующим ее анизотропию. Быстрая сходимость ряда дает возможность ограничиться малым числом членов и сравнительно просто определить как анизотропию, так и симметричную часть функции распределения.

Рассмотрим более подробно случай, когда источником неравновесности является однородное электрическое поле  $E$ . Здесь поле определяет единственное выделенное направление (будем считать, что ось  $Oz$  параллельна ему). Соответственно функция распределения электронов по скоростям может зависеть только от скорости  $v$  и от угла  $\Theta$  между направлениями скорости  $v$  и поля  $E$ . Зависимость от угла  $\Theta$ , связанная с анизотропией функции распределения, должна быть малой. Поэтому естественно представить эту зависимость в виде разложения по ортогональным полиномам Лежандра  $P_n(\cos \Theta)$ :

$$f(v) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(v) P_n(\cos \Theta), \quad (5.9)$$

где функции  $f_n$  зависят только от скорости. Подставив разложение (5.9) в кинетическое уравнение, нетрудно получить систему зацепляющихся уравнений для функций  $f_n(v)$ . Каждое из них получается умножением кинетического уравнения на один из полиномов  $P_l(\cos \Theta)$  и интегрированием по всем значениям  $\cos \Theta$ . В первые два члена суммы (5.9) входят полиномы  $P_0 = 1$  и  $P_1 = \cos \Theta$ . При малой анизотропии для многих задач можно ограничиться этими членами. Тогда получим

$$f(v) = f_0(v) + \cos \Theta f_1(v) = f_0(v) + (v_z/v) f_1(v). \quad (5.10)$$

Нетрудно убедиться, что функция  $f_0(v)$  определяет среднюю энергию электронов и среднее значение любой другой величины, за-

висящей от энергии. Действительно, усредняя  $g(v)$  с помощью (3.8), получаем

$$\langle g(v) \rangle = \int_{(v)} g(v) f(v) d^3 v = \iint \int g(v) [f_0(v) + f_1(v) \cos \Theta] v^2 \sin \Theta dv d\Theta d\varphi = 4\pi \int_0^\infty g(v) f_0(v) v^2 dv, \quad (5.11)$$

(здесь мы перешли под интегралом к сферическим координатам  $v, \theta, \varphi$ ).

Из (5.11) видна связь  $f_0$  с функциями распределения по полным скоростям  $f_v$  (3.6) и по энергиям  $f_K$  (3.7):

$$f_v(v) = 4\pi v^2 f_0(v); f_K(K) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{m^{3/2}} \sqrt{K} f_0\left(\sqrt{\frac{2K}{m}}\right).$$

Эта связь определяет и условие нормировки

$$\int_0^\infty 4\pi v^2 f_0(v) dv = 1. \quad (5.12)$$

Таким же образом можно убедиться, что средняя скорость электронов определяется функцией  $f_1(v)$ . Для компоненты скорости, параллельной электрическому полю, получим

$$u_E = \langle v \cos \Theta \rangle = \iint \int v \cos \Theta [f_0(v) + f_1(v) \cos \Theta] \times \\ \times v^2 \sin \Theta dv d\Theta d\varphi = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^3 f_1(v) dv. \quad (5.13)$$

Соответственно функцию  $f_0(v)$  называют изотропной составляющей, а функцию  $f_1(v)$  — направленной составляющей функции распределения.

Чтобы получить уравнения для  $f_0(v)$  и  $f_1(v)$ , следует подставить сумму (5.10) в кинетическое уравнение. Для однородной плазмы в однородном электрическом поле кинетическое уравнение (3.17) можно записать в виде

$$\frac{\partial (nf)}{\partial t} - \frac{en}{m_e} \mathbf{E} \operatorname{grad}_v (nf) = \frac{\delta (nf)}{\delta t}. \quad (5.14)$$

Подставляя в него (5.10), преобразуем входящую во второй член уравнения производную  $\partial f / \partial v_z$  следующим образом:

$$\frac{\partial f_i}{\partial v_z} = \frac{\partial}{\partial v_z} \left[ f_0(v) + f_1(v) \frac{v_z}{v} \right] = \frac{v_z}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{f_1}{v} + \\ + \frac{v_z^2}{v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f_1}{v} \right) = \cos \Theta \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{f_1}{v} + \cos^2 \Theta v \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f_1}{v} \right).$$

Тогда

$$\frac{\partial (nf_0)}{\partial t} + \cos \Theta \frac{\partial (nf_1)}{\partial t} - \frac{enE}{m_e} \left[ \frac{f_1}{v} + \cos \Theta \frac{\partial f_0}{\partial v} + \right. \\ \left. + \cos^2 \Theta v \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f_1}{v} \right) \right] = \frac{\delta (nf)}{\delta t}. \quad (5.15)$$

Отсюда нетрудно получить уравнения для функций  $f_0$  и  $f_1$ . Первое уравнение найдем, умножая (5.15) на  $d(\cos \Theta)$  и почленно интегрируя по всем значениям  $\cos \Theta$  от  $-1$  до  $1$ . В результате интегрирования члены, пропорциональные  $\cos \Theta$ , в (5.15) обратятся в нуль и уравнение примет вид

$$\frac{\partial (nf_0)}{\partial t} - \frac{enE}{m_e} \left[ \frac{f_1}{v} + \frac{1}{3} v \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f_1}{v} \right) \right] = S_0,$$

или

$$\frac{\partial (nf_0)}{\partial t} - \frac{enE}{3m_e v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) = S_0, \quad (5.16)$$

где введено обозначение

$$S_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\delta (nf)}{\delta t} d(\cos \Theta). \quad (5.17)$$

Второе уравнение получим, умножая (5.15) на  $\cos \Theta d(\cos \Theta)$  и также интегрируя по всем значениям  $\cos \Theta$ . В этом случае обратятся в нуль слагаемые, не зависящие от  $\Theta$  и пропорциональные  $\cos^2 \Theta$ . Тогда

$$\frac{\partial (nf_1)}{\partial t} - \frac{enE}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} = S_1, \quad (5.18)$$

где

$$S_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\delta (nf)}{\delta t} \cos \Theta d(\cos \Theta). \quad (5.19)$$

Совместное решение (5.16) и (5.18) позволяет определить обе составляющие функции распределения  $f_0(v)$  и  $f_1(v)$ .

Подобный способ разложения функции распределения электронов можно применить и для более общего случая, когда кроме электрического присутствует магнитное поле и плазму нельзя считать однородной. Тогда функция распределения может зависеть от всех компонент скорости. При слабой анизотропии ее можно аналогично (5.10) искать в виде суммы изотропной составляющей  $f_0(v)$  и трех направленных составляющих  $f_{1k}(v)$ , определяющих компоненты средней скорости электронов:

$$f(\mathbf{v}) = f_0(v) + \frac{v_x}{v} f_{1x}(v) + \frac{v_y}{v} f_{1y}(v) + \\ + \frac{v_z}{v} f_{1z}(v) = f_0(v) + \frac{\mathbf{v}}{v} \mathbf{f}_1(v), \quad (5.20)$$



где введена векторная функция  $\mathbf{f}_1(v)$  с компонентами  $f_{1x}, f_{1y}, f_{1z}$ . Легко убедиться, что эти функции определяют компоненты направленной скорости. Используя представление (5.20), получим

$$u_k = \int_v v_k f_1(v) d^3 v = \int_v \left[ v_k f_0(v) + \sum_l \frac{v_k v_l}{v} f_{1l}(v) \right] v^2 dv d\omega,$$

где под интегралом перешли к сферическим координатам ( $d\omega = \sin \Theta d\Theta d\varphi$ ). После интегрирования по углам в сумме останется только член, пропорциональный  $(v_k^2/v) f_{1k}$ , а остальные обратятся в нуль. В результате имеем

$$u_k = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^3 f_{1k}(v) dv. \quad (5.21)$$

Подставляя представление (5.20) в кинетическое уравнение (3.17), можно, как и раньше, найти связанные уравнения для функций  $f_0, f_{1x}, f_{1y}, f_{1z}$ . Первое из них получается усреднением кинетического уравнения по всем направлениям скорости (интегрированием по телесному углу), остальные три — усреднением после умножения на направляющие косинусы углов между вектором скорости и осями координат. Не останавливаясь на выкладках, приведем получающиеся уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (nf_0)}{\partial t} + \frac{v}{3} \operatorname{div} (n\mathbf{f}_1) - \frac{en}{3m_e v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} \mathbf{f}_1) &= S_0; \\ \frac{\partial (n\mathbf{f}_1)}{\partial t} + v \operatorname{grad} (nf_0) - \frac{en}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{en}{m_e c} [\mathbf{H} \times \mathbf{f}_1] &= \mathbf{S}_1. \end{aligned} \right\} (5.22)$$

Последнее уравнение есть векторная запись трех уравнений для компонент  $\mathbf{f}_1 (f_{1x}, f_{1y}, f_{1z})$ .

Столкновительные члены  $S_0, \mathbf{S}_1$  в уравнениях (5.22) определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_{(\omega)} \frac{\delta (nf)}{\delta t} d\omega; \\ S_{1k} &= \frac{3}{4\pi} \int_{(\omega)} \frac{\delta (nf)}{\delta t} \cos \Theta_k d\omega, \end{aligned} \right\} (5.23)$$

где  $\Theta_k$  — угол между осью  $k$  и вектором скорости, а интегрирование проводится по телесным углам, охватывающим все направления скорости.

### § 5.3. Интегралы столкновений для электронов

Определим входящие в уравнения (5.16), (5.18) столкновительные члены  $S_0$ ,  $S_1$ . Каждый из них может быть представлен в виде суммы интегральных выражений, связанных с различными типами столкновений электронов:

$$S_n = \sum_{\beta} S_{n\beta}^{(q)}, \quad (5.24)$$

где суммирование проводится в общем случае по всем сортам частиц  $\beta$  и охватывает упругие ( $e$ ) и неупругие ( $ne$ ) столкновения с возбуждением различных уровней  $j$ .

Рассмотрим сначала слагаемые, определяемые упругими столкновениями электронов с тяжелыми частицами (атомами или ионами). Для плазмы, стационарное состояние которой поддерживается электрическим полем, средняя энергия электронов обычно много больше средней энергии тяжелых частиц. Учитывая эти условия, можно использовать столкновительный интеграл для упругих столкновений в форме (3.31)

$$S_{ea}^{(e)} = \frac{n_e n_a}{v^3} \int_{(\Omega)} [v'^4 \sigma(v', \vartheta) f(v') - v^4 \sigma(v, \vartheta) f(v)] d\Omega. \quad (5.25)$$

Напомним, что здесь  $v'$  — скорость электрона до столкновения, приводящего к его попаданию в рассматриваемый интервал скоростей  $v dv$ . Подставляя (5.25) в (5.17), (5.19) и используя представление  $f(v)$  в виде суммы (5.10), получаем выражения для  $S_{0a}$  и  $S_{1a}$ :

$$\left. \begin{aligned} S_{0a} &= \frac{n_e n_a}{2v^3} \int_{-1}^{+1} d(\cos \Theta) \int_{(\Omega)} d\Omega [v'^4 \sigma' (f'_0 + f'_1 \cos \Theta' - \\ &\quad - v^4 \sigma (f_0 + f_1 \cos \Theta)]; \\ S_{1a} &= \frac{3}{2} \frac{n_e n_a}{v^3} \int_{-1}^{+1} \cos \Theta d(\cos \Theta) \int_{(\Omega)} d\Omega [v'^4 \sigma' (f'_0 + \\ &\quad + f'_1 \cos \Theta') - v^4 \sigma (f_0 + f_1 \cos \Theta)], \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

в которых штрихованные величины  $\sigma'$ ,  $f'_0$ ,  $f'_1$ ,  $\Theta'$  определяются скоростью электронов  $v'$ . Связь между углами  $\Theta'$  (между векторами  $v'$  и  $E$ ) и  $\Theta$  (между  $v$  и  $E$ ) можно определить с помощью сферического треугольника, образованного векторами  $v$ ,  $v'$ ,  $E$  (рис. 5.1). По известной формуле сферической тригонометрии находим  $\cos \Theta' = \cos \Theta \cos \vartheta - \sin \Theta \sin \vartheta \cos \psi$ , где  $\vartheta$  и  $\psi$  — углы, опреде-

ляющие телесный угол рассеяния. Подставляя это соотношение в (5.26) и интегрируя по  $\Theta$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \frac{n_e n_a}{v^3} \int_{(\Omega)} (v'^4 \sigma' f'_0 - v^4 \sigma f_0) d\Omega; \\ S_1 &= \frac{n_e n_a}{v^3} \int_{(\Omega)} (v'^4 \sigma' f'_1 \cos \vartheta - v^4 \sigma f_1) d\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

где учли, что при интегрировании по  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi$  члены, пропорциональные  $\cos \psi$ , обращаются в нуль.

При упругих столкновениях с тяжелыми частицами изменение скорости электрона очень мало (порядка отношения масс). Пренебрегая им, т. е. полагая  $v' = v$  и  $\sigma' = \sigma$ ,  $f'_0 = f_0$ ,  $f'_1 = f_1$ , получаем следующее выражение для  $S_{1a}$ :

$$S_{1a}^{(e)} = -n_e n_a f_1 \int_{(\Omega)} v \sigma (1 - \cos \vartheta) d\Omega = -n_e v_{ea}^t f_1, \quad (5.28)$$

где частота столкновений  $v_{ea}^t$  в соответствии с (2.52) определяется транспортным поперечным сечением  $s^t = f\sigma(1 - \cos \vartheta) d\Omega$ . Интеграл  $S_{0a}^{(e)}$  в этом приближении обращается в нуль. Выражение (5.28) дает изменение направленной составляющей функции распределения  $f_1$  в результате столкновений. Ее смысл легко понять, если учесть, что  $f_1$  характеризует долю электронов, движущихся

в выделенном направлении (в направлении  $Oz$ ). Поскольку столкновения приводят к существенному изменению направления движения электронов, характерное время изменения функции  $f_1$  должно быть порядка времени между столкновениями  $\tau \approx 1/v$ , а скорость ее изменения  $\delta f_1 / \delta t$  должна определяться произведением  $f_1$  на частоту столкновений  $v$ . Этот вывод согласуется с (5.28).

Для вычисления интеграла  $S_0$ , определяющего изменение изотропной составляющей функции распределения, необходимо учесть изменение значения скорости электронов при столкновениях. Это изменение дается соотношениями, полученными в гл. 2. При упругих столкновениях электрона с атомом, кинетическая энергия ко-

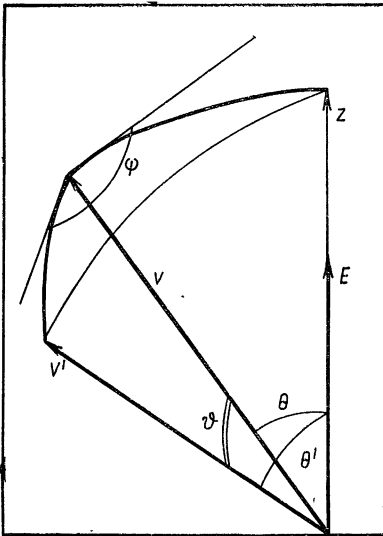


Рис. 5.1

тогого много меньше энергии электрона ( $K_a \ll K_e$ ), оно равно

$$v - v' = (-m_e/m_a) v (1 - \cos \vartheta) \quad (5.29)$$

[в отличие от (2.16) здесь  $v'$  — скорость электрона до столкновения, а  $v$  — после него]. Поскольку  $|v - v'| \ll v$ , можно представить подынтегральное выражение (5.27) в виде

$$\begin{aligned} v'^4 \sigma' f'_0 - v^4 \sigma f_0 &\approx (v' - v) \frac{\partial}{\partial v} (v^4 \sigma f_0) = \\ &= \frac{m_e}{m_a} (1 - \cos \vartheta) v \frac{\partial}{\partial v} (v^4 \sigma f_0). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Подставляя (5.30) в (5.27), получаем

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{n_e n_a}{v^2} \frac{m_e}{m_a} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^4 f_0 \int_{(\Omega)} \sigma (1 - \cos \vartheta) d\Omega \right] = \\ &= \frac{n_e}{v^2} \frac{m_e}{m_a} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 \nu_{ea}^t f_0). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Это выражение определяет изменение изотропной составляющей функции распределения, связанное с уменьшением скорости (с потерями энергии) при упругих столкновениях.

Для условий, когда средняя энергия электронов сравнима с энергией тяжелых частиц, использование приближенного интеграла столкновений (5.25) неправомерно, и для определения  $S_0$  следует подставить в (5.17) общее выражение для интеграла столкновений (3.23). Получающуюся интегральную формулу можно упростить, воспользовавшись тем, что скорость электронов много больше скорости тяжелых частиц, а изменение значения скорости электронов при столкновениях мало. Вычисления дают следующее выражение для  $S_0$ :

$$S_0 = \frac{n_e}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{m_e}{m_a} \nu_{ea}^t v^3 f_0 + \frac{T_a}{m_a} \nu_{ea}^t v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} \right], \quad (5.32)$$

где  $T_a = 2/3 \langle K_a \rangle$  — температура атомов, определяющая их среднюю энергию. Когда она много меньше энергии электронов  $T_a \ll m_e v^2/2$ , второй член также много меньше первого и (5.32) переходит в (5.31).

Выражение (5.32) может быть представлено как дивергенция сферически-симметричного потока в пространстве скоростей. В соответствии с известной формулой для дивергенции в сферических координатах запишем

$$S_0 = -\operatorname{div}_v \Gamma_v = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \Gamma_v), \quad (5.33)$$

где плотность потока в направлении увеличения скорости  $\Gamma_v$  равна

$$\Gamma_v = -g_v (n f_0) - D_v \frac{\partial (n f_0)}{\partial v}, \quad (5.34)$$

где  $g_v = (m_e/m_a) v_{ea}^t$ ;  $D_v = (T_a/m_a) v_{ea}^t$ . Здесь первый член описывает уменьшение скорости («трение»), а второй — диффузию в пространстве скоростей. Подстановка (5.33), (5.34) в уравнение для изотропной составляющей функции распределения превращает его в уравнение Фоккера—Планка (см. § 3.3).

Чтобы установить физический смысл выражения (5.34), оценим поток частиц через элемент сферической поверхности пространства скоростей  $dG$ , связанный со столкновениями (рис. 5.2, а).

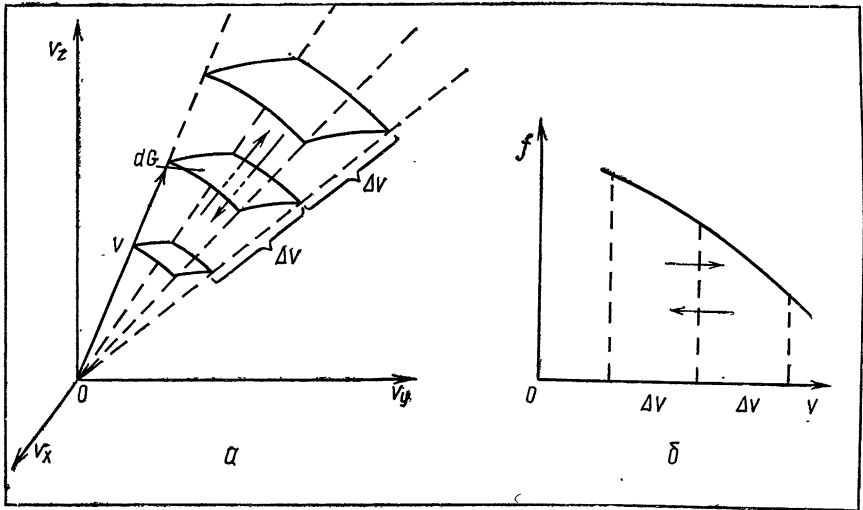


Рис. 5.2

Число частиц в единице объема конфигурационного пространства, проходящих через этот элемент при заданном приращении скорости  $\Delta v$ , определяется равенством

$$dQ = n f_0 \left( v - \frac{1}{2} \Delta v \right) \Delta v dG \approx n f_0(v) \Delta v dG - \frac{1}{2} n \frac{\partial f_0}{\partial v} (\Delta v)^2 dG,$$

где использовано среднее значение  $f_0$  в пределах объема высотой  $\Delta v$  и учтено, что приращение скорости при упругих столкновениях мало. Относя это число к среднему времени между столкновениями  $\tau = 1/\nu$  и усредняя по столкновениям, получаем приближенное выражение для плотности потока\*

$$\Gamma_v = \frac{1}{\tau} \frac{dQ}{dG} \approx n \nu f_0 \langle \Delta v \rangle - \frac{1}{2} n \nu \langle (\Delta v)^2 \rangle \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (5.35)$$

\* Для более строгого определения  $\Gamma_v$  следовало бы учесть при усреднении зависимость  $\nu$  и  $s$  от  $v$ .

В соответствии с ним коэффициент трения пропорционален среднему уменьшению скорости

$$g_v = -v \langle \Delta v \rangle, \quad (5.36)$$

а коэффициент диффузии — среднему квадрату приращения

$$D_v \doteq (1/2) v \langle (\Delta v)^2 \rangle. \quad (5.37)$$

Если изменение скорости является хаотическим, то  $\langle \Delta v \rangle = 0$  и в (5.35) остается только второе слагаемое, определяющее диффузионный поток. Он направлен в сторону уменьшения  $f_0(v)$ , так как при одинаковой вероятности положительных и отрицательных изменений скорости поток из той области скоростей, в которой частиц больше, сильнее (см. рис. 5.2, б). Поэтому диффузия стремится «выровнять» функцию распределения  $f_0$ . Вся эта картина вполне аналогична картине диффузии в обычном конфигурационном пространстве, получающейся в результате усреднения хаотического движения частиц (см. § 7.3).

Оценим коэффициенты  $g_v$  и  $D_v$  для упругих столкновений электронов с атомами. Изменение скорости электрона при таких столкновениях можно определить с помощью общей формулы (2.18). Учитывая, что  $m_e \ll m_a$  и  $v_e \gg v_a$ , получаем из нее

$$\Delta(v_e^2) = 2v_0 \Delta v_e \approx -2v_0 v_e = -2 \frac{m_e}{m_a} v_e^2 + 2v_e v_a,$$

откуда

$$\Delta v_e \approx - \frac{m_e}{m_a} v_e + v_a \cos \varphi, \quad (5.38)$$

где  $\varphi$  — угол между  $v_e$  и  $v_a$ . Первый член в (5.38) определяется потерями энергии, не зависящими от движения атома. Уменьшение скорости, связанное с этими потерями ( $\Delta v_1 = - (m_e/m_a) v_e$ ), как видно из (5.36), приводит к формуле (5.34) для коэффициента трения. Второе слагаемое в (5.38) определяется обменом энергией между электроном и атомом, связанным с движением атома. Изменение скорости при таком обмене  $\Delta v_2 = v_a \cos \varphi$ . При изотропном распределении атомов по скоростям средняя величина этого изменения  $\Delta v_2 = 0$ . Поэтому соответствующий поток (5.35) связан со средним квадратом смещения и представляет собой диффузию в пространстве скоростей. Подставляя в (5.37)  $\Delta v_2 = v_a \cos \varphi$  и усредняя по  $\varphi$  и  $v_a$ , получаем выражение для коэффициента диффузии

$$D \approx (1/2) v v_a^2 \cos^2 \varphi = (1/2) v T_a / m_a,$$

которая отличается от (5.34) лишь коэффициентом 1/2 (правильный численный коэффициент получается при более аккуратном усреднении по столкновениям).

Рассмотрим теперь столкновительные члены  $S_0$ ,  $S_1$ , обусловленные неупругими столкновениями. На функцию распределения электронов могут влиять различные неупругие столкновения —

процессы возбуждения различных уровней, ионизации, рекомбинации. Здесь будут определены столкновительные члены для процессов возбуждения в двух крайних случаях: когда энергия электронов много больше энергии возбуждения и когда эти энергии близки друг к другу. Эти случаи соответствуют условиям, часто встречающимся в плазме стационарных газовых разрядов, когда средняя энергия электронов много больше энергии возбуждения колебательных и вращательных уровней молекулы и значительно меньше энергии возбуждения электронных (атомных) уровней.

Потери энергии электронов при неупругих столкновениях, сопровождающихся возбуждением, с точностью до малого отношения масс  $m_e/m_a$  равны энергии возбуждения (см. § 2.1)

$$mv^2/2 - mv'^2/2 = \mathcal{E}_j. \quad (5.39)$$

Поэтому в первом случае при энергии возбуждения, много меньшей энергии электронов, изменение скорости мало:

$$v - v' = \mathcal{E}_j/m_e v \ll v, \quad (5.40)$$

и столкновительные члены можно определять таким же образом, как и для упругих столкновений. При этом следует использовать выражение для интеграла столкновений в форме (3.30) и учесть в нем соотношение между объемами пространства скоростей до и после столкновений, следующее из (5.39)  $v' dv' = v dv$ . Тогда с помощью формул (5.17) и (5.19) получим

$$S_{1a}^{(j)} = -n f_1 v_{ea}^{t(j)}, \quad (5.41)$$

где  $v_{ea}^{t(j)}$  — транспортная частота столкновений, сопровождающихся возбуждением уровня  $j$  и

$$S_{0a}^{(j)} = \frac{n_e}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\mathcal{E}_j}{m_e} v v^{t(j)} f_0 \right) = \frac{1}{2} \frac{n_e}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (\kappa^{(j)} v^{tj} v^3 f_0), \quad (5.42)$$

где  $\kappa^j = 2\mathcal{E}_j/m_e v^2$  — коэффициент передачи энергии, определяющий долю энергии, теряемой электроном при неупругом столкновении.

Сумму столкновительных членов  $S_{0a}^{(j)}$  и  $S_{1a}^{(j)}$ , обусловленных неупругими столкновениями с малой потерей энергии, можно записать в виде, аналогичном (5.41), (5.42):

$$\left. \begin{aligned} S_{1a}^l &= -n f_1 v_{ea}^l; \\ S_{0a}^l &= \frac{1}{2} \frac{n_e}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (\kappa_{ea}^l v_{ea}^l v^3 f_0). \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Здесь  $v_{ea}^l$  — суммарная частота неупругих столкновений с малой потерей энергии;  $\kappa_{ea}^l$  — усредненный коэффициент передачи энергии:

$$v_{1a}^l = \sum_j v_{ea}^{t(j)}, \quad \kappa_{ea}^l = \sum_j \kappa_{ea}^{(j)} v_{ea}^{t(j)} / \sum_j v_{ea}^{t(j)}. \quad (5.44)$$

Обычно суммарная частота столкновений  $\nu_{ea}^l$  много меньше частоты упругих столкновений  $\nu_{ea}^{tl}$ , но коэффициент передачи энергии  $\kappa_{ea}^l$  в молекулярных газах может быть значительно больше  $\kappa_{ea}^l = = m_e/m_a$ .

Во втором случае, когда энергия электрона лишь немного превосходит энергию возбуждения, можно считать, что неупругое столкновение приводит к полной потере энергии электрона. При таком предположении в столкновительном интеграле остается только слагаемое, определяющее уход частиц из заданного интервала скоростей. Он принимает при этом вид

$$S_{\pm}^{(j)} = - \int_{(\Omega)} n_e n_a f v \sigma^{(j)} d\Omega = - n_e f \nu^{(j)}, \quad (5.45)$$

где  $\nu^{(j)} = n_a v \int \sigma^{(j)} d\Omega$  — частота неупругих столкновений данного типа. Приход частиц в область малых энергий можно учесть добавлением члена

$$S_{\mp}^{(j)} = \frac{\delta(v)}{4\pi v^2} Q^{(j)}, \quad (5.46)$$

где

$$Q^{(j)} = - \int_{(v)} \left( \frac{\delta n f}{\delta t} \right)_{-}^{(j)} d^3 v = n_e \int_{(v)} f \nu^{(j)} d^3 v$$

есть полное число неупругих столкновений данного типа;  $\delta(v)$  — дельта-функция, отличная от нуля только при  $v = 0$ . Интеграл по объему пространства скоростей от (5.46) равен

$$\int_{(v)} S_{\mp}^{(j)} d^3 v = 4\pi \int_0^{\infty} S_{\mp}^{(j)} v^2 dv = Q^{(j)}.$$

Подставляя столкновительный член (5.45) в (5.17), (5.19), находим

$$S_{0a}^h = - n f_0 \nu^{(j)}; \quad S_{1a}^h = - n f_1 \nu^{(j)}. \quad (5.47)$$

Аналогичные формулы получаются, очевидно, и для столкновительных членов, описывающих процесс ионизации при энергии электрона, близкой к энергии ионизации. При этом увеличение числа электронов можно учесть удвоением члена (5.46), определяющего появление частиц в области малых скоростей. Суммирование (5.47) по всем неупругим столкновениям с большой потерей энергии приводит к замене частоты  $\nu^{(j)}$  на суммарную частоту неупругих столкновений:

$$S_{0a}^h = - n \nu_{ea}^h f_0; \quad S_{1a}^h = - n \nu_{ea}^h f_0, \quad (5.48)$$

где  $\nu_{ea}^h = \sum_j \nu_{ea}^j$ . Во многих случаях  $\nu_{ea}^{(h)} < \nu_{ea}^{te}$  и вклад неупругих столкновений в столкновительный член  $S_{1a}^h$  несуществен ( $|S_{1a}^h| \ll \ll |S_{1a}^e|$ ). В то же время они могут практически полностью опреде-



лять изотропный столкновительный член  $S_{0a}$ , так как в соответствии с (5.31)  $S_{0a}^e \approx (m_e/m_a) \times v_{ea}^t \ll v_{ea}^t$ .

Полученные выражения обусловлены столкновительными членами, связанными со столкновениями электронов с атомами. Такой же вид имеют столкновительные члены, определяемые электрон-ионными столкновениями  $S_{0i}$ ,  $S_{1i}$ . Выражения для столкновительных членов, обусловленных электрон-электронными столкновениями, можно представить только в интегральной форме. Не будем приводить здесь эти выражения. Отметим лишь, что формула для  $S_{0e}$  получается из общего интеграла упругих столкновений (3.23) путем замены в нем полной функции распределения  $f(v)$  на изотропную составляющую  $f_0(v)$ .

#### § 5.4. Функция распределения электронов в электрическом поле при определяющем влиянии упругих столкновений электронов с атомами

Уравнения для составляющих функций распределения в постоянном электрическом поле (5.16), (5.18) при стационарных условиях (когда функция распределения не зависит от времени) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{eEn}{3m_e v^2} \frac{d}{dv} (v^2 f_1) &= S_0; \\ -\frac{eEn}{m_e} \frac{df_0}{dv} &= S_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

Столкновительные члены  $S$  (5.24) представляют собой сумму слагаемых, определяемых столкновениями электронов с атомами, ионами и друг с другом  $S_n = S_{na} + S_{ni} + S_{ne}$ .

Для оценки компонент  $S_{0\beta}$  и  $S_{1\beta}$  можно использовать порядковые равенства

$$S_{1\beta} \approx v_{e\beta} n f_1, \quad S_{0\beta} \approx \kappa_{e\beta} v_{e\beta} n f_0. \quad (5.50)$$

Они следуют из определения величины  $S_1 = \delta n f_1 / \delta t$ ,  $S_0 = \delta n f_0 / \delta t$ . Первая из них  $S_1$  характеризует изменение направления скорости электрона при столкновении и определяется поэтому частотой столкновений  $\nu$ , вторая характеризует изменение скорости и определяется произведением частоты столкновений на коэффициент передачи энергии  $\kappa$ . Для столкновений электронов с тяжелыми частицами соотношения (5.50) получаются непосредственно из формул § 5.3. С их помощью можно оценить относительную роль различных типов столкновений.

Рассмотрим решение уравнений (5.49) для плазмы с низкой степенью ионизации, когда существенны только столкновения электронов с атомами. Условия, при которых можно пренебречь влия-

нием электрон-электронных и электрон-ионных столкновений на функцию распределения, определяются с помощью (5.50):

$$v_{ee} \approx v_{ei} \ll v_{ea}, v_{ee} \ll \kappa_{ea} v_{ea}. \quad (5.51)$$

(Здесь учли, что  $\kappa_{ei} \approx \kappa_{ea}$ , так как  $m_i = m_a$ , и  $\kappa_{ee} \approx 1$ ). Второе из неравенств более жесткое, чем первое. Для упругих столкновений оно принимает вид  $v_{ee} \ll (m_e/m_a)v_{ea}$ , или

$$\eta = n_e/n_a \ll (m_e/m_a) s_{ea}/s_{ee}. \quad (5.52)$$

Как видно, только при очень малых значениях  $\eta$  ( $\eta \lesssim m_e/m_a$ ) можно пренебрегать влиянием электрон-электронных столкновений на функцию распределения.

Найдем сначала решение уравнений (5.49) для случая, когда существенны только упругие столкновения электронов с атомами. Подставив выражения (5.28), (5.32) для  $S_0$  и  $S_1$  в уравнения (5.49), получим

$$(eEn/m_e) df_0/dv = nv^t f_1; \quad (5.53)$$

$$-\frac{eEn}{3m_e v^2} \frac{d}{dv} (v^2 f_1) = \frac{1}{2} \frac{n}{v^2} \frac{d}{dv} \left[ \kappa v^t v^2 \left( v f_0 + \frac{T_a}{m_e} \frac{df_0}{dv} \right) \right]. \quad (5.54)$$

Уравнение (5.53) описывает стационарный баланс между приобретением направленной скорости в электрическом поле и потерями ее при столкновениях. Оно позволяет найти связь между функциями  $f_1$  и  $f_0$ :

$$f_1 = (eE/m_e v^t) df_0/dv. \quad (5.55)$$

Используя (5.55), получаем с помощью (5.13) общее выражение для направленной скорости электронов:

$$\begin{aligned} u_E &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_1(v) v^3 dv = \frac{4\pi}{3} \frac{eE}{m_e} \int_0^\infty \frac{v^3}{v^t} \frac{df_0}{dv} dv = \\ &= -\frac{4\pi}{3} \frac{eE}{m_e} \int_0^\infty f_0(v) \frac{d}{dv} \left( \frac{v^3}{v^t} \right) dv \end{aligned} \quad (5.56)$$

(последнее равенство получено в результате интегрирования по частям). В случае, если частота столкновений не зависит от скорости, т. е.  $v = \text{const}$ , выражение (5.56) приводит к формуле, не зависящей от вида  $f_0(v)$ :

$$u = -\frac{eE}{m_e v^t} 4\pi \int_0^\infty f_0(v) v^3 dv = -\frac{eE}{m_e v^t}. \quad (5.57)$$

Уравнение для изотропной составляющей функции распределения найдем, подставив (5.55) в (5.54):

$$-\frac{n}{v^2} \frac{d}{dv} \left( \frac{e^2 E^2 v^2}{3m_e^2 v^t} \frac{df_0}{dv} \right) = \frac{1}{2} \frac{n}{v^2} \frac{d}{dv} \left[ \kappa v^t v^2 \left( v f_0 + \frac{T_a}{m_e} \frac{df_0}{dv} \right) \right]. \quad (5.58)$$

Левая часть уравнения, определяющая увеличение скорости электронов под действием электрического поля, так же как и правая «столкновительная» часть, может быть представлена в виде дивергенции сферически-симметричного потока. Поток

$$\Gamma_{vE} = -n \frac{e^2 E^2 v^2}{3m_e^2 v^t} \frac{df_0}{dv} = -D_E n \frac{df_0}{dv} \quad (5.59)$$

пропорционален производной  $df_0/dv$ , и, поскольку  $f_0(v)$  — падающая функция, поток направлен в сторону больших скоростей. Выражение (5.59) описывает диффузию в пространстве скоростей. Диффузионный характер набора энергии электронами в электрическом поле связан с тем, что этот набор осуществляется в течение многих периодов между столкновениями. В результате ускорение за каждый период складывается векторно с произвольно направленной хаотической скоростью, и, следовательно, изменение величины скорости случайно. Нетрудно непосредственно оценить коэффициент диффузии, характеризующий этот процесс. Изменение вектора скорости электрона за время между столкновениями  $\tau$  определяется его ускорением в электрическом поле:

$$\Delta \mathbf{v}_E = \mathbf{v}^* - \mathbf{v} = - (e\mathbf{E}/m_e) \tau = - e\mathbf{E}/m_e v.$$

Соответствующее изменение скорости  $\Delta v$  дается соотношениями

$$v^{*2} \approx v^2 + 2v\Delta v_E, \quad \Delta v = v^* - v \approx v\Delta v_E/v,$$

учитываемыми, что  $\Delta v_E \ll v$ . Поскольку скорость  $\mathbf{v}$  может быть направлена произвольно, среднее значение  $\Delta v$  обращается в нуль. Среднее значение  $(\Delta v)^2$  равно

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{1}{3} (\Delta v_E)^2 = (1/3) e^2 E^2 / m_e v^2.$$

Отсюда находим коэффициент диффузии [см. (5.37)]

$$D_E = \frac{\langle (\Delta v)^2 \rangle}{2\tau} = \frac{1}{6} \frac{e^2 E^2}{m_e^2 v}, \quad (5.60)$$

согласующийся с точностью до численного коэффициента с выражением (5.59).

Таким образом, из уравнения (5.58) следует обращение в нуль дивергенции плотности суммарного потока в пространстве скоро-

стей — потока, определяющего приобретение энергии в поле  $\Gamma_{vE}$  (5.59), и потока, определяющего потери энергии при столкновениях  $\Gamma_{vv}$  (5.34), т. е.

$$\frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} [v^2 (\Gamma_{vE} + \Gamma_{vv})] = 0. \quad (5.61)$$

При интегрировании уравнения получим постоянство суммарного потока через сферическую поверхность пространства скоростей  $4\pi v^2 (\Gamma_{vE} + \Gamma_{vv}) = C$ .

Поскольку величины  $\Gamma_E$  и  $\Gamma_v$  конечны при  $v \rightarrow 0$ , постоянная интегрирования  $C$  равна нулю. Это означает, что суммарный поток равен нулю. Используя выражения для его компонент  $\Gamma_E$  (5.59) и  $\Gamma_v$  (5.34), получаем уравнение для  $f_0$ , следующее из (5.58):

$$\frac{2}{3} \frac{e^2 E^2}{m_e^2 (v_{ea}^t)^2} \frac{df_0}{dv} + \kappa_{ea} \left( v f_0 + \frac{T_a}{m_e} \frac{df_0}{dv} \right) = 0. \quad (5.62)$$

Решение уравнения (5.62) имеет вид

$$f_0 = A \exp \left[ - \int_0^v \frac{m_e v dv}{T_a + 2e^2 E^2 / 3\kappa_{ea} (v_{ea}^t)^2 m_e} \right], \quad (5.63)$$

где постоянная  $A$  определяется из условия нормировки (5.12)

$$4\pi \int_0^\infty f_0 v^2 dv = 1.$$

Формула (5.63) позволяет установить характер отклонений функции распределения электронов по скоростям от равновесной. Из нее видно, что эти отклонения определяются отношением напряженности поля  $E$  к критической напряженности (5.5)  $E_p = v_{ea} \sqrt{\kappa_{ea} m_e T_a} / e$ . При  $E \ll E_p$  второй член в знаменателе подынтегрального выражения (5.63) мал, и распределение по скоростям становится максвелловским с температурой  $T_a$ . В сильных полях при  $E \gg E_p$  первым членом в знаменателе можно пренебречь. При этом формула (5.63) приобретает вид

$$f_0(v) = A \exp \left[ - \frac{3}{2} \frac{m_e^2 \kappa_{ea}}{e^2 E^2} \int_0^v v (v_{ea}^t)^2 dv \right]. \quad (5.64)$$

Выражения (5.63), (5.64) показывают, что вид функции распределения по скоростям определяется зависимостью транспортной частоты столкновений электронов от скорости  $v_{ea}^t(v)$ . При постоянной частоте столкновений  $v^t = \text{const}$  функция распределения ока-

зывается максвелловской независимо от напряженности поля. Из (5.63) находим

$$f_0 = A \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right) = \left(\frac{m_e}{2\pi T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right), \quad (5.65)$$

где

$$T_e = T_a + \frac{2}{3} \frac{e^2 E^2}{\kappa_{ea} m_e (v_{ea}^t)^2} = T_a + \frac{1}{3} \frac{m_a e^2 E^2}{m_e^2 (v_{ea}^t)^2}. \quad (5.66)$$

Видно, что электронная температура, определяющая среднюю энергию электронов, превышает температуру атомов, и при  $E \gg \bar{E}_p$  она пропорциональна квадрату поля.

Если  $v_{ea}$  — функция скорости, то функция распределения может существенно отличаться от максвелловской. Так, для постоянного сечения столкновений, когда  $v_{ea}^t = n_a v s_{ea}^t = v/\lambda_{ea}^t$  пропорциональна скорости, функция распределения в сильном поле (5.64) имеет вид

$$f_0 = A \exp\left[-\frac{3m_e^2 v^4 \kappa_{ea}}{8e^2 E^2 \lambda_{ea}^2}\right], \quad (5.67)$$

где из условия нормировки

$$A = \frac{0,37}{\pi} \left(\frac{m_e \sqrt{\kappa_{ea}}}{e \lambda_{ea} E}\right)^{3/2}.$$

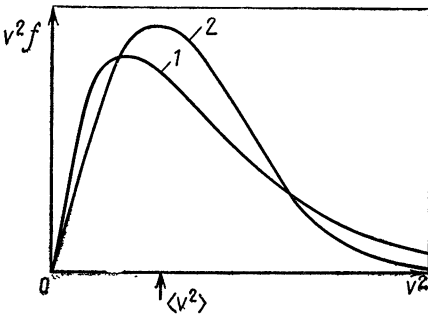


Рис. 5.3

С помощью формулы (5.11) найдем среднюю энергию электронов при этом распределении:

$$\langle K_e \rangle = 0,57 e E \lambda_{ea}^t / \sqrt{\kappa_{ea}} = 0,4 \sqrt{m_a / m_e} e E \lambda_{ea}^t. \quad (5.68)$$

Направленную скорость можно найти, подставляя (5.67) в (5.56). В результате интегрирования получим

$$v_E = 0,69 \kappa_{ea}^{1/4} (e E \lambda_{ea}^t / m_e)^{1/2}. \quad (5.69)$$

Распределение, описываемое формулой (5.67), называют *распределением Дрювестейна*. Его характеризует значительно более сильная зависимость от скорости по сравнению с максвелловским распределением (рис. 5.3: 1 — распределение Максвелла, 2 — распределение Дрювестейна). Это нетрудно объяснить. Рост частоты столкновений при больших скоростях приводит к возрастанию потока  $\Gamma_v$  в сторону уменьшения скорости. Для его компенсации градиент функции распределения, определяющий обратный поток, должен возрасти по сравнению с максвелловским. В результате функция распределения оказывается «прижатой» к началу координат.

## § 5.5. Влияние неупругих столкновений на функцию распределения электронов

Как уже упоминалось, в газоразрядной плазме, стационарно поддерживаемой электрическим полем, средняя энергия электронов обычно много меньше энергии возбуждения низшего электронного уровня. При этом в атомарных газах основная часть функции распределения определяется упругими столкновениями. В молекулярных газах, однако, могут играть существенную роль процессы возбуждения вращательных и колебательных уровней молекул, энергия которых много меньше средней энергии электронов.

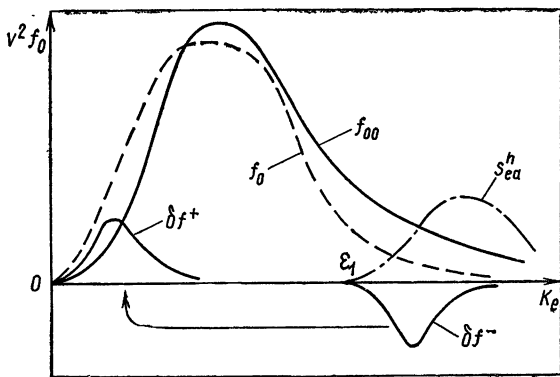


Рис. 5.4

В § 3.3 было показано, что учет таких столкновений в столкновительных членах  $S_0$  и  $S_1$  сводится к изменению частоты столкновений и коэффициента передачи энергии, входящих в эти члены, на суммарные величины, определяемые соотношениями (5.44). Если зависимость этих величин от скорости известна, то функция распределения, учитывающая влияние неупругих процессов с малыми потерями энергии, может быть вычислена с помощью (5.63) и (5.55).

Остановимся более подробно на влиянии неупругих столкновений с большими потерями энергии. В газоразрядной плазме к ним относятся процессы возбуждения электронных уровней и ионизации. Изменения функции распределения, к которым приводят неупругие столкновения, поясняются рис. 5.4, на котором представлено распределение по энергии, определяющееся функцией  $f_v = 4\pi v^2 f_0$  (5.12). Функцию распределения без учета неупругих столкновений обозначим  $f_{00}$ . Для простоты предположим, что существует только один неупругий процесс с порогом  $\mathcal{E}_1$ . В результате неупругих столкновений электроны теряют энергию, приблизительно равную  $\mathcal{E}_1$ , и переходят из области энергий больших пороговой в область малых энергий. На рис. 5.4 приведены кривая, характеризующая скорость уменьшения функции распределения в результате

этого процесса  $\delta f^- = -v^{(1)} f_0 \delta t$  в области больших энергий, и обратная кривая  $\delta f^+ = -\delta f^-$ , определяющая приход электронов в область малых скоростей. Ширина этих кривых зависит от скорости спада  $f_0$  в неупругой области (при  $K_e > \mathcal{E}_1$ ). При энергии возбуждения, много большей средней энергии электронов,  $f_0$  спадает очень быстро и кривая  $\delta f^-$  получается узкой, «прижатой» к порогу возбуждения; соответственно кривая  $\delta f^+$  «прижата» к началу координат.

Чтобы найти изменение функции  $f_0$ , связанное с неупругими столкновениями, надо учитывать не только переходы  $\delta f^+$  и  $\delta f^-$ , но также и диффузию в пространстве скоростей, связанную с упругими столкновениями. Диффузия сглаживает кривую  $f_0(v)$ . Она, в частности, приводит к увеличению градиента  $\dot{f}$  в области  $v \ll v_1$  и частично восстанавливает убыль электронов из области больших скоростей (см. рис. 5.4). В реальных условиях обычно существуют несколько неупругих процессов с различными энергиями возбуждения. При этом кривые  $\delta f$ , связанные с такими процессами, складываются, и спад функции в области неупругих столкновений еще более ускоряется.

Рассмотрим количественно влияние неупругих столкновений с большой потерей энергии на функцию распределения для случая, когда порог этих столкновений много больше средней энергии электронов:

$$\varepsilon_1 \gg T_e \approx e^2 E^2 / m_e \kappa_{ea} v_{ea}^2. \quad (5.70)$$

В этом случае функция распределения в области неупругих столкновений очень мала, соответственно мало и число таких столкновений. Поэтому в первом приближении функцию распределения при скоростях меньших пороговой  $v < v_1 = (2\varepsilon_1/m_e)^{1/2}$  можно определять без учета неупругих столкновений с помощью (5.64), (5.55). Их учет необходим для определения функции распределения в области, в которой они приводят к большим потерям энергии (при  $v > v_1$ ). Найдем для этой области решение уравнений (5.49):

$$-(eEn/3m_e v^2) (d/dv) (v^2 f_1) = S_0; \quad -(eEn/m_e) (df_0/dv) = S_1. \quad (5.71)$$

Как отмечалось, при быстром спаде функции распределения неупругие столкновения каждого типа осуществляются в основном электронами, энергия которых близка к энергии возбуждения соответствующих уровней. Поэтому можно пользоваться выражениями (5.47) для неупругих столкновительных членов, полученными при предположении о полной потере энергии электронами. Суммарная формула для  $S_0$  и  $S_1$  приобретает тогда вид

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \frac{nm_e}{m_a v^2} \frac{d}{dv} (v_{ea}^t v^2 f_0) - v_{ea}^h n f_0; \\ S_1 &= -(v_{ea}^t + v_{ea}^h) n f_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

где  $v_{ea}^h$  — суммарная частота столкновений неупругих процессов с большой потерей энергии.

Обычно в большой части области неупругих столкновений суммарная частота лежит в пределах (см. гл. 2)

$$(m_e/m_a) v_{ea}^t \ll v_{ea}^h \ll v_{ea}^t, \quad (5.73)$$

причем из-за малости  $m_e/m_a$  неравенство (5.73) выполняется начиная со скоростей близких к порогу неупругих процессов. Учитывая это, упростим формулы (5.72). В формуле для  $S_0$  пренебрежем слагаемым, определяемым упругим рассеянием (оно имеет порядок  $v^t(m_e/m_a)nf_0$ ), а в формуле для  $S_1$  — слагаемым, определяемым неупругими столкновениями. Тогда

$$S_0 = -v_{ea}^h nf_0; \quad S_1 = -v_{ea}^t nf_1. \quad (5.74)$$

Подстановка  $S_1$  в уравнение для  $f_1$  приводит к прежнему соотношению (5.55) между  $f_1$  и  $f_0$ . Используя его, получаем из (5.71) уравнение для  $f_0$  в области неупругих столкновений

$$\frac{e^2 E^2}{3m_e^2 v^2} \frac{d}{dv} \left( \frac{v^2}{v_{ea}^t} \frac{df_0}{dv} \right) - v_{ea}^h f_0 = 0. \quad (5.75)$$

Его можно записать иначе:

$$\frac{d^2 f_0}{dv^2} + \left( \frac{2}{v} - \frac{1}{v_{ea}^t} \frac{dv_{ea}^t}{dv} \right) \frac{df_0}{dv} - \frac{q^2}{v^2} f_0 = 0, \quad (5.76)$$

где

$$q^2 = \frac{3m_e^2 v_{ea}^t v_{ea}^h}{e^2 E^2} v_1^2.$$

Воспользовавшись формулами (5.5), (5.6) или выражением (5.66) для средней энергии электронов, получим следующую оценку:

$$q^2 \approx \frac{m_a}{m_e} \frac{v_{ea}^h}{v_{ea}^t} \frac{v_1^2}{v_T^2} \approx \frac{m_a}{m_e} \frac{v_{ea}^h}{v_{ea}^t} \frac{\mathcal{E}_1}{T_e}.$$

Из нее видно, что при выполнении условия (5.73)  $q^2 \gg 1$ . Это неравенство позволяет использовать при решении уравнения (5.76) приближение, основанное на том, что  $f_0$  — быстро падающая функция  $v$ . В связи с этим в уравнении (5.76) можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым  $|(1/v)df_0/dv| \ll d^2 f_0/dv^2$  и считать  $q$  медленно изменяющейся функцией скорости  $|(1/q)dq/dv| \ll \ll |(1/f_0)df_0/dv|$ . В этом случае получим приближенное решение уравнения, обращаемое в нуль при  $v \rightarrow \infty$ , в виде\*

$$f_0 = C \exp \left( - \int_{v_1}^v \frac{q}{v_1} dv \right) = C \exp \left[ - \frac{\sqrt{3} m_e}{eE} \int_{v_1}^v \sqrt{v^t v^h} dv \right]. \quad (5.77)$$

\* Это приближение называют иногда квазиклассическим по аналогии с квазиклассическим приближением в квантовой механике.



Это решение справедливо в области скоростей, ограничиваемой неравенством  $v^h \gg m_e v^t / m_a$ , когда потери энергии электронов обусловлены неупругими столкновениями.

При выполнении обратного неравенства можно использовать функцию  $f_0$ , полученную без учета неупругих столкновений (5.64). Коэффициент  $C$  приближенно определяется сшиванием (5.77) и (5.64) на границе области при  $v^h = m_e v^t / m_a$ . Обычно эта граница очень близка к порогу неупругих процессов и сшивание можно производить при пороговой скорости  $v = v_1$ . В результате получим

$$C = A \exp \left[ -\frac{3}{2} \frac{m_e^2}{e^2 E^2} \int_0^{v_1} \kappa (v^t)^2 v dv \right], \quad (5.78)$$

где  $A$  — нормировочный коэффициент [см. (5.64)].

Конкретный вид  $f_0$  (5.77) определяется зависимостью частот столкновений  $v^t$  и  $v^h$  от скорости. Для случая  $v^t = \text{const}$  коэффициент  $C$  принимает вид

$$C = \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_e v_1^2}{2T_e} \right) = \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\mathcal{E}_1}{T_e} \right). \quad (5.79)$$

где  $T_e = \frac{2}{3} \frac{e^2 E^2}{m_e \kappa (v^t)^2}$ .

Зависимость  $v^h(v)$  вблизи порога неупругих процессов может быть аппроксимирована формулой

$$v^h(v) = n_a S^h v_1 \approx v_0^h (v/v_1 - 1).$$

Используя эту аппроксимацию, можно вычислить показатель экспоненты в (5.77):

$$\frac{\sqrt{3} m_e}{eE} \int_{v_1}^v \sqrt{v^t v^h} dv = \frac{\sqrt{3} m_e \sqrt{v^t v_0^h}}{eE} \int_{v_1}^v \sqrt{\frac{v}{v_1} - 1} dv = q_0 \left( \frac{v}{v_1} - 1 \right)^{3/2}, \quad (5.80)$$

где

$$q_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m_e \sqrt{v^t v_0^h}}{eE} v_1 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{\kappa} \frac{v_0^h}{v^t} \frac{\mathcal{E}_1}{T_e}}.$$

Подставляя (5.79) и (5.80) в (5.77), получаем выражение для  $f_0$  при  $v > v_1$ :

$$f_0 = (m_e / 2\pi T_e) \exp(-\mathcal{E}_1 / T_e) \exp[-q_0 (v/v_1 - 1)^{3/2}]. \quad (5.81)$$

Эта функция  $f_0$  для типичных значений  $q_0$  представлена на рис. 5.5 (масштаб по оси ординат при  $K > \mathcal{E}_1$  увеличен в 10 раз).

С помощью (5.81) можно найти эффективность процессов, определяющихся электронами, энергия которых больше порога неупругих столкновений. Вычислим, например, среднюю частоту ионизации, характеризующую скорость появления новых элект-

ронов в плазме. Воспользуемся для этого аппроксимацией частоты столкновений, приводящих к ионизации [см. (2.86)]:

$$v^i = n_a s^i v \approx v_0^i (v^2 - v_i^2)/v_i^2, \quad (5.82)$$

где  $v_i = (2e\mathcal{E}_i/m_e)^{1/2}$  — пороговая скорость для процесса ионизации. Средняя частота ионизации получается в результате усреднения (5.82) с помощью функции  $f_0$  (5.81). Используя формулу (5.11), получаем

$$v^i = 4\pi \int_{v_i}^{\infty} v^i(v) f_0(v) v^2 dv = 4\pi \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} v_0^i \exp(-\mathcal{E}_1/T_e) \times \\ \times \int_{v_i}^{\infty} \exp\left[-q_0 \left(\frac{v}{v_1}\right)^{3/2}\right] \left(\frac{v^2}{v_i^2} - 1\right) v^2 dv. \quad (5.83)$$

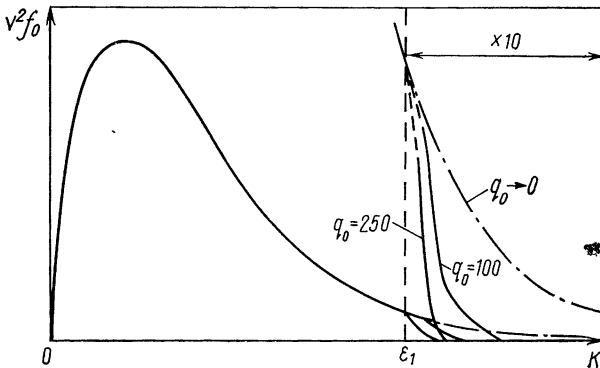


Рис. 5.5

При вычислении интеграла, входящего в (5.83), учтем, что  $f_0(v)$  быстро падает, и подынтегральная функция  $v^i f_0$  «прижата» к порогу ионизации. Поэтому можно считать, что под интегралом  $v - v_i = \omega \ll v_i$  и тогда входящая в него экспонента имеет вид

$$\exp\left[-q_0 \left(\frac{v}{v_1} - 1\right)^{3/2}\right] = \exp\left[-q_0 \left(\frac{v_i}{v_1} - 1\right)^{3/2}\right] \exp(-\zeta\omega),$$

где  $\zeta = (3/2)(q_0/v_1) (v_i/v_1 - 1)^{1/2}$ . Полагая под интегралом также  $v^2/v_i^2 - 1 \approx 2\omega/v_i$  и  $v^2 \approx v_i^2$ , получаем

$$\int_{v_i}^{\infty} \exp\left[-q_0 (v/v_1 - 1)^{3/2}\right] (v^2/v_i^2 - 1) v^2 dv \approx 2v_i \exp\left[-q_0 \left(\frac{v_i}{v_1} - 1\right)^{3/2}\right] \int_0^{\infty} \omega \exp(-\zeta\omega) d\omega = \frac{2v_i}{\zeta^2} \exp\left[-q_0 \left(\frac{v_i}{v_1} - 1\right)^{3/2}\right].$$

Подставляя это выражение в (5.83), находим

$$\frac{v^i}{v_0^i} = \frac{32}{9 \sqrt{\pi} q_0^2} \left( \frac{\mathcal{E}_1}{T_e} \right)^{3/2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_i}} \right)^{-1} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_1}{T_e}\right) \exp\left[-q_0 \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_1}} - 1 \right)^{3/2}\right]. \quad (5.84)$$

Произведение экспонент, входящее в (5.84), определяет значение  $f_0$  вблизи порога ионизации (при  $v \lesssim v_i$ ). Обе экспоненты очень малы, поскольку  $\mathcal{E}_i \gg T_e$  и  $q_0 \gg 1$ . Первая из них дает спад  $f_0$  в области  $v < v_1$ , в которой потери энергии определяются упругими столкновениями, вторая — спад, связанный с неупругими столкновениями при  $v > v_1$ . Предэкспоненциальный множитель зависит от ширины области ионизации; она также мала из-за быстрого уменьшения  $f_0$  при  $v > v_i$ . Поэтому эффективность ионизации мала  $v^i \ll v_0^i$ .

Мы рассмотрели случай, когда средняя энергия электронов мала по сравнению с порогом неупругих процессов (5.70). При больших напряженностях поля  $E$ , когда это условие не выполняется, необходимо учитывать влияние неупругих столкновений на функцию распределения во всей области скоростей. Если ограничить напряженность поля неравенством

$$E \ll m_e v_1 \sqrt{v^i v_0^i}, \quad (5.85)$$

то параметр  $q_0$  в уравнении (5.76) останется большим и приближенное решение уравнения для области неупругих столкновений ( $v > v_1$ ) (5.77) будет также справедливым. Поскольку оно быстро спадает, можно и в этом случае считать, что неупругие столкновения приводят к полной потере энергии.

Для определения функции  $f_0$  при  $v < v_1$  воспользуемся уравнением (5.58), добавив в него столкновительный член (5.46), описывающий приход электронов в результате неупругих столкновений. Полагая, что средняя энергия электронов много больше температуры атомов, запишем уравнение в виде

$$-\frac{1}{3v^2} \frac{d}{dv} \left( \frac{e^2 E^2}{m_e^2 v^i} v^2 \frac{df_0}{dv} \right) = \frac{1}{2v^2} \frac{d}{dv} (\kappa v^i v^3 f_0) + \frac{Q_n}{4\pi v^2} \delta(v), \quad (5.86)$$

где  $Q_n = 4\pi \int_{v_1}^{\infty} v^i f_0(v) v^2 dv$  — полное число неупругих столкновений в единицу времени. Умножая (5.86) на  $4\pi v^2 dv$  и интегрируя его от нуля до  $v$ , получаем

$$\frac{4\pi}{3} \frac{e^2 E^2}{m_e^2 v^i} v^2 \frac{df_0}{dv} - 2\pi \kappa v^i v^3 f_0 = Q_n. \quad (5.87)$$

Левая часть уравнения представляет собой поток в пространстве скоростей через сферическую поверхность  $4\pi v^2$ ; первый член обус-

ловлен получением электронами энергии в электрическом поле, второй — потерями энергии при упругих столкновениях [см. (5.34), (5.59)]. Сумма этих потоков определяется скоростью появления медленных электронов в результате неупругих столкновений.

Уравнение (5.87) представляет собой линейное неоднородное уравнение первого порядка относительно  $f_0$ . Его решение легко найти методом интегрирующего множителя. При  $v^t = \text{const}$  оно имеет вид

$$f_0(v) = A \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_0}\right) \left[ \int_v^{v_1} \frac{1}{v^2} \exp\left(\frac{m_e v^2}{2T_0}\right) dv + B \right], \quad (5.88)$$

где  $T_0 = (2/3)e^2 E^2 / m_e \kappa (v^t)^2$  — температура, определяющая среднюю энергию электронов в поле  $E$  при отсутствии неупругих столкновений;  $A = 3Qm_e^2 v^t / 4\pi e^2 E^2$ . Это решение справедливо при  $v < v_1$ . При  $v = v_1$  его следует считать с функцией (5.77), полагая

$$f_0(v_1) = C, \quad \left. \frac{df_0}{dv} \right|_{v=v_1} = -\frac{q_0}{v_1} C.$$

Так как при этом  $(1/v_1) |f_0/f_0'| = 1/q \ll 1$ , и можно для функции (5.88) принять приближенное граничное условие  $f_0(v_1) = 0$ , то получим  $B = 0$ . Коэффициент  $C$  найдем, приравнявая производные от  $f_0$  в областях  $v < v_1$  [см. (2.77)] и  $v > v_1$  [см. (2.88)]:

$$f_0 = A \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_0}\right) \int_v^{v_1} \frac{1}{v^2} \exp\left(\frac{m_e v^2}{2T_0}\right) dv. \quad (5.89)$$

Из (5.89) следует, что при  $v \rightarrow 0$   $f_0$  стремится к бесконечности как  $1/v$ . Этот вывод связан, очевидно, с предположением о полной потере энергии электронами при неупругих столкновениях, в результате которого был введен при  $v = 0$  бесконечный по амплитуде источник электронов  $Q_n \delta(v)$ . Отметим, что хотя  $f_0$  имеет особенность при  $v \rightarrow 0$ , функция распределения по полным скоростям  $f_v = 4\pi v^2 f_0$  при  $v \rightarrow 0$  остается малой, так как  $f_v \sim v^2 f_0 \sim v$ , поэтому никаких трудностей при усреднении данная особенность не вызывает.

Равенство (5.89) описывает изменение функции распределения при  $v < v_1$ , связанное с неупругими столкновениями. Легко убедиться, что при  $m_e v^2 / 2 \ll T_0$  это изменение мало повсюду, кроме области очень малых скоростей:  $v \lesssim v_1 (\mathcal{E}_1 / T_0) \exp(-\mathcal{E}_1 / T_0)$ , и области скоростей близких к порогу:  $(v_1 - v) < T_0 v_1 / \mathcal{E}_1$ . Вне данных областей входящий в (5.89) интеграл практически не зависит от нижнего предела и функция  $f_0$  совпадает с определенной без учета неупругих столкновений функцией (5.64). С ростом  $E$  влияние неупругих столкновений все более значительно.

Рассмотрим случай\*

$$T_0 = \frac{2}{3} \left| \frac{e^2 E^2}{m_e \kappa (v^i)^2} \right| \gg \mathcal{E}_1, \quad (5.90)$$

когда второе слагаемое в (5.87), описывающее потери энергии при упругих столкновениях, пренебрежимо мало по сравнению с первым. Механизм формирования распределения по энергиям при этом заключается в том, что при  $v < v_1$  электроны набирают энергию в результате диффузии по скоростям в электрическом поле (см. с. 122), а при  $v \gtrsim v_1$  теряют ее в результате неупругих столкновений. Для  $\mathcal{E}_1 \ll T_0$  можно в формуле (5.89) считать экспоненты равными единице. Функция  $f_0$  приобретает тогда простой вид

$$f_0 = A (1/v - 1/v_1). \quad (5.91)$$

Коэффициент  $A$  находим из приближенного условия нормировки

$$1 = 4\pi \int_0^{v_1} f_0 v^2 dv = (2/3) \pi A v_1^3, \quad A = 3/2\pi v_1^3.$$

Используя его, получаем окончательно выражение для  $f_0$  при  $v < v_1$ :

$$f_0 = (3/2\pi v_1^3) (1/v - 1/v_1). \quad (5.92)$$

Средняя энергия электронов при распределении (5.92) равна

$$\langle K_e \rangle = \int_0^{v_1} \frac{m_e v^2}{2} 4\pi v^2 f_0 dv = \frac{3}{20} m_e v_1^2 = \frac{3}{10} \mathcal{E}_1.$$

Для определения средней частоты ионизации  $\nu^i$  воспользуемся распределением при  $v > v_1$ , даваемым формулой (5.77). Нормировочный коэффициент в ней найдем, приравнявая производные от  $f_0$  при  $v = v_1$  в (5.77) и (5.92). Тогда

$$\left. \frac{df_0}{dv} \right|_{v=v_1} = -\frac{3}{2\pi v_1^4} = -\frac{C q_0}{v_1}, \quad C = \frac{3}{2\pi v_1^3 q_0}. \quad (5.93)$$

Вычисления  $\nu^i$  с помощью распределения (5.77) были выполнены ранее. Их можно использовать, заменив в формуле для  $f_0$  лишь выражение для нормировочного коэффициента  $C$ . Подставляя величину  $C$ , определяемую формулой (5.93), вместо (5.78), получаем

$$\nu^i/\nu_0^i = \frac{32}{9q_0^3} \left( 1 - \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_i}} \right)^{-1} \exp \left[ -q_0 \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_1}} - 1 \right)^{3/2} \right], \quad (5.94)$$

где  $q_0 = (2/\sqrt{3}) (m_e \sqrt{v^i v_0^i}/eE) v_1$ .

\* Заметим, что для электронов в газе, состоящем из тяжелых атомов, это условие может быть согласовано с (5.85), поскольку коэффициент  $\kappa = 2 m_e/m_a$  очень мал.

Мы рассмотрели влияние на функцию распределения неупругих столкновений, связанных с возбуждением различных уровней и приводящих к потерям энергии электронов. В принципе возможны также обратные процессы — столкновения электронов с возбужденными атомами, приводящие к увеличению энергии электронов (соударения второго рода). Во многих случаях можно считать, что они несущественны, так как возбужденные атомы теряют свою энергию в основном в результате процессов излучения, столкновений с нейтральными частицами и стенками. Однако иногда (например, при больших давлениях нейтрального газа, когда плазма не полностью прозрачна для излучения) приходится учитывать соударения второго рода. Они приводят к некоторой компенсации потерь энергии, вызванных процессами возбуждения. В предельном случае, при переходе к замкнутой системе, прямые и обратные неупругие столкновения обеспечивают такой обмен энергией между электронами и атомами, который ведет к установлению равновесного максвелловского распределения (см. § 4.1).

### § 5.6. Влияние электрон-электронных столкновений на функцию распределения электронов

До сих пор мы пренебрегали влиянием электрон-электронных столкновений на функцию распределения. Как было показано в § 5.4, условия, при которых такое пренебрежение [см. (5.52)] допустимо, выполняются лишь для очень малых степеней ионизации. Рассмотрим теперь противоположный случай, когда обмен электронов энергией в результате электрон-электронных столкновений значительно эффективнее потерь энергии при столкновениях электронов с атомами. Этот случай реализуется при условии

$$\kappa_{ea} \nu_{ea} \ll \nu_{ee}. \quad (5.95)$$

Если потери энергии электронов связаны с упругими столкновениями и  $\kappa_{ea} = 2m_e/m_a$ , условие (5.95) принимает вид, противоположный (5.52):

$$\eta \gg (m_e/m_a) s_{ea}/s_{ee}. \quad (5.96)$$

Видно, что это неравенство выполняется уже при сравнительно низких степенях ионизации, тем меньших, чем меньше энергия электронов.

Учитывая условие (5.95), обсудим решение уравнения для изотропной составляющей функции распределения. В соответствии с (5.49) это уравнение имеет вид

$$-\frac{eEn}{3m_e v^2} \frac{d}{dv} (v^2 f_1) = S_{0a} + S_{0i} + S_{0e}. \quad (5.97)$$

В уравнении стационарный баланс средних энергий электронов определяется первыми тремя членами — приобретение электронами энергии от электрического поля (описываемое первым членом) компен-

сируется потерями энергии электронов при столкновениях с атомами и ионами (описываемыми вторым и третьим членами). Соответственно первый член должен иметь тот же порядок величины, что и сумма  $S_{0a} + S_{0i}$ . Столкновительный член  $S_{0e}$ , обусловленный электрон-электронными столкновениями, не может, очевидно, влиять на изменения средней энергии электронов, он приводит лишь к перераспределению энергии между ними. В рассматриваемом случае член  $S_{0e}$  имеет порядок  $v_e e n f_0$ , он значительно больше второго ( $S_{0a} \approx \kappa_{ea} v_{ea} n f_0$ ) и третьего ( $S_{0i} \approx \kappa_{ei} v_{ei} n f_0$ ). Поэтому в первом приближении вид функций распределения определяется уравнением

$$S_{0e} = n_\alpha n_\beta \int_{(v_1)} \int_{(\Omega)} [f_0(v') f_0(v'_1) - f_0(v) f_0(v_1)] |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \sigma d\Omega d^3v_1 \quad (5.98)$$

[как отмечалось в § 3.3,  $S_{0e}$  можно записать в виде столкновительного интеграла (3.23) с заменой  $f(v)$  на  $f_0(v)$ ]. В § 4.2 было показано, что это уравнение приводит к максвелловскому распределению скоростей

$$f_0 = (m_e/2\pi T_e)^{3/2} \exp(-m_e v^2/2T_e). \quad (5.99)$$

Однако электронную температуру  $T_e$  нельзя найти из уравнения (5.98). Поскольку это уравнение включает только межэлектронные столкновения, оно удовлетворяется при распределении (5.99) с любым значением  $T_e$ .

Для определения  $T_e$  можно использовать уравнение баланса энергий, которое получается из исходного уравнения (5.97) для  $f_0$ . Чтобы получить его, умножим (5.97) почленно на  $m_e v^2/2$  и на весовой множитель  $4\pi v^2 dv$  и проинтегрируем по скоростям от нуля до бесконечности. Интеграл от первого слагаемого вычислим интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{m_e v^2}{2} 4\pi v^2 dv \left[ -\frac{eEn}{3m_e v^2} \frac{d}{dv} (v^2 f_1) \right] &= -\frac{2\pi}{3} eEn \int_0^\infty v^2 \frac{d}{dv} (v^2 f_1) dv = \\ &= neE \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^3 f_1 dv = neuE \end{aligned} \quad (5.100)$$

[здесь была использована общая формула (5.21) для  $v$ ]. Столкновительный член, определяемый упругими столкновениями электронов с атомами (5.32) при максвелловском распределении скоростей электронов (5.99), равен

$$\begin{aligned} S_{0a} &= \frac{1}{2} \frac{\kappa_{ea} n}{v^2} \frac{d}{dv} \left[ v^3 v_{ea}^t f_0 + \frac{T_a}{m_e} v^2 \frac{df_0}{dv} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\kappa_{ea} n}{v^2} \frac{d}{dv} \left[ v^3 v_{ea}^t f_0 \left( 1 - \frac{T_a}{T_e} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Интеграл, в который он входит, вычисляется аналогично (5.100):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} S_{0a} \frac{m_e v^2}{2} 4\pi v^2 dv &= -2\pi m_e n \kappa_{ae} \left(1 - \frac{T_a}{T_e}\right) \int_0^{\infty} v^4 v_{ea}^t f_0 dv = \\ &= -\frac{3}{2} n \kappa_{ea} \overline{v_{ea}^t} (T_e - T_a), \end{aligned} \quad (5.102)$$

где введено обозначение

$$\overline{v_{ea}^t} = \int_0^{\infty} v^4 v_{ea}^t f_0 dv \Big/ \int_0^{\infty} v^4 f_0 dv \quad (5.103)$$

и учтено, что

$$4\pi \int_0^{\infty} \frac{m_e v^2}{2} v^2 f_0 dv = \frac{3}{2} T_e.$$

Интеграл, в котором содержится столкновительный член, определяемый неупругими столкновениями с малыми потерями энергии, вычисляется таким же образом. Используя (5.43), находим

$$\int_0^{\infty} S_{0a}^t \frac{m_e v^2}{2} 4\pi v^2 dv = -\frac{3}{2} n \overline{\kappa_{ea}^t v_{ea}^t} T_e, \quad (5.104)$$

где черта по-прежнему обозначает усреднение по  $v$  с весом  $v^2$ . Интеграл, определяемый неупругими столкновениями с большой потерей энергии, найдем с помощью (5.48):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} S_{0a}^h \frac{m_e v^2}{2} 4\pi v^2 dv &= -4\pi n \int_0^{\infty} \frac{m_e v^2}{2} v_{ea}^h f_0 v^2 dv = \\ &= -\frac{3}{2} n \overline{v_{ea}^h} T_e. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Наконец, нетрудно показать, что интеграл, в который входит  $S_{0e}$ , характеризует суммарное изменение энергии электронов в результате электрон-электронных столкновений (см. с. 157). Он обращается поэтому в нуль независимо от вида функции распределения. Суммируя выражения (5.102) — (5.105), связанные со столкновениями электронов с атомами, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{m_e v^2}{2} S_{0a} 4\pi v^2 dv &= -\frac{3}{2} n \kappa_{ea} \overline{v_{ea}^t} (T_e - T_a) - \frac{3}{2} n \overline{\kappa_{ea}^t v_{ea}^t} T_e - \\ &- \frac{3}{2} n \overline{v_{ea}^h} T_e = -\frac{3}{2} n \kappa_{ea}^s v_{ea}^s (T_e - T_a), \end{aligned} \quad (5.106)$$

где введено обозначение:

$$\kappa_{ea}^s v_{ea}^s = \kappa_{ea} \overline{v_{ea}^t} + \overline{\kappa_{ea}^t v_{ea}^t} + \overline{v_{ea}^h}; \quad v_{ea}^s = \overline{v_{ea}^t} + \overline{v_{ea}^h} \quad (5.107)$$



и учтено, что неупругие столкновения существенны обычно лишь при  $T_e \gg T_a$ .

Таким же получается выражение для интеграла, в который входит столкновительный член  $S_{0i}$ :

$$\int_0^{\infty} S_{0i} \frac{m_e v^2}{2} 4\pi v^2 dv = -\frac{3}{2} n \chi_{ei}^s v_{ei}^s (T_e - T_i). \quad (5.108)$$

Уравнение баланса энергии получим, приравнявая (5.100) сумме (5.106) и (5.108):

$$-neuE = (3/2) n \chi_{ea}^s v_{ea}^s (T_e - T_a) + (3/2) n \chi_{ei}^s v_{ei}^s (T_e - T_i). \quad (5.109)$$

Оно представляет собой равенство энергии, вводимой в единицу объема электронного газа, и энергии, теряемой электронами в единицу объема. Вводимая энергия в электрическом поле определяется обычной формулой, следующей из закона Джоуля — Ленца  $P_E = jE$ , где  $j$  — плотность тока электронов, равная  $j = -neu$ . Потери энергии в (5.109) связаны с ее передачей при столкновениях от электронов к атомам и ионам.

Чтобы уравнение баланса (5.109) было полным, надо получить выражение для направленной скорости  $u$ . Связь направленной составляющей функции распределения  $f_1$  с  $f_0$  определяется вторым уравнением (5.49). Для условий  $v_{ee} \approx v_{ei} \ll v_{ea}$  могут быть использованы прежнее выражение для столкновительного члена  $S$  (5.28) и соответственно прежняя формула (5.55) для  $f_1$ . При этом направленная скорость дается формулой (5.56), которая для максвелловского распределения (5.99) принимает вид

$$u = \frac{4\pi}{3} \frac{eE}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{v^2}{v_{ea}^t} \frac{df_0}{dv} dv = \\ = -\frac{4\pi}{3} \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \frac{eE}{T_e} \int_0^{\infty} \frac{v^4}{v_{ea}^t} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right) dv. \quad (5.110)$$

При  $v_{ea}^t = \text{const}$  интегрирование приводит к  $u = -eE/m_e v_{ea}^t$  [см. (5.57)].

В общем случае направленная скорость может быть выражена через усредненную частоту столкновений (5.103) аналогичным образом:

$$u = -\gamma eE/m_e \bar{v}_{ea}^t, \quad (5.111)$$

где  $\gamma$  — численный коэффициент порядка единицы. В частности, для случая, когда частота столкновений пропорциональна скорости  $v_{ea} = v/\lambda_{ea}$ , с помощью формул (5.103) и (5.110) найдем

$$\bar{v}_{ea} = (8/3) \sqrt{2/\pi} (1/\lambda_{ea}) \sqrt{T_e/m_e}, \quad \gamma = 32/9\pi. \quad (5.112)$$

Подставляя формулу (5.111) в уравнение баланса (5.109), преобразуем его для условий, когда  $v_{ee} \approx v_{ei} \ll v_{ea}$  и слагаемым  $S_{0i}$  можно пренебречь, к виду

$$T_e - T_a = (2\gamma/3) e^2 E^2 / m_e \kappa_{ea}^s (v_{ea}^s)^2. \quad (5.113)$$

При  $v^s \approx v^t = \text{const}$  и  $\kappa^s = \kappa^e = \text{const}$  правая часть равенства не зависит от электронной температуры и его можно непосредственно использовать для определения  $T_e$  (в этом случае  $\gamma = 1$ ). В общем случае, когда  $v$  и  $\kappa$  зависят от скорости электронов и, соответственно, усредненные величины  $v^s$  и  $\kappa^s$  (5.107) — от электронной температуры, равенство (5.113) представляет собой уравнение относительно  $T_e$ . Например, для  $v^s = v/\lambda$ ,  $\lambda = \text{const}$  и  $\kappa^s = \kappa^e = \text{const}$  найдем, используя (5.113) и (5.112):

$$T_e - T_a = (1/6) e^2 E^2 \lambda_{ea}^2 / \kappa_{ea} T_e$$

и при  $T_e \gg T_a$

$$T_e \approx (1/\sqrt{6}) e E \lambda_{ea} / \sqrt{\kappa_{ea}}. \quad (5.114)$$

При условиях, когда неравенство  $v_{ea} \gg v_{ee}, v_{ei}$  не выполняется, следует учитывать влияние столкновений электронов с электронами и ионами на функцию  $f_1$ . Учет электрон-электронных столкновений довольно сложен, поскольку столкновительный член  $S_1$  для них нельзя представить в виде дифференциального оператора и уравнение для  $f_1$  получается интегро-дифференциальным. Чтобы решить его, функцию  $f_1$  разлагают по полиномам Лагерра. Результат расчетов может быть представлен в виде, аналогичном (5.111):

$$u = -\gamma e E / m_e (v_{ea} + v_{ei}), \quad (5.115)$$

где коэффициент  $\gamma$  определяется видом зависимости  $v_{ea}(v)$  и соотношением между  $v_{ea}$  и  $v_{ei}$ . Для сильноионизованной плазмы, в которой  $v_{ei} \gg v_{ea}$ ,

$$u \approx -\gamma e E / m_e \bar{v}_{ei},$$

где  $\gamma = 1,96$ ;  $v_{ei}$  можно найти, из (5.103), используя (2.69):

$$\bar{v}_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{ne^4}{m_e^{1/2} T_e^{3/2}} L_e. \quad (5.116)$$

Подставляя (5.115) в уравнение баланса (5.109), получаем уравнение для электронной температуры. Это уравнение проанализировано в § 7.10. Для полностью ионизованной плазмы область применения получаемых результатов вообще весьма ограничена. Во-первых, начиная уже со сравнительно небольших напряженностей электрического поля энергия, передаваемая электронам от поля, не успевает передаваться ионам и стационарное состояние баланса, описываемое уравнением (5.109), не может быть реализовано. Кроме того, быстрые электроны переходят в режим непрерывного уско-

рения, в результате которого функция распределения оказывается сильно анизотропной (см. § 7.11).

Мы показали, что распределение по скоростям электронов при преобладающем влиянии электрон-электронных столкновений является максвелловским. В случае достаточно высокой степени ионизации, при которой частота электрон-электронных столкновений превосходит частоту неупругих столкновений ( $v_{ee} \gg v_{ea}^h$ ), можно использовать это распределение для определения эффективности неупругих процессов, в частности процесса ионизации. Используя аппроксимационную формулу (2.86) для сечения ионизации, получаем

$$v^i = \int_{v_i}^{\infty} n_a s_0^i v \left( \frac{v^2}{v_i^2} - 1 \right) 4\pi v^2 f_0 dv =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} n_a s_0^i \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \left( 1 + 2 \frac{T_e}{\mathcal{E}_i} \right) \exp \left( -\frac{\mathcal{E}_i}{T_e} \right), \quad (5.117)$$

где  $v_i = 2\mathcal{E}_i/m_e$ . При  $\mathcal{E}_i \gg T_e$  находим

$$v^i \approx 2 \sqrt{\frac{2T_e}{\pi m_e}} n_a s_0^i \exp \left( -\frac{\mathcal{E}_i}{T_e} \right). \quad (5.118)$$

### § 5.7. Влияние магнитного поля на функцию распределения электронов

В присутствии постоянных электрического и магнитного полей функцию распределения электронов следует искать в виде

$$f(\mathbf{v}) = f_0(v) + \frac{v_x}{v} f_{1x}(v) + \frac{v_y}{v} f_{1y}(v) + \frac{v_z}{v} f_{1z}(v) =$$

$$= f_0(v) + \frac{\mathbf{v} \mathbf{f}_1(v)}{v}. \quad (5.119)$$

Предполагая по-прежнему, что функция распределения не зависит от времени и координат, можно записать уравнения (5.22) для функций  $f_0$ ,  $f_{1x}$ ,  $f_{1y}$ ,  $f_{1z}$  следующим образом:

$$-\frac{ne}{3m_e v^2} \frac{d}{dv} (v^2 \mathbf{E} \mathbf{f}_1) + S_0; \quad (5.120)$$

$$\frac{ne \mathbf{E}}{m_e} \frac{df_0}{dv} + \frac{ne}{m_e c} [\mathbf{H} \times \mathbf{f}_1] = -S_1. \quad (5.121)$$

Второе уравнение является векторной записью трех уравнений, определяющих связь между направленными составляющими функции распределения  $f_{1x}$ ,  $f_{1y}$ ,  $f_{1z}$  и изотропной составляющей  $f_0$ . Столкновительный член  $S_1$  имеет компоненты

$$S_{1k} = \frac{3}{4\pi} \int_{(\omega)} \frac{\delta(nf)}{\delta t} \cos \Theta_k d\omega, \quad (5.122)$$

где  $\Theta_k$  — угол между вектором скорости и осью  $k$ , а интегрирование приводится по телесным углам, охватывающим все направления вектора скорости. Подставляя в (5.122) интеграл упругих столкновений электронов с атомами (5.25) и полагая величины скорости электронов до и после столкновения одинаковыми, получаем

$$S_{1k} = -\frac{3}{4\pi} n n_a \int_{(\omega)} \cos \Theta_k d\omega \int_{(\Omega)} \mathbf{f}_1(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) v \sigma d\Omega. \quad (5.123)$$

Изменение вектора скорости при упругих столкновениях связано с углом рассеяния формулой (2.16). Подставляя ее во второй интеграл (5.123), находим

$$\begin{aligned} n_a \int_{(\Omega)} \mathbf{f}_1(v) (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) v \sigma d\Omega &= -n_a v (\mathbf{f}_1 \mathbf{v}) \int_{(\Omega)} (1 - \cos \vartheta) \sigma d\Omega = \\ &= -n_a v s^t (\mathbf{f}_1 \mathbf{v}) = -v^t \mathbf{f}_1 v \end{aligned}$$

и, далее,

$$S_{1k} = -\frac{3}{4\pi} n v^t \int_{(\omega)} \sum_l f_{1l} v_l \cos \Theta_k d\omega = -\frac{3}{4\pi} n v^t \sum_l f_{1l} \int_{(\omega)} v_l \cos \Theta_k d\omega.$$

Очевидно, что интеграл по направлениям скорости отличен от нуля только при  $l = k$ :

$$\int_{(\omega)} v_l \cos \Theta_k d\omega = \delta_{lk} v \int \cos^2 \Theta_k d\omega = \frac{4\pi v}{3} \delta_{lk}.$$

Подставляя его, имеем:  $S_{1k} = -n v_{ea}^t f_{1k}$ , или в векторной форме

$$\mathbf{S}_1 = -n v_{ea}^t \mathbf{f}_1. \quad (5.124)$$

Аналогичные выражения получаются для столкновительного члена, связанного с неупругими столкновениями электронов с атомами (см. § 5.3). Складывая их с (5.124), находим для случая  $v_{ea} \gg v_{ee}, v_{ei}$ , т. е. когда электрон-электронные и электрон-ионные столкновения несущественны:

$$\mathbf{S}_1 = -n (v_{ea}^t + v_{ea}^r + v_{ea}^h) \mathbf{f}_1 = -n v_{ea}^s \mathbf{f}_1. \quad (5.125)$$

Подставляя (5.125) в (5.121), находим

$$\frac{e\mathbf{E}}{m_e} \frac{d\mathbf{f}_0}{dv} + \frac{e}{m_e c} [\mathbf{H} \times \mathbf{f}_1] - v_{ea}^s \mathbf{f}_1 = 0. \quad (5.126)$$

Направим ось  $Oz$  параллельно  $\mathbf{H}$ , а ось  $ox$  так, чтобы вектор  $\mathbf{E}$  лежал в плоскости  $xz$ . Тогда проекции (5.126) на оси координат

примут вид\*

$$\frac{eE_x}{m_e} \frac{df_0}{dv} - \frac{eH}{m_e c} f_{1y} - v f_{1x} = 0;$$

$$\frac{eH}{m_e c} f_{1x} - v f_{1y} = 0; \quad \frac{eE_z}{m_e} \frac{df_0}{dv} - v f_{1z} = 0.$$

Решая эти уравнения относительно  $f_{1x}$ ,  $f_{1y}$ ,  $f_{1z}$ , получаем

$$f_{1x} = \frac{eE_{\perp} v}{m_e (\omega_H^2 + v^2)} \frac{df_0}{dv}; \quad f_{1y} = \frac{eE_{\perp} \omega_H}{m_e (\omega_H^2 + v^2)} \frac{df_0}{dv};$$

$$f_{1z} = \frac{eE_{\parallel}}{m_e v} \frac{df_0}{dv}, \quad (5.127)$$

где введены обозначения;  $E_{\parallel} = E_z$  — компонента  $\mathbf{E}$ , параллельная магнитному полю;  $E_{\perp} = E_x$  — компонента, перпендикулярная магнитному полю;  $\omega_H = eH/m_e c$  — циклотронная частота (как известно, она определяет угловую скорость вращения электронов в магнитном поле (см. § 8.1)).

С помощью выражений (5.127) можно, как и раньше, получить общие формулы для направленной скорости электронов. Подставляя (5.127) в (5.21), находим:

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= \frac{4\pi}{3} \frac{eE_{\perp}}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{v^3 v}{(\omega_H^2 + v^2)} \frac{df_0}{dv} dv; \\ u_{1y} &= \frac{4\pi}{3} \frac{eE_{\perp}}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{v^3 \omega_H}{(\omega_H^2 + v^2)} \frac{df_0}{dv} dv; \\ u_{1z} &= \frac{4\pi}{3} \frac{eE_{\parallel}}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{v^3}{v} \frac{df_0}{dv} dv. \end{aligned} \right\} (5.128)$$

Для случая  $v = \text{const}$  интегралы можно взять по частям. Тогда выражения (5.128) не будут зависеть от вида  $f_0$ :

$$u_{1x} = -\frac{eE_{\perp}}{m_e} \frac{v}{(\omega_H^2 + v^2)}; \quad u_{1y} = -\frac{eE_{\perp}}{m_e} \frac{\omega_H}{(\omega_H^2 + v^2)};$$

$$u_{1z} = -\frac{eE_{\parallel}}{m_e v}. \quad (5.129)$$

Как видно, магнитное поле не влияет на компоненту скорости  $u_z$ , параллельную ему. Это естественно, так как лоренцева сила пропорциональна векторному произведению поля на скорость и не имеет составляющей, параллельной  $\mathbf{H}$ . Влияние магнитного поля

\* Здесь и далее в случаях, когда смысл величины  $v$  не вызывает сомнений, будем опускать индексы при  $v$ .

на перпендикулярные компоненты скорости существенно при  $\omega_H > v$ . При этом уменьшается скорость в направлении компоненты  $\mathbf{E}$ , перпендикулярной  $\mathbf{H}$  ( $u_x$ ), и появляется компонента скорости, перпендикулярная  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Такое влияние связано с вращением электронов в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}$ . При  $\omega_H \ll v$  вращение не успевает проявиться — за время между столкновениями электроны двигаются практически по прямой. При  $\omega_H \gg v$  электроны между столкновениями совершают много оборотов. В результате периоды ускорения электронов под действием  $E_{\perp}$  (в течение которых  $vE_{\perp} < 0$ ) сменяются периодами замедления (когда  $vE_{\perp} > 0$ ) и суммарная эффективность ускорения электронов в направлении  $E_{\perp}$  падает. Подробный анализ влияния магнитного поля на направленное движение электронов будет дан в гл. 9.

Используя полученные выражения для компонент  $f_{\perp}$ , рассмотрим влияние магнитного поля на  $f_0$ . В уравнении для  $f_0$  (5.120) магнитное поле влияет на первый член, определяющий приобретение энергии электронами под действием электрического поля. Этот член, как уже отмечалось в § 5.4, является дивергенцией сферически-симметричного потока в пространстве скоростей

$$\operatorname{div}_v \Gamma_{vE} = \frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} (v^2 \Gamma_{vE}), \quad (5.130)$$

где

$$\Gamma_{vE} = -\frac{ne}{3m_e} \mathbf{E} f_{\perp} = -\frac{ne}{3m_e} (E_{\perp} f_{1x} + E_{\parallel} f_{1z}).$$

Подставляя в (5.130) выражения (5.127), получаем

$$\Gamma_{vE} = -\frac{ne^2}{3m_e^2} \left( \frac{E_{\parallel}^2}{v} + \frac{E_{\perp}^2 v}{\omega_H^2 + v^2} \right) \frac{df_0}{dv}. \quad (5.131)$$

Поскольку плотность потока пропорциональна производной  $df_0/dv$ , то поток имеет диффузионный характер и является следствием случайных «блужданий» электронов по шкале скоростей. Коэффициент диффузии, как было показано в § 5.4, определяется средним квадратом изменения скорости электрона за время между столкновениями (5.60):

$$D_v = (1/2) \langle (\Delta v)^2 \rangle \tau^{-1} = (1/6) (\Delta v_E)^2 v^{-1}.$$

В отсутствие магнитного поля изменение скорости связано только с ускорением в электрическом поле ( $\Delta v_E = eE/m_e v$ ), поэтому величина потока имеет вид (5.59). Таким же оказывается  $\Delta v_E$  при  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ , практически таким же  $\Delta v_E$  остается и при  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$  в случае  $\omega_H < v$ . Однако при  $\omega_H > v$  вращение электронов приводит, как отмечалось, к поочередной смене периодов ускорения и замедления электронов. Время каждого периода ускорения  $\Delta t_E$  равно, очевидно, времени полуоборота электрона  $\Delta t_E = \pi/\omega_H$ . Соответственно максимальное изменение скорости за время между столкно-

вениями составляет  $\Delta v_E \approx (eE_{\perp}/m_e) \Delta t_E \approx \kappa eE_{\perp}/m_e \omega_H$ . Это изменение и определяет с точностью до множителя порядка единицы коэффициент диффузии при  $\omega_H > \nu$ :

$$D_v = \frac{(\Delta v_E)^2}{6} \nu \approx \frac{e^2 E_{\perp}^2}{m_e \omega_H^2} \nu.$$

Полученная формула соответствует второму слагаемому в (5.131). Выражение (5.131) для  $\Gamma_E$  можно записать в форме (5.59), если ввести эффективное электрическое поле:

$$E_{\text{эф}}^2 = E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2 \nu^2 / (\omega_H^2 + \nu^2). \quad (5.132)$$

При этом уравнение (5.120) для  $f_0$  будет формально таким же, как и в отсутствие магнитного поля, зависимость  $f_0$  от  $\mathbf{H}$  входит в него только через  $E_{\text{эф}}$ . Поэтому для определения влияния магнитного поля на  $f_0$  можно воспользоваться общими результатами § 5.4 — 5.6, заменив в них  $E$  на  $E_{\text{эф}}$ . Однако при установлении конкретного вида  $f_0$  надо учитывать, что  $E_{\text{эф}}$  (5.132) в общем случае зависит от  $\nu$ .

Для случая  $\nu = \text{const}$  такая зависимость отсутствует и можно непосредственно использовать формулы § 5.4 — 5.6. Так, при условиях, когда существуют только упругие столкновения, распределение  $f_0$  оказывается максвелловским. Электронная температура при этом определяется формулой (5.66), в которой надо заменить  $E$  на  $E_{\text{эф}}$  (5.132):

$$T_e = T_a + \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e \kappa \nu^2} \left[ E_{\parallel}^2 + \frac{\nu^2}{\omega_H^2 + \nu^2} E_{\perp}^2 \right]. \quad (5.133)$$

Интересно отметить, что в электрическом поле, перпендикулярном магнитному, при  $\omega_H \gg \nu$  функция  $f_0$  вообще не зависит от  $\nu$ . Действительно, в соответствии с (5.131) скорость набора энергии электронами, определяющаяся  $\Gamma_{vE}$ , пропорциональна  $\nu$  так же, как и столкновительный член, обусловленный упругими столкновениями. Поэтому в уравнении (5.120) частота столкновений сокращается, и оно принимает вид

$$\frac{1}{3} \frac{e^2 E_{\perp}^2}{m_e^2 \omega_H^2} \frac{df_0}{d\nu} = \frac{1}{2} \kappa \nu f_0 + \frac{T_a}{m_a} \frac{df_0}{d\nu}. \quad (5.134)$$

Решением этого уравнения при  $\kappa_{ea} = \text{const}$  является максвелловское распределение с температурой

$$T_e = T_a + (3/2) e^2 E_{\perp}^2 / m_e \kappa \omega_H^2. \quad (5.135)$$

Как было показано в § 5.6, при преобладающем влиянии электрон-электронных столкновений на функцию  $f_0$  (т. е. при  $\bar{n}_{ee} \gg \gg \kappa_{ea} \nu_{ea}$ ) она близка к максвелловской. При этом электронная температура определяется уравнением баланса энергий (5.109). Магнитное поле влияет на левую часть уравнения баланса. В нее входит направленная скорость электронов, компоненты которой

при  $v_{ei} \ll v_{ea}$  могут быть найдены с помощью (5.128). Тогда уравнение баланса можно привести к форме, аналогичной (5.113):

$$T_e - T_a = \frac{2\gamma}{3} \frac{e^2}{m_e \kappa v} E_{\text{эф}}^2, \quad (5.136)$$

где  $E_{\text{эф}}^2 = E_{\parallel}^2 + \xi \frac{v^2}{\omega_H^2 + v^2} E_{\perp}^2$ . Здесь  $v$  и  $\kappa$  — суммарные усредненные величины, определяемые (5.107) и зависящие в общем случае от  $T_e$ ;  $\gamma$  и  $\xi$  — численные коэффициенты порядка единицы, которые определяются зависимостью  $v_{ea}$  и  $\kappa_{ea}$  от  $v$ , а  $\xi$  — еще и соотношением  $\omega_H/v$ . Равенство (5.136) также представляет собой уравнение для  $T_e$ . При  $v_{ea} = \text{const}$ ,  $\kappa_{ea} = \text{const}$  правая часть (5.136) не зависит от  $T_e$ , коэффициенты  $\gamma$  и  $\xi$  равны единице и равенство (5.136) переходит в (5.133).

Для сильноионизованной плазмы при  $v_{ei} \gtrsim v_{ea}$  результаты численных расчетов направленной скорости также можно представить в виде аналогичном (5.129) с коэффициентами порядка единицы. Соответственно и уравнение баланса при  $T_i = T_a$  может быть записано в форме (5.136), если использовать в нем суммарную частоту столкновений  $v_{ea} + v_{ei}$  и усредненный по всем этим столкновениям коэффициент передачи энергии. Разумеется, значения коэффициентов  $\gamma$  и  $\xi$  в этом случае отличаются от предыдущего.

### § 5.8. Функция распределения электронов в переменном электрическом поле

Рассмотрим распределение электронов по скоростям в переменном электрическом поле, полагая его однородным в пространстве. Используем для определения функций  $f_0$ ,  $f_1$  уравнения (5.16), (5.18):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (nf_0)}{\partial t} - \frac{neE}{3m_e v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) &= S_0; \\ \frac{\partial (nf_1)}{\partial t} - \frac{neE}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} &= S_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.137)$$

в которых столкновительные члены  $S_0$ ,  $S_1$  определяются формулами § 5.3. Для условий, когда главную роль играют упругие столкновения электронов с атомами, они имеют порядок

$$|S_0| \sim \kappa v (nf_0), \quad |S_1| \sim v (nf_1).$$

Уравнения (5.137) отличаются от рассмотренных в § 5.4 — 5.6 «инерционными» членами  $\partial(nf_0)/\partial t$  и  $\partial(nf_1)/\partial t$ . Роль этих членов можно оценить, сравнивая период изменения поля с временем релаксации (установления) функций  $f_0$  и  $f_1$ . Поскольку релаксация



функции распределения электронов обусловлена столкновениями времена релаксации имеют следующий порядок:

$$\text{для функции } f_0 \quad 1/\tau_0 \approx |S_0|/nf_0 = \kappa v, \quad \tau_0 = 1/\kappa v;$$

$$\text{для функции } f_1 \quad 1/\tau_1 = |S_1|/nf_1 \approx v, \quad \tau_1 \approx 1/v.$$

Большое различие времен релаксации изотропной и направленной составляющих функции распределения ( $\tau_0 \gg \tau_1$ ) связано, очевидно, с различием влияния столкновений на величину и направление скорости электронов.

Сопоставляя период изменения поля  $T$  с временами релаксации  $\tau_0$  и  $\tau_1$ , можно выделить низкочастотный случай, для которого  $T$  много больше  $\tau_0$  и тем более  $\tau_1$ , т. е. удовлетворяются неравенства

$$T \gg 1/\kappa v; \quad \omega \ll \kappa v, \quad (5.138)$$

где  $\omega = 2\pi/T$  — угловая частота изменения поля. При этом инерционные члены в обоих уравнениях (5.137) малы по сравнению со столкновительными и их можно не учитывать, а значит, функции  $f_0$  и  $f_1$  такие же, как в постоянном электрическом поле, и в каждый момент времени определяются мгновенным значением поля.

В случае высоких частот, когда выполняются неравенства, обратные (5.138):

$$T \ll 1/\kappa v; \quad \omega \gg \kappa v, \quad (5.139)$$

т. е. период изменения поля много меньше времени релаксации функции  $f_0$ , эта функция не успевает следовать за изменением поля. В этом случае функция  $f_0$  почти постоянная во времени и лишь слегка промодулирована колебаниями с частотой равной удвоенной частоте поля. Нетрудно убедиться с помощью уравнений (5.137), что глубина этой модуляции порядка  $\kappa v/\omega$ . Рассматривая случай высоких частот (5.139), будем пренебрегать такой модуляцией и считать  $f_0$  не зависящей от времени, что весьма упрощает решение системы уравнений (5.137).

Рассмотрим сначала уравнение для  $f_1$ . Будем считать, что электрическое поле изменяется по гармоническому закону

$$E = E_0 \cos \omega t. \quad (5.140)$$

Столкновительный член  $S_1$  представим в виде (5.28):  $S_1 = -v_{ea}^s n f_1$ , полагая, что  $v_{ea} \gg v_{ee}$ ,  $v_{ei}$ . Тогда

$$\partial f_1 / \partial t + v f_1 = (e E_0 / m_e) (d f_0 / dv) \cos \omega t. \quad (5.141)$$

Стационарное решение уравнения (5.141) можно искать в виде

$$f_1(v, t) = f_{11}(v) \cos \omega t + f_{12}(v) \sin \omega t, \quad (5.142)$$

где  $f_{11}$  и  $f_{12}$  не зависят от времени. Подставляя (5.142) в (5.141), получаем

$$\begin{aligned} (\omega f_{12} + v f_{11}) \cos \omega t - (\omega f_{11} - v f_{12}) \sin \omega t - \\ - (e E_0 / m_e) (d f_0 / dv) \cos \omega t = 0. \end{aligned}$$

Отдельно приравнявая нулю коэффициенты при  $\cos \omega t$  и при  $\sin \omega t$ , находим выражения для функций  $f_{11}$  и  $f_{12}$ :

$$f_{11} = \frac{eE_0 v}{m_e (\omega^2 + v^2)} \frac{df_0}{dv}, \quad f_{12} = \frac{eE_0 \omega}{m_e (\omega^2 + v^2)} \frac{df_0}{dv}. \quad (5.143)$$

Эти выражения определяют направленную скорость электронов в высокочастотном электрическом поле. Подставляя (5.142) и (5.143) в (5.13), получаем

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 \cos \omega t + u_2 \sin \omega t; \\ u_1 &= \frac{4\pi}{3} \frac{eE_0}{m_e} \int_0^\infty \frac{v v^3}{\omega^2 + v^2} \frac{df_0}{dv} dv; \\ u_2 &= \frac{4\pi}{3} \frac{eE_0}{m_e} \int_0^\infty \frac{\omega v^3}{\omega^2 + v^2} \frac{df_0}{dv} dv. \end{aligned} \right\} \quad (5.144)$$

При  $v = \text{const}$  входящие в (5.144) интегралы после интегрирования по частям превращаются в нормировочные и

$$u_1 = -\frac{eE_0}{m_e} \frac{v}{(\omega^2 + v^2)}, \quad u_2 = -\frac{eE_0}{m_e} \frac{\omega}{(\omega^2 + v^2)}. \quad (5.145)$$

Написанные формулы дают две компоненты направленной скорости. Первая из них  $u_1$  характеризует движение электронов в фазе с полем (изменяется со временем так же, как и поле), вторая  $u_2$  — движение, сдвинутое по фазе на  $\pi/2$  (зависимость от времени определяется  $\sin \omega t$  вместо  $\cos \omega t$ ). При  $\omega \ll v$  формулы (5.144), (5.145) для компоненты  $u_1$  переходят в полученные ранее выражения для направленной скорости в постоянном поле (5.56), (5.57), а компонента  $u_2$  оказывается много меньше  $u_1$ . Условие  $\omega \ll v$  соответствует большому числу столкновений электронов за период поля, т. е. малому изменению поля за время между столкновениями. Естественно, что при этом связь между направленной скоростью и полем такая же, как в постоянном поле. При  $\omega \gg v$  компонента направленной скорости  $u_1$ , находящаяся в фазе с полем, резко уменьшается, в то же время компонента  $u_2$ , сдвинутая по фазе на  $\pi/2$ , становится значительно больше, чем  $u_1$ . Это происходит, очевидно, потому, что за время между столкновениями проходит много периодов поля, в течение которых электрон попеременно ускоряется и замедляется. Такой «реактивный» обмен энергией как раз соответствует сдвигу фаз между скоростью и полем, близкому к  $\pi/2$ .

Заметим, что выражения (5.144), (5.145) для  $u_1$  и  $u_2$  совпадают с формулами для компонент скорости  $u_x$  и  $u_y$  в постоянном электрическом поле ( $E_{\parallel} = 0$ ), перпендикулярном магнитному, если заметить  $\omega$  на  $\omega_H$  [см. (5.128), (5.129) при  $E_{\parallel} = 0$ ]. Это совпадение отражает одинаковый, периодический характер воздействия электрического поля на электроны (в присутствии постоянного магнит-

ного поля он связан с вращением электронов, в переменном электрическом поле — с колебаниями самого поля).

Перейдем теперь к определению  $f_0$ . Для этого подставим выражение для  $f_1$ , определяемое формулами (5.142), (5.143), в уравнение для  $f_0$  (5.137). Тогда оно примет вид

$$\frac{\partial (nf_0)}{\partial t} = \frac{1}{6} \frac{ne^2 E_0^2}{m_e^2 v^2} \left\{ (1 + \cos(2\omega t)) \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v\omega^2}{\omega^2 + v^2} \frac{df_0}{dv} \right) + \sin(2\omega t) \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v\omega^2}{\omega^2 + v^2} \frac{df_0}{dv} \right) \right\} = S_0. \quad (5.146)$$

Как уже отмечалось для случая  $\omega \gg kv$ , функция  $f_0$  слабо модулирована и в первом приближении ее можно считать постоянной. Уравнение в этом приближении получим, усредняя (5.146) по периоду колебаний:

$$-\frac{1}{6} \frac{ne^2 E_0}{m_e^2 v^2} \frac{d}{dv} \left[ \frac{v\omega^2}{\omega^2 + v^2} \frac{df_0}{dv} \right] = S_0. \quad (5.147)$$

В следующем приближении с помощью (5.146) можно найти переменную добавку к  $f_0$ ; как видно, эта добавка изменяется с частотой  $2\omega$ . Однако не будем останавливаться на этом.

Левая часть уравнения (5.147) определяет энергию, приобретаемую электронами за счет их движения в электрическом поле. Как и раньше, она представляет собой дивергенцию сферически-симметричного потока

$$\Gamma_{vE} = -\frac{1}{6} \frac{ne^2 E_0^2 v}{m_e^2 (\omega^2 + v^2)} \frac{df_0}{dv}, \quad (5.148)$$

который можно описать как результат диффузии, и в пространстве скоростей

$$\Gamma_{vE} = -D_E n \frac{df_0}{dv}; \quad D_E = \frac{1}{6} \frac{ne^2 E_0^2 v}{m_e^2 (\omega^2 + v^2)}. \quad [(5.149)$$

При  $\omega \ll v$ , когда поле мало изменяется за время между столкновениями, характер ускорения электронов такой же, как в постоянном поле. Поэтому и формула для коэффициента диффузии  $D_E$  при  $\omega \ll v$  такая же [см. (5.59)]; при этом входящая в нее величина  $E^2$  усреднена по периоду поля ( $\bar{E}^2 = E_0^2/2$ ). При  $\omega \gg v$  из-за многократного изменения направления поля за время между столкновениями периоды ускорения и замедления электронов чередуются. Максимальное приращение скорости в поле частоты  $\omega$  равно  $(\Delta v_E)_{\text{макс}} \approx eE_0/m_e\omega$ . При этом коэффициент диффузии в пространстве скоростей [см. (5.60)]

$$D_E \approx (1/6) \langle (\Delta v_E)^2 \rangle v \approx (1/6) e^2 E_0^2 v / m_e^2 \omega^2$$

соответствует формуле (5.149).

Соотношение (5.149) для плотности потока  $\Gamma_{vE}$  может быть представлено в виде аналогичном (5.59), если ввести эффективное поле

$$E_{эф}^2 = (1/2) E_0^2 v / (v^2 + \omega^2). \quad (5.150)$$

Поэтому результаты определения  $f_0$  в постоянном электрическом поле можно обобщить на случай высокочастотного поля. Ситуация здесь точно такая же, как и для одновременно присутствующих постоянных электрического и магнитного полей (см. § 5.7). Более того, из-за одинакового характера ускорения сами формулы для  $f_0$  аналогичны в обоих случаях [ср. (5.150) и (5.132) при  $E_{\parallel} = 0$ ]. Поэтому не будем снова обсуждать применение формулы (5.150) в различных условиях.

Приведем лишь выражения для  $f_0$  в случае, когда существенны только упругие столкновения электронов с атомами. В соответствии со сказанным можно использовать выражение (5.63), заменив в нем  $E^2$  на  $E_{эф}^2$ . Тогда получим

$$f_0 = A \exp \left\{ - \int_0^v \frac{m_e v dv}{T_a + (1/3) e^2 E_0^2 / m_e \kappa (\omega^2 + v^2)} \right\}. \quad (5.151)$$

Если пренебречь  $T_a$  (случай сильного поля), то (5.151) приобретает вид

$$f_0 = A \exp \left[ - \frac{3m_e^2 \kappa}{e^2 E_0^2} \left( \omega^2 v^2 + 2 \int_0^v v v^2 dv \right) \right]. \quad (5.152)$$

При  $v = \text{const}$  формула (5.151) приводит к максвелловскому распределению скоростей с температурой

$$T_e = T_e + e^2 E_0^2 / 3 m_e \kappa (\omega^2 + v^2). \quad (5.153)$$

При достаточно высоких частотах ( $\omega \gg v$ ) распределение будет максвелловским при любой зависимости  $v(v)$ . При этом электронная температура вообще не зависит от  $v$ :

$$T_e = T_a + e^2 E_0^2 / 3 m_e \kappa_e \omega^2. \quad (5.154)$$

## § 5.9. О функции распределения ионов в электрическом поле

Как было показано в § 5.1, функция распределения ионов в слабоионизованной плазме при электрических полях много меньших критического (5.5)  $E \ll E_{pi} = T/e\lambda_{in}$  близка к равновесной (максвелловской). При этом отклонения распределения от равновесного можно найти методом последовательных приближений, который позволяет определить направленную скорость, потоки импульса и энергии, поправку к средней энергии и другие характеристики, связанные с электрическим полем (см. гл. 6.7). С приближением электрического поля к критическому функция распределения ионов все более отклоняется от равновесной. Характер этого откло-

нения зависит от столкновений ионов с атомами. Поскольку их массы близки и передача энергии при столкновениях, как и передача импульсов, может быть значительной, направленная скорость ионов в сильном электрическом поле сравнима с хаотической или больше нее, т. е. функция распределения сильно анизотропна. Поэтому для ионов неприменим описанный в предыдущих параграфах метод решения кинетического уравнения, основанный на разложении ее по степеням анизотропии. Соответственно задача об определении функции распределения ионов в электрическом поле значительно сложнее, чем для электронов, и решения ее удается получить лишь в некоторых случаях, допускающих упрощение.

Функцию распределения можно, в частности, найти для «эстафетной» модели, приближенно описывающей движение ионов в слабоионизованной плазме, содержащей атомы и ионы одного сорта при электрических полях, много больших критического. В этом случае основную роль играют столкновения ионов с атомами типа резонансной перезарядки, сопровождающиеся малой передачей энергии. Каждое такое столкновение приводит к исчезновению иона, ускоренного электрическим полем в период между столкновениями (он превращается в нейтральный атом), и к появлению медленного иона с энергией практически равной энергии нейтрального атома, из которого он получился. Принимая во внимание только такие столкновения, можно использовать для приближенного рассмотрения модель, в которой каждое столкновение приводит к уменьшению энергии иона до нуля. В рамках этой модели скорость ионов определяется лишь их ускорением электрическим полем в период между двумя столкновениями. Соответственно направление движения совпадает с направлением электрического поля, а распределение по скоростям определяется распределением времен между столкновениями.

Чтобы найти функцию распределения, можно воспользоваться кинетическим уравнением, которое для рассматриваемой модели приобретает вид

$$(eE/m_i) df_i/dv = \delta f_i/\delta t, \quad (5.155)$$

где  $f_i$  зависит только от одной компоненты скорости, параллельной электрическому полю. В соответствии с используемой моделью столкновительный член должен включать только перезарядочные столкновения, приводящие к выходу ионов из заданного интервала скоростей. Поэтому его можно записать в следующем виде:

$$\frac{\delta f_i}{\delta t} = -v n_a s_{ia}(v) f_i(v) = -v_{in}(v) f_i(v), \quad (5.156)$$

где  $s_{ia}$  — полное сечение перезарядки;  $v_{ie} = n_a s_{ia} v$  — частота перезарядочных столкновений; полагаем, что относительная скорость при столкновении практически равна скорости ионов (т. е. что скорость нейтральных атомов много меньше скорости ионов). Подставляя (5.156) в уравнение (5.155), получаем  $(eE/m_i) df_i/dv =$

$= -v_{ia}(v) f_i$ . Интегрирование этого уравнения дает функцию распределения по скоростям ионов вдоль поля

$$f_i(v) = A \exp \left[ -\frac{m_i}{eE} \int_0^v v_{ia}(v) dv \right], \quad (5.157)$$

где  $A$  — нормировочный множитель, определяемый из условия

$$\int_0^{\infty} f_i(v) dv = 1. \quad (5.158)$$

Отметим, что в рамках обсуждаемой модели все ионы двигаются в направлении поля, т. е.  $f_i = 0$  при  $v_i < 0$ .

Поперечное сечение резонансной перезарядки при не очень больших энергиях ионов слабо зависит от скорости (см. § 2.6). Пренебрегая этой зависимостью, т. е. полагая  $s_{ia} = \text{const}$ ,  $v_{ia} = n_a s_{ia} v \sim v$ , получаем из (5.157) распределение, по форме совпадающее при  $v > 0$  с максвелловским. Его можно записать в виде

$$f_i(v) = \left( \frac{2m_i}{\pi T_i^*} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{m_i v^2}{T_i^*} \right), \quad (5.159)$$

где  $T_i^*$  — эффективная температура:

$$T_i^* = \frac{eE}{n_a s_{ia}} = eE \lambda_{ia}; \quad (5.160)$$

нормировочный множитель выбран с помощью условия (5.158) (он в два раза больше нормировочного множителя для полного максвелловского распределения, так как  $f_i = 0$  при  $v < 0$ ). Нетрудно определить с помощью (5.159) среднюю скорость ионов в направлении поля и их среднюю энергию:

$$\left. \begin{aligned} u_E = \int_0^{\infty} v f_i(v) dv &= \sqrt{\frac{2T_i^*}{\pi m_i}} = \sqrt{\frac{2eE}{\pi m_i n_a s_{ia}}}; \\ \langle K \rangle = \int_0^{\infty} \frac{m_i v^2}{2} f_i(v) dv &= \frac{T_i^*}{2} = \frac{eE}{2n_a s_{ia}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.161)$$

Рассмотрим теперь сильноионизованную плазму, в которой

$$v_{ii} \gg v_{ia}, \quad \eta \gg s_{ia}/s_{ii}. \quad (5.162)$$

Роль различных столкновений можно оценить с помощью кинетического уравнения так же, как это было сделано в § 5.6 для электронов. Для ионов в однородной плазме оно имеет вид

$$(neE/m_i) \text{grad}_v f_i = S_{ia} + S_{ie} + S_{ii}. \quad (5.163)$$

Баланс среднего импульса и средней энергии определяется первыми тремя членами уравнения: первый член характеризует ускорение ионов в электрическом поле, второй и третий — обмен импульсом

и энергией с электронами и нейтральными атомами. Поэтому член, пропорциональный полю, имеет тот же порядок, что и сумма первых двух столкновительных слагаемых. Ион-ионные столкновения, очевидно, не влияют на изменения среднего импульса или средней энергии ионов, они приводят лишь к перераспределению импульса и энергии между ионами. В то же время в рассматриваемом случае ион—ионный столкновительный член  $S_{ii}$  много больше других слагаемых в уравнении (5.163). Из-за малого обмена энергией и импульсом при столкновениях ионов с электронами он обычно много больше ион-электронного столкновительного члена:

$$S_{ii}/S_{ie} \approx (m_i/m_e) v_{ii}/v_{ie} \approx \sqrt{m_i/m_e} (T_e/T_i)^{3/2} \gg 1.$$

При выполнении неравенства (5.162) он также много больше ион-атомного столкновительного члена  $S_{ii}/S_{ia} \approx v_{ii}/v_{ia} \gg 1$ . Поэтому форма функции распределения в первом приближении определяется условием обращения в нуль ион-ионного столкновительного члена. Как было показано в § 4.2, это условие приводит к максвелловскому распределению:

$$f_i(\mathbf{v}) = \left( \frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_i(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i)^2}{2T_i} \right]. \quad (5.164)$$

Направленную скорость  $v_i$  и ионную температуру  $T_i$  можно определить с помощью уравнений баланса среднего импульса и средней энергии. Они получаются умножением кинетического уравнения (5.163) соответственно на импульс  $m_i v_i$  или на энергию  $m_i v_i^2/2$  и почленным интегрированием по всему пространству скоростей. Такая процедура для более общего случая проделана в § 6.3, 6.4. Приведем здесь соответствующие равенства лишь для условий, когда столкновения ионов с электронами играют малую роль по сравнению с их столкновениями с нейтральными атомами, т. е. при  $S_{ei}/S_{ia} \approx (m_e/m_i) v_{ei}/v_{ia} \ll 1$ . При таких условиях баланс импульсов сводится к равенству электрической силы и среднего импульса, передаваемого при столкновениях ионов с атомами:  $e\mathbf{E} = \mu_{ia} v_{ia} \mathbf{u}_i$ . Это равенство дает направленную скорость ионов

$$\mathbf{u}_i = e\mathbf{E}/\mu_{ia} v_{ia} = 2e\mathbf{E}/m_i v_{ia} \quad (5.165)$$

при ( $m_i = m_a$ ). Уравнение баланса энергии ионов сводится к равенству средней энергии, приобретаемой ионами в электрическом поле, и средней энергии, теряемой ими при столкновениях с нейтральными атомами;  $e\mathbf{E} \mathbf{u}_i = (3/2) \kappa_{ia} v_{ia} (T_i - T_a)$ , где  $\kappa_{ia} = 2m_i m_a / (m_i + m_a)^2 = 1/2$  (при  $m_i = m_a$ ). Оно приводит к следующему соотношению для ионной температуры:

$$T_i - T_a = (8/3) e^2 E^2 / m_i v_{ia}^2. \quad (5.166)$$

При более высоких степенях ионизации, когда существенно влияние электрон-ионных столкновений, необходимо учитывать в балансе энергий ионов не только их обмен энергией с нейтральными атомами, но и обмен энергией между электронами и ионами.

ГЛАВА 6  
УРАВНЕНИЯ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 6.1. Моменты функции распределения

При заданных внешних условиях кинетические уравнения позволяют в принципе найти функции распределения частиц и с их помощью определить макроскопические характеристики плазмы. Ввиду сложности кинетических уравнений получить их полное решение удается далеко не всегда. Однако многие задачи решаются с помощью приближенных уравнений для моментов функции распределения, которые можно получить из кинетических уравнений. Моменты функции распределения представляют собой комбинации компонент скорости частицы, усредненные по распределению, — линейные (моменты первого порядка), квадратичные (моменты второго порядка) и пр. Установим физические величины, определяемые этими моментами.

Три момента первого порядка представляют собой средние значения компонент скорости\*

$$u_k = \langle v_k \rangle = \int_{(v)} v_k f(v) d^3 v, \quad (6.1)$$

где  $u_k$ ,  $v_k$  — проекции векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  на одну из осей координат. Равенства (6.1) можно записать и в векторной форме

$$\mathbf{u} = \int_{(v)} \mathbf{v} f(v) d^3 v.$$

Полная скорость каждой частицы может быть представлена в виде суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}. \quad (6.2)$$

Очевидно, что усреднение второго слагаемого по скоростям дает нуль:

$$\langle \mathbf{w} \rangle = \int_{(v)} \mathbf{w} f(v) d^3 v = 0. \quad (6.3)$$

Поэтому вектор  $\mathbf{w}$  называют *хаотической скоростью*, среднюю скорость  $\mathbf{u}$  — *направленной скоростью*.

---

\* Здесь и далее в формулах, которые могут быть применены к частицам различных сортов, мы опускаем для сокращения индекс  $\alpha$ , обозначающий сорт частиц.



Моменты второго порядка могут быть составлены из средних значений произведений компонент скорости  $\langle v_r v_l \rangle$ . Поскольку перестановка индексов не изменяет произведения, имеется шесть независимых моментов такого типа. В качестве одного из них выбирают обычно среднюю энергию частиц:

$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \int_{(v)} \frac{mv^2}{2} f(v) d^3 v. \quad (6.4)$$

Представляя  $\mathbf{v}$  в виде суммы (6.2) и учитывая (6.3), получаем

$$\langle v^2 \rangle = u^2 + \mathbf{u} \langle \mathbf{w} \rangle + \langle w^2 \rangle = u^2 + \langle w^2 \rangle,$$

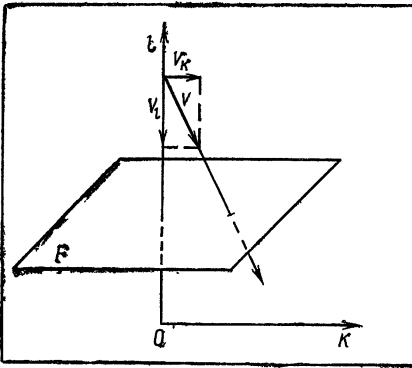


Рис. 6.1

Соответственно средняя энергия равна сумме составляющих, связанных с направленным и хаотическим движением:

$$\left. \begin{aligned} \langle K \rangle &= K_u + K_w; \\ K_u &= mu^2/2; \\ K_w &= (3/2) T = \langle mw^2/2 \rangle. \end{aligned} \right\} (6.5)$$

Температура  $T$  здесь введена как мера средней энергии хаотического движения в соответствии с обычно принятым определением.

Моменты  $\langle v_r v_l \rangle$  при произвольных  $k$  и  $l$  можно связать с потоком импульса. Подсчитаем, например, плотность потока  $k$ -й компоненты импульса, переносимого через единичную площадку  $F$  в  $l$ -направлении (рис. 6.1). Число частиц, обладающих скоростью в интервале  $\mathbf{v} d\mathbf{v}$ , которые пересекают площадку  $F$  в единицу времени, равно  $nfv_l d^3v$ . Так как  $k$ -я компонента импульса, переносимая каждой частицей, есть  $mv_k$ , то переносимый всеми выделенными частицами поток импульса есть  $mv_k nfv_l d^3v$ , а искомый средний поток равен

$$P_{kl} = nm \int v_k v_l f d^3v = nm \langle v_k v_l \rangle. \quad (6.6)$$

Совокупность величин  $P_{kl}$  представляет собой *тензор плотности потока импульса*  $\check{\mathbf{P}}$ . В системе отсчета, в которой средняя скорость частиц  $\mathbf{u} = 0$ , он называется *тензором давления*  $\check{\mathbf{p}}$ . Обычно под давлением понимают силу, действующую на элемент некоторой поверхности, отнесенную к его площади. Поскольку изменение импульса в единицу времени определяет приложенную силу, оба определения эквивалентны. Нетрудно установить связь между  $P_{kl}$  и  $p_{kl}$ .

Представляя полную скорость частиц в (6.6) как сумму направленной и хаотической скоростей [см. (6.2)], получаем

$$P_{kl} = nm \langle (\omega_k + u_k) (\omega_l + u_l) \rangle = n m u_k u_l + nm \langle \omega_k \omega_l \rangle + \\ + n m u_k \langle \omega_l \rangle + nm \langle u_k \rangle u_l.$$

Последние два члена в силу равенства (6.3) равны нулю. Поэтому

$$P_{kl} = n m u_k u_l + p_{kl}, \quad (6.7)$$

где

$$p_{kl} = nm \langle \omega_k \omega_l \rangle. \quad (6.8)$$

Диагональные члены тензора  $\check{p}$  описывают силы давления, которые действуют нормально к площадкам, перпендикулярным осям координат (например,  $p_{xx}$  — нормальное давление на элемент плоскости  $yz$  и т. д.) Недиagonальные компоненты описывают силы, касательные к этим площадкам. Как видно из (6.8),  $p_{kl}$  определяются видом функции распределения частиц по скоростям. Если функция распределения по хаотическим скоростям изотропна и выполняются соотношения

$$\langle \omega_x^2 \rangle = \langle \omega_y^2 \rangle = \langle \omega_z^2 \rangle = (1/3) \langle \omega^2 \rangle; \\ \langle \omega_x \omega_y \rangle = \langle \omega_x \omega_z \rangle = \langle \omega_y \omega_z \rangle = 0,$$

то тензор давления превращается в скаляр  $p_{kl} = p \delta_{kl}$ , причем скалярное давление определяется средней энергией хаотического движения или температурой [см. (6.5)]:

$$p = (1/3) nm \langle \omega^2 \rangle = nT. \quad (6.9)$$

В общем случае тензор давления обычно разбивают на два слагаемых: нормальное скалярное давление ( $p$ ), определяемое равенством (6.9), и так называемый *тензор вязких напряжений*  $\check{\pi}$ :

$$p_{kl} = p \delta_{kl} + \pi_{kl}, \quad (6.10)$$

где

$$\pi_{kl} = nm \langle \omega_k \omega_l - (1/3) \omega^2 \delta_{kl} \rangle \quad (6.11)$$

является той частью тензора  $\check{p}$ , которая обусловлена отклонениями распределения от сферической симметрии. Диагональные элементы тензора  $\check{\pi}$ , как видно из (6.11), связаны соотношением  $\sum_k \pi_{kk} = 0$ , т. е. тензор имеет пять независимых компонент.

Моменты третьего порядка составляются из средних значений произведений трех компонент скорости  $\langle v_k v_l v_m \rangle$ . Всего имеется десять независимых моментов этого типа. Наиболее важными из них являются моменты, связанные с потоком энергии. Определим эту величину. Плотность потока энергии, переносимой в  $k$ -м направлении частицами со скоростью в интервале  $v \, dv$ , равна

$(mv^2/2)v_r n f d^3v$ ; поток, переносимый всеми частицами, получается при интегрировании этого выражения:

$$Q_k = n \int_{(v)} \frac{1}{2} m v^2 v_k f d^3v = \frac{1}{2} n m \langle v_k v^2 \rangle, \quad (6.12)$$

или в векторной форме  $\mathbf{Q} = (1/2) n m \langle \mathbf{v} v^2 \rangle$ .

Представляя скорости в виде суммы хаотической и направленной составляющих (6.2) и учитывая, что  $\langle \omega \rangle = 0$  (6.3), найдем для  $k$ -компоненты

$$Q_k = (nm/2) \langle (u_k + w_k) (\mathbf{u} + \mathbf{w})^2 \rangle = (nm/2) (u_k \langle u^2 \rangle + u_k \langle w^2 \rangle + 2 \sum_l u_l \langle w_l w_k \rangle + \langle w_k w^2 \rangle).$$

Используя соотношения (6.5) и (6.8), это равенство можно переписать в следующем виде:

$$Q_k = q_k + nK_u u_k + nK_w w_k + \sum_l p_{kl} u_l,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + nK_u \mathbf{u} + nK_w \mathbf{w} + \check{\mathbf{p}} \mathbf{u}. \quad (6.13)$$

Первое слагаемое

$$\mathbf{q} = (nm/2) \langle \mathbf{w} w^2 \rangle \quad (6.14)$$

характеризует перенос энергии в системе, в которой направленная скорость равна нулю, т. е. перенос энергии, связанной только с хаотическим движением частиц. Поэтому вектор  $\mathbf{q}$  называют *плотностью потока тепла*. Остальные три слагаемых в (6.13) описывают поток, связанный с направленным движением, — перенос энергии самого направленного движения ( $nK_u$ ), тепловой энергии ( $nK_w$ ) и энергии, определяемой работой сил давления.

Ниже будут получены приближенные уравнения для моментов функции распределения заряженных частиц. Применение таких уравнений для описания поведения электронной и ионной компонент плазмы в известном смысле аналогично подходу, используемому в гидродинамике. Поэтому эти уравнения иногда называют *уравнениями двухжидкостной гидродинамики плазмы*.

## § 6.2. Получение уравнений моментов

Уравнения моментов функции распределения можно получить из кинетического уравнения. Для этого надо умножить кинетическое уравнение на комбинацию проекций скорости, соответствующую определенному моменту, и проинтегрировать его почленно по всему пространству скоростей. Умножая его на проекции скорости  $v_k$ , получаем уравнение первого момента, умножая на произве-

дения  $v_k v_l$  — уравнение второго момента, умножая на  $v_k v_l v_m$  — уравнение третьего момента и т. д. Уравнением нулевого момента называют уравнение для концентрации, получающееся просто почленным интегрированием кинетического уравнения.

Определим общий вид уравнений моментов. Для этого используем кинетическое уравнение в форме (3.17)

$$\frac{\partial (nf)}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} (nf) + \frac{Ze}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\} \operatorname{grad}_v (nf) = \frac{\delta (nf)}{\delta t}. \quad (6.15)$$

Обозначим  $g$  некоторую комбинацию проекций скорости. Момент функции распределения, соответствующий этой комбинации, есть  $\langle g \rangle = \int g f(\mathbf{v}) d^3 v$ . Уравнение для  $\langle g \rangle$  получим, умножая (6.15) на  $g$  и интегрируя по скоростям. Первое слагаемое преобразуем к виду

$$\int_{(\mathbf{v})} g \frac{\partial (nf)}{\partial t} d^3 v = \frac{\partial}{\partial t} \left( n \int_{(\mathbf{v})} g f d^3 v \right) = \frac{\partial}{\partial t} (n \langle g \rangle). \quad (6.16)$$

Здесь мы изменили порядок дифференцирования и интегрирования, воспользовавшись тем, что время  $t$  и компоненты  $v_k$  являются в кинетическом уравнении независимыми переменными. Поскольку координаты в конфигурационном пространстве  $x_k$  и компоненты скорости  $v_k$  также независимы, можно аналогичным образом преобразовать второй член:

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbf{v})} g [\mathbf{v} \operatorname{grad} (nf)] d^3 v &= \sum_k \int_{(\mathbf{v})} g v_k \frac{\partial (nf)}{\partial x_k} d^3 v = \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ n \int_{(\mathbf{v})} g v_k f d^3 v \right] = \operatorname{div} (n \langle \mathbf{v} g \rangle). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Слагаемое, пропорциональное электрическому полю, в результате интегрирования по частям преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbf{v})} g \frac{Ze}{m} E \operatorname{grad}_v (nf) d^3 v &= \frac{Zen}{m} \int_{(\mathbf{v})} g \sum_k E_k \frac{\partial f}{\partial v_k} d^3 v = \\ &= - \frac{Zen}{m} \sum_k E_k \int_{(\mathbf{v})} \frac{\partial g}{\partial v_k} f d^3 v = - \frac{Ze}{m} n \mathbf{E} \langle \operatorname{grad}_v g \rangle. \end{aligned} \quad (6.18)$$

При интегрировании учли, что функция распределения должна обращаться в нуль при  $v_k \rightarrow \infty$ .

Аналогичным способом, интегрируя по частям, преобразуем слагаемое, пропорциональное магнитному полю:

$$\begin{aligned} \frac{Ze}{mc} \int_{(v)} \{[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \operatorname{grad}_v (nf)\} g d^3 v &= \frac{Zen}{mc} \sum_k \int_{(v)} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_k \frac{\partial f}{\partial v_k} g d^3 v = \\ &= -\frac{Zen}{mc} \sum_k \int_{(v)} \left\{ [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_k \frac{\partial g}{\partial v_k} + \frac{g \partial}{\partial v_k} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_k \right\} f d^3 v. \end{aligned}$$

Второе слагаемое под интегралом равно нулю, так как  $[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_k$  зависит только от компонент скорости, перпендикулярных  $v_k$ . Поэтому находим

$$\begin{aligned} \frac{Ze}{mc} \int_{(v)} \{[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] g \operatorname{grad}_v (nf)\} g d^3 v &= -\frac{Zen}{mc} \sum_k \langle [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_k \frac{\partial g}{\partial v_k} \rangle = \\ &= -\frac{Zen}{mc} \langle [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \operatorname{grad}_v g \rangle. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Уравнение для  $\langle g \rangle$  с учетом (6.16) — (6.19) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial (n \langle g \rangle)}{\partial t} + \operatorname{div} (n \langle g \mathbf{v} \rangle) - \frac{Zen}{m} \mathbf{E} \langle \operatorname{grad}_v g \rangle - \\ - \frac{Zen}{mc} \langle [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \operatorname{grad}_v g \rangle = \frac{\delta (n \langle g \rangle)}{\delta t}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Правая часть уравнения получена в результате интегрирования столкновительного члена

$$\int_{(v)} \frac{\delta (nf)}{\delta t} g d^3 v = \frac{\delta (n \langle g \rangle)}{\delta t}. \quad (6.21)$$

В общем случае его можно представить в виде суммы

$$\frac{\delta (n_\alpha \langle g_\alpha \rangle)}{\delta t} = \sum_{\beta, j} \frac{\delta (n_\alpha \langle g_\alpha \rangle)}{\delta t} \Big|_{\alpha\beta}^{(j)}, \quad (6.22)$$

распространяемой на столкновения частиц рассматриваемого сорта с частицами всех других сортов и на все типы столкновений.

Для упругих столкновений, используя столкновительный член в форме (3.23), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta (n_\alpha \langle g_\alpha \rangle)}{\delta t} \Big|_{\alpha\beta}^{(e)} &= \int_{(v_\alpha)} S_{\alpha\beta}^{(e)} g(v_\alpha) d^3 v_\alpha = n_\alpha n_\beta \int_{(v_\alpha)} \int_{(v_\beta)} \int_{(\Omega)} g(v_\alpha) \times \\ &\times [f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta) - f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta)] v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_\alpha d^3 v_\beta, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где по-прежнему  $v_{\alpha\beta} = |v_\alpha - v_\beta|$ .

Первый из интегралов можно преобразовать, воспользовавшись тем, что в силу обратимости столкновений компоненты скоростей  $v'_\alpha, v'_\beta$  под интегралом можно заменить на  $v_\alpha, v_\beta$  и наоборот. Тогда получим, учитывая, что при упругих столкновениях величина относительной скорости не изменяется  $v'_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta}$  и  $d^3v_\alpha d^3v_\beta = d^3v'_\alpha d^3v'_\beta$  (см. с. 86):

$$\begin{aligned} & \iiint g(v_\alpha) f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3v_\alpha d^3v_\beta = \\ & = \iiint g(v'_\alpha) f(v_\alpha) f_\beta(v_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3v_\alpha d^3v_\beta. \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в (6.23), находим

$$\frac{\delta n_\alpha \langle g_\alpha \rangle}{\delta t} \Big|_{\alpha\beta}^{(e)} = n_\alpha n_\beta \iiint (g'_\alpha - g_\alpha) f_\alpha f_\beta v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d^3v_\alpha d^3v_\beta d\Omega, \quad (6.24)$$

где введены обозначения  $g_\alpha = g(v_\alpha)$ ,  $g'_\alpha = g(v'_\alpha)$ .

Полученное выражение определяет изменение момента в результате столкновений, просуммированное по столкновениям, происходящим в единицу времени, и усредненное по скоростям сталкивающихся частиц.

Интеграл (6.24) для столкновений одинаковых частиц обращается в нуль в случае, когда сумма величин  $g(v)$  для сталкивающихся частиц сохраняется, т. е. когда она является интегралом движения (константа, компоненты импульса, энергия частиц). Действительно, при этом уменьшение  $g(v)$  у одной из сталкивающихся частиц компенсируется таким же увеличением  $g(v)$  у другой частицы и среднее по частицам рассматриваемого сорта изменение отсутствует. В этом можно и непосредственно убедиться с помощью простого преобразования интеграла (6.24) для столкновений одинаковых частиц, когда функции  $f_\alpha$  и  $f_\beta$  одинаковы. Основываясь на том, что под интегралом можно менять местами компоненты скоростей  $v_1$  и  $v_2$  (так как по ним проводится интегрирование), получаем

$$\begin{aligned} & \iiint [g(v_1) - g(v_2)] f(v_1) f(v_2) v \sigma d\Omega d^3v_1 d^3v_2 = \\ & = \iiint [g(v_2) - g(v_1)] f(v_1) f(v_2) v \sigma d\Omega d^3v_1 d^3v_2 = \\ & = \frac{1}{2} \iiint [g(v_1) + g(v_2) - g(v_1) - g(v_2)] f(v_1) f(v_2) v \sigma d\Omega d^3v_1 d^3v_2, \end{aligned}$$

где для сокращения опущен индекс  $\alpha$ . Поскольку сумма  $g(v_1) + g(v_2)$  сохраняется при столкновениях, выражение в скобках, а значит, и интеграл (6.24) обращаются в нуль.

Подставляя в общее уравнение (6.20) различные комбинации компонент скорости  $g = 1, v_k, v_k v_l, v_k v_l v_m$  и т. д., получаем систему уравнений для различных моментов. Каждое из этих уравне-

ний связано с другими. Так, например, если  $g$  — комбинация скоростей степени  $n$ , т. е.  $\langle g \rangle$  есть момент порядка  $n$ , то во второе слагаемое (6.20) войдут величины  $\langle g v_k \rangle$ , представляющие собой моменты порядка  $(n + 1)$ , а в третье слагаемое — величины  $\langle g/v_k \rangle$ , представляющие собой моменты порядка  $(n - 1)$ . Выражения для столкновительных членов  $\delta(n \langle g \rangle)/\delta t$  получаются относительно простыми, когда эффективная частота столкновений не зависит от скорости. В этом случае  $\delta(n \langle g \rangle)/\delta t$  связаны только с моментом  $\langle g \rangle$  (см. § 6.3, 6.4). При произвольной зависимости  $v(v)$  для строгого определения столкновительных членов необходимы некоторые предположения о виде функции распределения.

Регулярный метод получения уравнений моментов при произвольной зависимости частот столкновений от скорости можно сформулировать для условий, когда анизотропия функции распределения мала (см. также § 5.2). Если функцию распределения по скоростям в отсутствие анизотропии  $f_0(v)$  считать заданной, то поправки к ней можно представить в виде разложения по компонентам скорости

$$f(v) = f_0(v) \left( 1 + \sum_k a_k v_k + \sum_{k,l} a_{kl} v_k v_l + \dots \right). \quad (6.25)$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты разложения связаны с моментами различных порядков ( $a_k$  — с моментами первого порядка,  $a_{kl}$  — с моментами второго порядка и т. д.). Используя представление (6.25) при вычислении столкновительных членов, можно получить их связь с различными моментами. В общем случае в каждый столкновительный член могут входить все моменты функции распределения частиц рассматриваемого сорта, а также моменты функций распределения других частиц. Таким образом, получается бесконечная система связанных друг с другом уравнений моментов. Она полностью эквивалентна кинетическим уравнениям для всех компонент плазмы, и решение ее представляет собой не менее сложную задачу, чем решение кинетических уравнений. Однако при малой анизотропии цепочку уравнений можно оборвать, ограничившись не очень большим числом моментов. При этом решение систем уравнений существенно упрощается.

Описанный метод получения моментов был детально развит для случая, когда функции распределения частиц по скоростям можно считать мало отличающимися от максвелловских (метод Греда). В этом случае естественно выбрать в качестве исходной функции локальное максвелловское распределение

$$f_0 = (m/2\pi T)^{3/2} \exp[-m(v - u)^2/2T], \quad (6.26)$$

в котором температура  $T$  и направленная скорость  $u$  являются функциями координат; они могут быть различными для частиц разных сортов. Поправки к  $f_0$ , связанные с анизотропией, удобно искать в виде разложения по 3-мерным полиномам Эрми-

та — Чебышева, составленным из компонент безразмерной хаотической скорости:

$$\xi = (\mathbf{v} - \mathbf{u})\sqrt{m/T}; \quad \xi_h = (v_h - u_h)\sqrt{m/T} = \omega_h\sqrt{m/T}. \quad (6.27)$$

Эти полиномы определяются соотношением

$$H_{k_1 k_2 \dots k_n}^{(n)}(\xi) = (-1)^n \exp[(1/2)\xi^2] \frac{\partial^n}{\partial \xi_{k_1} \partial \xi_{k_2} \dots \partial \xi_{k_n}} (\exp[(-1/2)\xi^2]), \quad (6.28)$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n$  могут принимать значения 1, 2, 3, соответствующие трем осям координат, в частности:

$$\begin{aligned} H^{(0)} &= 1; \quad H_k^{(1)} = \xi_k; \quad H_{kl}^{(2)} = \xi_k \xi_l - \delta_{kl}; \\ H_{klm}^{(3)} &= \xi_k \xi_l \xi_m - \delta_{kl} \xi_m - \delta_{km} \xi_l - \delta_{lm} \xi_k. \end{aligned}$$

Полиномы удовлетворяют условиям ортогональности вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{(\xi)} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) H_{k_1 k_2 \dots k_n}^{(n)}(\xi) H_{l_1 l_2 \dots l_p}^{(p)}(\xi) d^3 \xi = \\ = \delta_{np} \delta_{k_1 k_2 \dots k_n}^{l_1 l_2 \dots l_p}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где  $\delta_{np}$  — символ Кронекера; символ  $\delta_{k_1 k_2 \dots k_n}^{l_1 l_2 \dots l_p}$  отличен от нуля и равен единице только в случае, если верхнюю последовательность можно получить из нижней простой перестановкой.

Используя полиномы (6.28), представим функцию распределения в виде

$$\begin{aligned} f = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2}\right) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} C_{k_1 k_2 \dots k_n}^{(n)} H_{k_1 k_2 \dots k_n}^{(n)} \left(\sqrt{\frac{m}{T}}\omega\right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Здесь в сумму по индексам  $k_1, k_2, \dots, k_n$  комбинации, отличающиеся перестановкой индексов, включаются только один раз. Условие нормировки при учете (6.29) приводит к равенству

$$\int_{(v)} f d^3 v = C^{(0)} = 1. \quad (6.31)$$

Условие  $\langle \mathbf{w} \rangle = 0$ , следующее из определения направленной скорости (6.3), приводит к обращению в нуль компонент  $C^{(1)}$ :

$$\langle \omega_h \rangle = \sqrt{T/m} C_h^{(1)} = 0. \quad (6.32)$$

Остальные коэффициенты  $C^{(n)}$  связаны с моментами порядка  $n$ . Эту связь нетрудно установить с помощью соотношений (6.29). Используя определения тензора вязких напряжений (6.11) и плотности



потока тепла (6.14), получаем в частности:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{kl} &= nm \langle \omega_k \omega_l - \frac{1}{3} \omega^2 \delta_{kl} \rangle = n T C_{kl}^{(2)}; \\ q_k &= \frac{1}{2} nm \langle \omega_k \omega^2 \rangle = n T \sqrt{T/m} \sum_l C_{kl}^{(3)} (1 + 2\delta_{kl}). \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

Возможность решения системы уравнений моментов основана, как отмечалось, на ограничении их числа и соответственно числа слагаемых в разложении функции распределения. Ограничивая разложение первым членом, т. е. принимая изотропное распределение (6.26) по хаотическим скоростям, получаем простейшее приближение. В этом приближении функция распределения определяется пятью моментами, в их число входят концентрация  $n$  (нулевой момент); три компоненты направленной скорости  $u_k$  (моменты первого порядка) и температура  $T$  (момент второго порядка). Учитывая также члены разложения, определяющие тензор вязких напряжений  $\pi$  и вектор теплового потока  $q$ , можно получить приближение тринадцати моментов. К пяти названным моментам при этом добавляются пять независимых компонент тензора  $\pi$  и три компоненты вектора  $q$ . В этом приближении при  $l = m$  следует считать отличными от нуля в (6.30) коэффициенты  $C^{(0)} = 1$ ,  $C_{kl}^{(2)}$  и  $C_{klm}^{(3)}$ . Будем считать, кроме того, что коэффициенты  $C_{kl}^{(3)}$  не зависят от  $l$ . Разложение (6.30) при учете соотношений (6.33) примет вид

$$\begin{aligned} f &= \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2T}\right) \left( 1 + \sum_{k,l} C_{kl}^{(2)} H_{kl}^{(2)} + \sum_{k,l} C_{kl}^{(3)} H_{kl}^{(3)} \right) = \\ &= \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2T}\right) \left[ 1 + \sum_{k,l} \frac{\pi_{kl}}{nT} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{m\omega_k \omega_l}{T} - \delta_{kl} \right) - \sum_k \frac{q_k m\omega_k}{nT^2} \left( 1 - \frac{m\omega^2}{5T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.34)$$

В дальнейшем эффектами, связанными с вязкостью, будем пренебрегать (качественно они обсуждаются в гл. 7). Тогда вместо (6.34) можно использовать сокращенное разложение

$$f = \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2T}\right) \left[ 1 - \sum_k q_k \frac{m\omega_k}{nT^2} \left( 1 - \frac{m\omega^2}{5T} \right) \right]. \quad (6.35)$$

### § 6.3. Уравнения движения и баланса частиц компонент плазмы

Получим уравнения нулевого и первых моментов. Чтобы найти уравнение нулевого момента, следует положить в (6.20)  $g = 1$ . Средние значения величин, входящих в (6.20), при этом равны

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= 1; \quad \langle g v_k \rangle = \langle v_k \rangle = u_k; \\ \langle \text{grad}_v g \rangle &= 0; \quad \frac{\delta(n \langle g \rangle)}{\delta t} = \frac{\delta n}{\delta t} = \int \frac{\delta(nf)}{\delta t} d^3 v. \end{aligned}$$

Подставляя их, получаем уравнение нулевого момента

$$\partial n / \partial t = -\operatorname{div} (n \mathbf{u}) + \delta n / \delta t, \quad (6.36)$$

определяющее изменение во времени концентрации частиц данного сорта. Первое слагаемое в правой части определяет изменение концентрации, связанное с движением частиц, второе — изменение концентрации в результате столкновений, приводящих к возникновению или исчезновению частиц данного сорта в объеме плазмы. Возникновение заряженных частиц обусловлено обычно ионизацией при столкновениях электронов с атомами, их исчезновение — рекомбинацией. Эффективность этих процессов можно характеризовать частотами

$$v^i = n_a v_s^i(v), \quad v^r = n_i s^r(v)v, \quad (6.37)$$

которые зависят от относительной скорости сталкивающихся частиц, практически равной скорости электронов. Соответственно столкновительный член в (6.36) можно представить в виде

$$\delta n / \delta t = (\langle v^i \rangle - \langle v^r \rangle) n, \quad (6.38)$$

где величины  $\langle v^i \rangle$  и  $\langle v^r \rangle$  усреднены по скоростям электронов. При максвелловском распределении по скоростям они зависят, разумеется, от электронной температуры.

Перейдем теперь к уравнениям первого момента. Чтобы определить одно из них, положим в (6.20)  $g = v_k$ . Соответствующий момент равен, очевидно,  $k$ -й компоненте, направленной скорости  $\langle g \rangle = \langle v_k \rangle = u_k$ . Величина  $\langle g v \rangle$ , входящая во второе слагаемое уравнения (6.20), может быть выражена через компоненты тензора потока импульса (6.7) или через давление и тензор вязких напряжений (6.11):

$$\langle g v_l \rangle = \langle v_k v_l \rangle = \frac{P_{kl}}{nm} = u_k u_l + \frac{p}{nm} \delta_{kl} + \frac{\pi_{kl}}{nm}.$$

Используя это соотношение, представим второе слагаемое (6.20) в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (n \langle g v \rangle) &= \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (n \langle g v_l \rangle) = \\ &= \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (n u_k u_l) + \frac{1}{m} \sum_l \frac{\partial \pi_{kl}}{\partial x_l} + \frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

При  $g = v_k$  входящий в третье и четвертое слагаемые  $\operatorname{grad}_v g$  равен единичному орту в направлении оси  $k$ . Поэтому данные слагаемые принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{Zen}{m} \mathbf{E} \langle \operatorname{grad}_v g \rangle &= \frac{Zen}{m} E_k; \\ \frac{Zen}{mc} \langle [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \operatorname{grad}_v g \rangle &= \frac{Zen}{mc} \langle [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_k \rangle = \frac{Zen}{mc} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]_k. \end{aligned}$$

Собирая все слагаемые вместе, получаем

$$\frac{\partial (nu_k)}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (nu_k u_l) + \frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{m} \sum_l \frac{\partial \pi_{kl}}{\partial x_l} - \frac{Zen}{m} \left\{ E_k + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]_k \right\} = \frac{\delta (nu_k)}{\delta t}. \quad (6.39)$$

Подставляя в первый член (6.39) величину  $\partial n/\partial t$  из (6.36)

$$\frac{\partial (nu_k)}{\partial t} = n \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial n}{\partial t} = n \frac{\partial u_k}{\partial t} - u_k \sum_l \frac{\partial (nu_k)}{\partial x_l} + u_k \frac{\delta n}{\delta t},$$

приведем уравнение к виду

$$mn \frac{\partial u_k}{\partial t} + mn \sum_l u_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = -\frac{\partial p}{\partial x_k} - \sum_l \frac{\partial \pi_{kl}}{\partial x_l} + nZeE_k + \frac{nZe}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]_k + mn \frac{\delta u_k}{\delta t}, \quad (6.40)$$

где  $n\delta u_k/\delta t = \delta (nu_k)/\delta t - u_k \delta n/\delta t$ . Такие же уравнения получаются для двух других компонент вектора  $\mathbf{u}$ . Все они вместе образуют векторное уравнение для направленной скорости

$$mn \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{u} \right] = Zen\mathbf{E} + \frac{Zen}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \text{grad } p - \text{grad } \check{\pi} + nm \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta t}, \quad (6.41)$$

представляющее собой уравнение движения единицы объема газа частиц данного сорта. Величина  $mn$  есть плотность газа. Выражение в скобках слева определяет «гидродинамическое ускорение». Оно равно полной производной направленной скорости по времени  $d\mathbf{u}/dt = \partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{u}$ , которая складывается из изменения средней скорости в фиксированной точке ( $\partial \mathbf{u}/\partial t$ ) и ее изменения в результате перемещения газа

$$\sum_l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t} = \sum_l u_l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l}.$$

Правая часть уравнения (6.41) равна сумме сил, действующих на частицы данного сорта, находящиеся в единице объема: электрической силе ( $Zen\mathbf{E}$ ), лоренцевой силе  $\left(\frac{Zen}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]\right)$ , силам, возникающим из-за градиента давления газа ( $-\text{grad } p$ ) и под действием вязких напряжений ( $-\text{grad } \check{\pi}$ ), и силе трения, связанной со столкновениями частиц ( $n\delta \mathbf{u}/\delta t$ ). Силы, связанные с  $\text{grad } p$  и  $\text{grad } \check{\pi}$ , являются чисто кинетическими и обусловлены переносом импульса при тепловом движении частиц.

Рассмотрим теперь столкновительный член уравнения движения. Для упругих столкновений, подставляя в (6.24)  $g_\alpha = v_{\alpha k}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\delta n_\alpha v_{\alpha k}}{\delta t} \right)_{\alpha\beta} = n_\alpha \left( \frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} \right)_{\alpha\beta} = \\ & = n_\alpha n_\beta \int_{(\vec{\alpha})} \int_{(v_\alpha)} \int_{(v_\beta)} (v'_{\alpha k} - v_{\alpha k}) f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 v_\alpha d^3 v_\beta. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Здесь учли, что число частиц не изменяется при упругих столкновениях ( $\delta n_\alpha / \delta t = 0$ ). В соответствии с (2.16) изменение компонент скорости при столкновениях, просуммированное по углам рассеяния, равно

$$\begin{aligned} \int_{(\Omega)} (v'_{k\alpha} - v_{k\alpha}) \sigma_{\alpha\beta} \delta\Omega &= - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} v_k \int \sigma_{\alpha\beta} (1 - \cos \vartheta) d\Omega = \\ &= - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} v_k s_{\alpha\beta}^t, \end{aligned}$$

где  $v_k = v_{k\alpha} - v_{k\beta}$  есть  $k$ -компонента относительной скорости. Подставляя это соотношение в (6.42), находим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} \right)_{\alpha\beta} &= - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \int_{(v_\alpha)} \int_{(v_\beta)} v_k v_{\alpha\beta}^t(v) f_\alpha f_\beta d^3 v_\alpha d^3 v_\beta = \\ &= - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \langle v_k v_{\alpha\beta}^t(v) \rangle, \end{aligned} \quad (6.43)$$

где частота столкновений  $v_{\alpha\beta}^t = n_\beta v s^t(v)$  зависит от относительной скорости  $v = |v_\alpha - v_\beta|$ ; усреднение проводится по скоростям обеих сталкивающихся частиц.

Выражение (6.43) дает изменение направленной скорости в результате упругих столкновений. Для электронов определенное значение имеют также и неупругие столкновения. Для процессов, в которых кинетическая энергия относительного движения сталкивающихся частиц много больше неупругих потерь энергии, этими потерями можно пренебречь, и выражение для столкновительного члена  $\delta u_k / \delta t$  оказывается таким же, как и для упругих столкновений. В противоположном случае, когда неупругие потери близки к энергии относительного движения, изменение скорости в каждом столкновении определяется полной потерей относительной скорости. В результате [см. (2.10)]

$$\Delta v_{\alpha k} = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta v_k \approx - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} v_k,$$

и столкновительный член сохраняет форму (6.43), с той лишь разницей, что частота  $\nu^t$  заменяется на полную частоту неупругих столкновений  $\nu^h = n_{\beta} \nu \int \sigma^h d\Omega$ . Таким образом, учет неупругих столкновений приводит к замене транспортной частоты упругих столкновений в (6.43) суммарной частотой столкновений:

$$\nu^s(\nu) = \nu^t(\nu) + \nu^l(\nu) + \nu^h(\nu), \quad (6.44)$$

где  $\nu^l$  — суммарная транспортная частота неупругих столкновений с малой потерей энергии;  $\nu^h$  — суммарная полная частота неупругих столкновений с большой потерей энергии. При энергии  $K_e \gg \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_i$  поправки, связанные с неупругими столкновениями, малы, так как  $\nu^l, \nu^h \ll \nu^t$ . Тем более малы поправки, связанные с ионизацией и рекомбинацией, определяющие изменение  $n$  при столкновениях. Можно не учитывать их вклад в столкновительный член уравнения движения. Подставляя (6.44) в (6.43), получаем

$$\frac{\delta(n_\alpha u_{\alpha k})}{\delta t} = n_\alpha \frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} = - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} n_\alpha \langle \nu_{\alpha\beta}^s (v_{\alpha k} - v_{\beta k}) \rangle. \quad (6.45)$$

Выражения (6.43), (6.45) особенно просты, когда частота столкновений  $\nu_{\alpha\beta}$  не зависит от скорости. Тогда ее можно вынести за знак усреднения и формула (6.45) приобретает вид

$$\frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} = - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \nu_{\alpha\beta} \langle v_{\alpha k} - v_{\beta k} \rangle = - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \nu_{\alpha\beta} (u_{\alpha k} - u_{\beta k}). \quad (6.46)$$

В общем случае столкновительный член (6.45) определяется зависимостью  $\nu_{\alpha\beta}$  от  $v$  и видом функций распределения. Представим в нем относительную скорость в виде суммы направленной и хаотической составляющих:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta; \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta. \quad (6.47)$$

Полагая, что  $\mathbf{u} \ll \mathbf{w}$ , и ограничиваясь линейными по  $\mathbf{u}$  членами разложения, получаем

$$\frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} = - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \left( \langle w_k \nu_{\alpha\beta}(\mathbf{w}) \rangle + \sum_l u_l \left\langle \frac{\partial (w_k \nu_{\alpha\beta})}{\partial w_l} \right\rangle \right). \quad (6.48)$$

Если функцию распределения по хаотическим скоростям можно считать изотропной, то первое слагаемое, а также члены суммы, входящей во второе слагаемое, обращаются в нуль при  $k \neq l$ . В этом случае

$$\frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} = - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} u_k \left\langle \frac{\partial (w_k \nu_{\alpha\beta})}{\partial w_k} \right\rangle = - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} (u_{\alpha k} - u_{\beta k}) \bar{\nu}_{\alpha\beta}. \quad (6.49)$$

Формула (6.49) отличается от (6.46) лишь тем, что в нее входит некая усредненная частота столкновений. Закон усреднения определяется соотношением

$$\bar{v}_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial (w_k v_{\alpha\beta})}{\partial w_k} \right\rangle = \int_{(w_\alpha)} \int_{(w_\beta)} \frac{\partial (w_k v_{\alpha\beta})}{\partial w_k} f_\alpha f_\beta d^3 w_\alpha d^3 w_\beta. \quad (6.50)$$

Выведем этот закон для максвелловского распределения частиц  $\alpha$  и  $\beta$  по хаотическим скоростям. В этом случае

$$f_\alpha f_\beta = \left( \frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} \left( \frac{m_\beta}{2\pi T_\beta} \right)^{3/2} \exp \left[ - \left( \frac{m_\alpha w_\alpha^2}{2T_\alpha} + \frac{m_\beta w_\beta^2}{2T_\beta} \right) \right]. \quad (6.51)$$

Чтобы выделить распределение по относительным скоростям, надо перейти в (6.50) и (6.51) от скоростей частиц  $w_\alpha$  и  $w_\beta$  к относительной скорости  $w$  и скорости  $w_s$ :

$$w = w_\alpha - w_\beta; \quad w_s = \frac{(m_\alpha/T_\alpha) w_\alpha + (m_\beta/T_\beta) w_\beta}{m_\alpha/T_\alpha + m_\beta/T_\beta}. \quad (6.52)$$

Скорости  $w_\alpha$  и  $w_\beta$  связаны с  $w$  и  $w_s$  соотношениями

$$w_\alpha = w_s + \frac{m_\beta T_\alpha w}{m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha}; \quad w_\beta = w_s - \frac{m_\alpha T_\beta w}{m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha}. \quad (6.53)$$

Коэффициенты в формуле для  $w_s$  выбраны таким образом, чтобы произведение  $f_\alpha f_\beta$  превращалось в произведение распределений по относительным скоростям и по скоростям  $w_s$ . Действительно, подставляя (6.53) в (6.51), получаем

$$\left. \begin{aligned} f_\alpha(w_\alpha) f_\beta(w_\beta) &= f_r(w) f_s(w_s); \\ f_r &= \left( \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\pi T_{\alpha\beta}} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{\mu_{\alpha\beta} w^2}{2T_{\alpha\beta}} \right); \\ f_s &= \left( \frac{m_s}{2\pi T_s} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m_s w_s^2}{2T_s} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

где  $\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$  — приведенная масса;  $m_s = m_\alpha + m_\beta$ , а

$$T_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}, \quad T_s = \frac{T_\alpha T_\beta}{T_{\alpha\beta}}. \quad (6.55)$$

При рассмотрении столкновений электронов с тяжелыми частицами обычно  $m_\alpha T_e \gg m_e T_\alpha$  и  $T_{\alpha\beta} \approx T_e$ ,  $T_s \approx T_\alpha$ ; для столкновений частиц близкой массы можно считать  $T_\alpha \approx T_\beta$ ,  $T_{\alpha\beta} \approx T_s \approx T_\alpha$ ; первая из этих величин характеризует распределение по относительным скоростям, вторая — по скоростям  $w_s$ . Подставляя (6.54) в (6.50), учтем, что якобиан перехода от скоростей  $w_\alpha$ ,  $w_\beta$  к  $w$ ,  $w_s$  равен единице, т. е.

$d^3\omega_\alpha d^3\omega_\beta = d^3\omega d^3\omega_s$ . Тогда, интегрируя по  $\omega_s$ , получаем

$$\begin{aligned}\bar{v}_{\alpha\beta} &= \int_{(\mathbf{w})} \int_{(\mathbf{w}_s)} \frac{\partial (\omega_k v_{\alpha\beta})}{\partial \omega_k} f_r(\mathbf{w}) f_s(\mathbf{w}_s) d^3\omega d^3\omega_s = \\ &= \int_{(\mathbf{w})} \frac{\partial (\omega_k v_{\alpha\beta})}{\partial \omega_k} f_r(\mathbf{w}) d^3\omega.\end{aligned}$$

Интеграл по компоненте относительной скорости  $\omega_k$  удобно взять по частям. В результате найдем, что

$$\begin{aligned}\bar{v}_{\alpha\beta} &= \left( \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\pi T_{\alpha\beta}} \right)^{3/2} \int_{(\mathbf{w})} \frac{\mu_{\alpha\beta} \omega_k^2}{T_{\alpha\beta}} v_{\alpha\beta}(\omega) \exp\left(-\frac{\mu_{\alpha\beta} \omega^2}{2T_{\alpha\beta}}\right) d^3\omega = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\mu_{\alpha\beta}}{T_{\alpha\beta}} \right)^{5/2} \int_0^\infty \omega^4 v_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{\mu_{\alpha\beta} \omega^2}{2T_{\alpha\beta}}\right) d\omega, \quad (6.56)\end{aligned}$$

или  $\bar{v}_{\alpha\beta} = \langle v_{\alpha\beta} \omega^2 \rangle / \langle \omega^2 \rangle$ , где усреднение проводится с помощью распределения по относительным скоростям (6.54).

Полученный результат, основанный на предположении об изотропии распределения по хаотическим скоростям, соответствует приближению пяти моментов. Если в функциях распределения учитывать поправки, связанные с моментами более высокого порядка, то в выражении для столкновительного члена (6.48) придется учитывать и другие слагаемые. Так, считая, что функция распределения включает моменты пропорциональные компонентам теплового потока, т. е. описывается формулой (6.35), необходимо учитывать первое слагаемое в (6.48). Например, для условий, когда  $\omega_\alpha^2 \gg \omega_\beta^2$ , подставляя (6.35) в это слагаемое, получаем

$$\begin{aligned}\left( \frac{\delta u_{\alpha k}}{\delta t} \right)_q &= -\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \times \\ \times \int v_{\alpha\beta} \omega_k f_{0\alpha}(\omega) &\left[ 1 - \sum_l \frac{q_{\alpha l}}{n_\alpha T_\alpha} \frac{n \omega_l}{T_\alpha} \left( 1 - \frac{m_\alpha \omega_\alpha^2}{5T_\alpha} \right) \right] d^3\omega_\alpha = \\ &= \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \frac{q_{\alpha k}}{3n_\alpha T_\alpha} \left\langle v_{\alpha\beta} \left( \frac{m_\alpha \omega^2}{T_\alpha} - \frac{m_\alpha^2 \omega^4}{5T_\alpha^2} \right) \right\rangle. \quad (6.57)\end{aligned}$$

Здесь усреднение проводится по максвелловскому распределению частиц  $\alpha$ . Компоненты вектора  $q_{\alpha k}$  теплового потока имеют слагаемые пропорциональные разности скоростей ( $u_{\alpha k} - u_{\beta k}$ ), а также слагаемое пропорциональное  $\partial T_\alpha / \partial x_k$ . Поэтому подстановка выражений типа (6.57) в слагаемые суммарного столкновительного члена  $\delta u_{\alpha k} / \delta t = \sum_\beta (\delta u_{\alpha k} / \delta t)_{\alpha k}$  приводит к двояким изменениям.

Во-первых, появляются добавочные члены, имеющие ту же структуру, что и (6.49); они пропорциональны разности направленных

скоростей ( $u_{\alpha k} - u_{\beta k}$ ) и некоторой усредненной частоте столкновений. Учет этих слагаемых можно свести к переопределению частоты столкновений — эффективная частота столкновений получается отличной от (6.56). Во-вторых, появляются слагаемые пропорциональные градиентам температуры. В результате суммарный столкновительный член, входящий в уравнение (6.41), может быть записан в виде

$$m_{\alpha} n_{\alpha} \delta u_{\alpha} / \delta t = n_{\alpha} \sum_{\beta} (R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^T), \quad (6.58)$$

где

$$R_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}); \quad R^T \sim \text{grad } T. \quad (6.59)$$

Вектор  $R_{\alpha\beta}$ , пропорциональный разности направленных скоростей  $\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}$  и эффективной частоте столкновений  $v_{\alpha\beta}$ , определяет силу трения. Выражение для силы трения легко получить и из качественных соображений, рассматривая изменение импульса при столкновениях. Максимальное изменение скорости сталкивающихся частиц происходит при лобовом ударе. В этом случае вектор относительной скорости изменяется на противоположный и  $\Delta \mathbf{v}_{\text{макс}} = \mathbf{v}' - \mathbf{v} = -2\mathbf{v}$ . Приближенно можно считать, что среднее по столкновениям изменение относительной скорости равно  $(1/2)\Delta \mathbf{v}_{\text{макс}}$ . Соответственно среднее по столкновениям изменение импульса одной из сталкивающихся частиц равно

$$\Delta (m_{\alpha} v_{\alpha}) = -\mu_{\alpha\beta} v = -\mu_{\alpha\beta} (v_{\alpha} - v_{\beta}).$$

Умножая эту величину на частоту столкновений  $v_{\alpha\beta}$  и усредняя по скоростям, получаем среднее изменение импульса частиц  $\alpha$  в результате их столкновений с частицами  $\beta$  в единицу времени. Это изменение и определяет силу трения  $R_{\alpha\beta} = -\mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta})$ .

В случае, если частота столкновений зависит от скорости и имеется градиент температуры, в выражении для столкновительного члена появляется дополнительное слагаемое  $R^T$ , определяемое градиентами температуры. Его называют *термосилой*. Наличие этого слагаемого связано по существу с градиентом частоты столкновений. В отсутствие магнитного поля оно приводит к тому, что число столкновений частиц, движущихся вдоль градиента (из области с меньшей частотой столкновений), меньше числа столкновений частиц, движущихся в противоположном направлении. В результате появляется среднее изменение импульса, направленное вдоль градиента. Оценим это изменение. Различные числа столкновений частиц, движущихся вдоль и против градиента, приближенно определяются изменением частоты столкновений на длине свободного пробега  $\delta v \approx \lambda \text{ grad } v \approx (v/v) \text{ grad } v$  (предполагается, что каждое столкновение приводит к хаотизации направления скорости частиц). Соответственно усредненное по столкновениям изменение импульса в единицу времени можно оценить как произведение



изменения импульса в одном столкновении  $\Delta(m_{\alpha}v_{\alpha}) \approx \mu_{\alpha\beta}v$  на  $\delta v$ . Усредняя это произведение по скоростям, получаем термосилу

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta}^T = \mu_{\alpha\beta} \langle v\delta v_{\alpha\beta} \rangle \approx \frac{\mu_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\beta}} \text{grad } v_{\alpha\beta} \approx \frac{T_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\beta}} \frac{dv_{\alpha\beta}}{dT_{\alpha\beta}} \text{grad } T_{\alpha\beta}, \quad (6.60)$$

при  $(T/v) dv/dT \approx 1$   $\mathbf{R}^T \sim \mathbf{e}_i^* \text{grad } T$  [здесь  $T_{\alpha\beta}$  — температура, характеризующая распределение по относительным скоростям (6.55)]. В сильном магнитном поле при условиях, когда градиент температуры перпендикулярен полю, термосила существенно меньше, поскольку поперечное смещение заряженных частиц между столкновениями много меньше длины свободного пробега. Оценка термосилы в этом случае будет дана в гл. 9.

Подставляя выражение для столкновительного члена (6.58) в (6.41), получаем усредненное уравнение движения для частиц  $\alpha$  в виде

$$m_{\alpha} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\alpha} \text{grad}) \mathbf{u}_{\alpha} \right] = Z_{\alpha} e E + \frac{Z_{\alpha} e}{c} [\mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{H}] - \frac{\text{grad } p_{\alpha}}{n_{\alpha}} - \frac{\text{grad } \tilde{\pi}_{\alpha}}{n_{\alpha}} - \sum_{\beta} \mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}) + \sum_{\beta} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^T. \quad (6.61)$$

В дальнейшем будем пренебрегать эффектами, связанными с вязкостью\*. В большинстве случаев можно не учитывать также второе (квадратичное относительно  $\mathbf{u}$ ) слагаемое в левой части уравнения. Действительно, оно имеет порядок

$$|m_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} \text{grad}) \mathbf{u}_{\alpha}| \approx m_{\alpha} u_{\alpha}^2/L$$

и при малой анизотропии распределения по скоростям значительно меньше слагаемого пропорционального градиенту давления:

$$\text{grad } p_{\alpha}/n \approx p_{\alpha}/n_{\alpha}L \approx T_{\alpha}/L$$

( $L$  — характерная длина, на которой существенно изменяются параметры плазмы). При этом уравнение движения (6.61) принимает вид

$$m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} = Z_{\alpha} e E + \frac{Z_{\alpha} e}{c} [\mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{H}] - \frac{\text{grad } p_{\alpha}}{n_{\alpha}} - \sum_{\beta} \mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}) + \sum_{\beta} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^T. \quad (6.62)$$

Отметим, что оно линейно по  $\mathbf{u}$ .

\* Критерий пренебрежения вязкостью по сравнению с другими слагаемыми в уравнениях переноса при отсутствии магнитного поля будет дан в § 7.3.

## § 6.4. Уравнения баланса энергий и теплового потока

Получим теперь одно из уравнений моментов второго порядка — уравнение баланса энергий. Для этого положим в уравнении (6.20)  $g = mn^2/2$ . Средние значения величин, входящих в уравнение, равны

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= \langle mv^2/2 \rangle = \langle K \rangle; & \langle \mathbf{g}\mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}mv^2/2 \rangle = \\ &= \mathbf{Q}/n; \\ \langle \text{grad}_v g \rangle &= \langle m\mathbf{v} \rangle = m\mathbf{u}; & \langle (\mathbf{I}\mathbf{v} \times \mathbf{H})\text{grad}_v g \rangle &= \\ &= \langle (\mathbf{I}\mathbf{v} \times \mathbf{H})m\mathbf{v} \rangle = 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{Q}$  — вектор потока энергии (6.12). Подставляя их в (6.20), получаем

$$\partial (n \langle K \rangle) / \partial t = -\text{div} \mathbf{Q} + Zenu\mathbf{E} + \delta (n \langle K \rangle) / \delta t. \quad (6.63)$$

Уравнение (6.63) показывает, что изменение кинетической энергии частиц каждого сорта происходит по трем причинам. Первая причина — перенос энергии при движении частиц. Он описывается дивергенцией потока ( $\text{div} \mathbf{Q}$ ). Вторая причина — нагрев частиц, связанный с током в плазме. Удельная мощность этого нагрева есть произведение плотности тока ( $\mathbf{j} = Zenu$ ) на напряженность поля ( $\mathbf{E}$ ). Третья причина связана с изменением энергии при столкновениях  $\delta (n \langle K \rangle) / \delta t$ .

Преобразуем уравнение баланса энергий, представляя кинетическую энергию в виде суммы энергий хаотического и направленного движения (6.5):  $K = mu^2/2 + (3/2)T$ . Используя также выражение (6.13) для плотности потока энергии, находим

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} n \frac{\partial T}{\partial t} + mnu \frac{\partial u}{\partial t} + \left( \frac{3}{2} T + \frac{mu^2}{2} \right) \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \mathbf{q} + \text{div} \left( \frac{5}{2} nT\mathbf{u} \right) + \\ + \text{div} (\tilde{\pi}\mathbf{u}) + \text{div} \left( n\mathbf{u} \frac{mu^2}{2} \right) + Zenu\mathbf{E} = \frac{\delta (n \langle K \rangle)}{\delta t}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

С помощью выражений для  $\partial n / \partial t$  и  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  из уравнений (6.36), (6.41) это уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} n \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{2}{3} \text{div} \mathbf{q} + n\mathbf{u} \text{grad} T + \frac{2}{3} nT \text{div} \mathbf{u} + \frac{2}{3} \tilde{\pi} \text{grad} \mathbf{u} = \\ = n \frac{\delta T}{\delta t}, \end{aligned} \quad (6.65)$$

где  $n\delta T / \delta t = (2/3)\delta (n \langle K \rangle) / \delta t - T\delta n / \delta t - mn (\delta \mathbf{u} / \delta t) \cdot \mathbf{u}$ .

Определим столкновительный член для упругих соударений. Подставляя в соотношение (6.24)  $g_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2 / 2$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\delta (n \langle K_\alpha \rangle)}{\delta t} = n_\alpha n_\beta \int_{(\mathbf{v}_\alpha)} \int_{(\mathbf{v}_\beta)} \int_{(\Omega)} \left( \frac{m_\alpha v_\alpha'^2}{2} - \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} \right) \times \\ \times v_\alpha \sigma d\Omega f_\alpha f_\beta d^3 v_\alpha d^3 v_\beta. \end{aligned} \quad (6.66)$$

В соответствии с (2.19) изменение кинетической энергии при столкновениях, просуммированное по углам рассеяния, определяется соотношением

$$\int_{(\Omega)} \left( \frac{m_\alpha v_\alpha'^2}{2} - \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} \right) \sigma d\Omega = -\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \int_{(\Omega)} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_{\alpha\beta} (1 - \cos \vartheta) \times \\ \times \sigma d\Omega = -\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^t(v) = -\frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} S_{\alpha\beta}^t \times \\ \times [m_\alpha v_\alpha^2 - m_\beta v_\beta^2 + (m_\beta - m_\alpha) \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\beta].$$

Подставляя эту формулу в (6.56), получаем

$$\left( \frac{\delta n \langle T_\alpha \rangle}{\delta t} \right)_{\alpha\beta} = -\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} n_\alpha \langle \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_{\alpha\beta}^t(v) \rangle = -\frac{2m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} \times \\ \times n_\alpha \left\langle \mathbf{v}_{\alpha\beta} \left[ \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - \frac{m_\beta v_\beta^2}{2} + \frac{(m_\beta - m_\alpha) \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\beta}{2} \right] \right\rangle, \quad (6.67)$$

где усреднение проводится по скоростям частиц  $\alpha$  и  $\beta$ . Для случая, когда частота столкновений  $\nu_{\alpha\beta}$  не зависит от скорости, ее можно вынести за знак усреднения.

Представляя далее скорость каждой из частиц в виде суммы хаотической и направленной составляющих, находим

$$\left( \frac{\delta n_\alpha \langle K_\alpha \rangle}{\delta t} \right)_{\alpha\beta} = -\frac{3}{2} \kappa_{\alpha\beta} n_\alpha \nu_{\alpha\beta}^t (T_\alpha - T_\beta) - \kappa_{\alpha\beta} \nu_{\alpha\beta}^t \times \\ \times \left[ \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2} - \frac{m_\beta u_\beta^2}{2} + \frac{(m_\beta - m_\alpha) \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\beta}{2} \right], \quad (6.68)$$

где ввели коэффициент передачи энергии  $\kappa_{\alpha\beta} = 2m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$ . Первое слагаемое в (6.68) определяет обмен энергией хаотического движения при столкновениях, второе — изменение направленной энергии. Легко видеть, что оно обращается в нуль при  $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}_\beta$ , т. е. когда обе компоненты плазмы в среднем покоятся друг относительно друга и отсутствует трение. Чтобы найти столкновительный член, входящий в правую часть (6.56), нужно добавить к (6.68) слагаемое —  $m \mathbf{u}_\alpha \delta (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) / \delta t$ . Используя формулу (6.46) для случая  $\nu_{\alpha\beta} = \text{const}$ , находим

$$m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \left( \frac{\delta n_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{\delta t} \right)_{\alpha\beta} = -\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} n_\alpha \nu_{\alpha\beta}^t \mathbf{u}_\alpha (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)$$

и

$$\frac{3}{2} \frac{\delta (n_\alpha T_\alpha)}{\delta t} = \frac{\delta (n_\alpha \langle K_\alpha \rangle)}{\delta t} - m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \frac{\delta (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha)}{\delta t} = -\frac{3}{2} \times \\ \times \kappa_{\alpha\beta} n_\alpha \nu_{\alpha\beta}^t (T_\alpha - T_\beta) + \frac{m_\alpha m_\beta^2}{(m_\alpha + m_\beta)^2} n_\alpha \nu_{\alpha\beta}^t (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)^2. \quad (6.69)$$

В случае, когда частота столкновений зависит от скорости, усреднение по формуле (6.67) будет более сложным. Проведем его для максвелловского распределения частиц по скоростям. Как и раньше, представим в (6.67) скорости частиц в виде суммы направленной и хаотической составляющих. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_0 \mathbf{v} \mathbf{v}(v) \rangle &= \sum_k \langle v_{0k} v_k \mathbf{v}(v) \rangle \approx \sum_k \langle (u_{0k} + w_{0k}) \rangle \times \\ &\times \left[ w_k \mathbf{v}(w) + \sum_l \frac{\partial (w_k \mathbf{v})}{\partial w_l} u_l \right] = \sum_k \langle w_{0k} w_k \mathbf{v}(w) \rangle + \\ &+ \sum_k u_{0k} \left\langle \frac{\partial (w_k \mathbf{v})}{\partial w_k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Здесь  $\mathbf{u}_0$  и  $\mathbf{w}_0$  — составляющие скорости центра инерции:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{m_\alpha \mathbf{u}_\alpha + m_\beta \mathbf{u}_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \quad \mathbf{w}_0 = \frac{m_\alpha \mathbf{w}_\alpha + m_\beta \mathbf{w}_\beta}{m_\alpha + m_\beta}.$$

В (6.70) распределение по хаотическим скоростям считается изотропным. Чтобы определить средние значения величин, входящих в (6.70), следует умножить их на функции распределения частиц  $\alpha$  и  $\beta$  и проинтегрировать по скоростям. Как было показано в § 6.3 [см. (6.54)], произведение максвелловских функций распределения частиц  $\alpha$  и  $\beta$   $f_\alpha(\mathbf{w}_\alpha) f_\beta(\mathbf{w}_\beta)$  можно преобразовать к произведению максвелловских функций распределения по относительным скоростям  $\mathbf{w}$  и по скоростям  $\mathbf{w}_s$ , определяемым равенством (6.52). Поэтому при усреднении (6.70) следует перейти от  $\mathbf{w}_0$  к  $\mathbf{w}_s$ . Связь между ними находится с помощью соотношений (6.53):

$$\mathbf{w}_0 = \frac{m_\alpha \mathbf{w}_\alpha + m_\beta \mathbf{w}_\beta}{m_\alpha + m_\beta} = \mathbf{w}_s + \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \frac{(T_\alpha - T_\beta)}{T_{\alpha\beta}} \mathbf{w},$$

где  $T_{\alpha\beta} = (m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha)/(m_\alpha + m_\beta)$  — температура, характеризующая распределение по относительным скоростям. Используя эту формулу и учитывая независимость распределений по  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{w}_s$ , находим

$$\begin{aligned} \langle w_{0k} w_k \mathbf{v}(w) \rangle &= \langle w_{sk} \rangle \langle w_k \mathbf{v}(w) \rangle + \frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} \frac{(T_\alpha - T_\beta)}{T_{\alpha\beta}} \langle w_k^2 \mathbf{v}(w) \rangle = \\ &= \frac{1}{3} \frac{m_\alpha m_\beta (T_\alpha - T_\beta)}{(m_\alpha + m_\beta)^2 T_{\alpha\beta}} \langle w^2 \mathbf{v}(w) \rangle. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в (6.70) и воспользовавшись определением усредненной частоты столкновений, даваемым формулами (6.50) и (6.56), получаем

$$\langle \mathbf{v}_0 \mathbf{v} \mathbf{v}_{\alpha\beta} \rangle = \frac{T_\alpha - T_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta} + \frac{m_\alpha u_\alpha^2 - m_\beta u_\beta^2 + (m_\beta - m_\alpha) u_\alpha u_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta}. \quad (6.71)$$

Формула (6.71) определяет величину  $\delta \langle n \langle K \rangle \rangle / \delta t$  [см. (6.67)]. Учитывая также (6.49), находим выражение для столкновительного члена уравнения (6.65) в виде

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} n_\alpha \frac{\delta T_\alpha}{\delta t} &= \frac{\delta \langle n_\alpha \langle K_\alpha \rangle \rangle}{\delta t} - m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \frac{\delta \mathbf{u}_\alpha}{\delta t} = \\ &= - \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} n_\alpha [\langle \mathbf{v}_0 \mathbf{v} \mathbf{v}_{\alpha\beta} \rangle - \mathbf{u}_\alpha \langle \mathbf{v} \mathbf{v}_{\alpha\beta} \rangle] = \\ &= - \frac{3}{2} \kappa_{\alpha\beta} n_\alpha (T_\alpha - T_\beta) \bar{\mathbf{v}}_{\alpha\beta} + \frac{m_\alpha m_\beta^2}{m_\alpha^2 + m_\beta^2} n_\alpha (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)^2 \bar{\mathbf{v}}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Это выражение отличается от (6.69) лишь заменой частоты столкновений на усредненную величину, определяемую равенством (6.56). Отметим, что при учете анизотропии функции распределения по хаотическим скоростям [см. (6.35)] в столкновительном члене появятся слагаемые, пропорциональные компонентам теплового потока [ср. (6.57)].

Для электронов в уравнении баланса энергий необходимо учитывать неупругие столкновения. Как и раньше, их можно разбить на две группы. Столкновения с малыми потерями энергии можно рассматривать с помощью выражения (6.66) аналогично упругим столкновениям. Изменение кинетической энергии в этом случае практически равно энергии возбуждения  $m_e v'^2/2 - m_e v^2/2 = -\mathcal{E}_j$ . Подставляя это изменение в (6.66) и суммируя по всем процессам с малой потерей энергии, находим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta n_e \langle K_e \rangle}{\delta t} \right)_{ea}^l &= - n_e \sum_j \int_{(\mathbf{v}_a)} \int_{(\mathbf{v}_e)} \mathcal{E}_j v_{ea}^{(j)} f_e f_a d^3 v_a d^3 v_e = \\ &= - n_e \int_{(\mathbf{v}_a)} \int_{(\mathbf{v}_e)} \kappa_{ea}^l v_{ea}^l \frac{m_e v_e^2}{2} f_e f_a d^3 v_e d^3 v_a, \end{aligned} \quad (6.73)$$

где введены, так же как и в § 5.3, суммарная частота неупругих столкновений с малой потерей энергии  $v_{ea}^l$  и средний коэффициент передачи энергии  $\kappa_{ea}^l$ . Полагая, что кинетическая энергия электронов много больше энергии атомов, можно пренебречь зависимостью  $\kappa^l v^l$  от скорости атомов и провести в (6.73) интегрирование по  $\mathbf{v}_a$ . Тогда столкновительный член примет вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta n_e \langle K_e \rangle}{\delta t} \right)_{ea}^l &= - n_e \int_{(\mathbf{v}_e)} \kappa_{ea}^l v_{ea}^l \frac{m_e v_e^2}{2} f_e(\mathbf{v}_e) d^3 v_e = \\ &= - n_e \langle \kappa_{ea}^l v_{ea}^l K_e \rangle \approx - \frac{3}{2} \kappa_{ea}^l v_{ea}^l n_e T_e. \end{aligned} \quad (6.74)$$

(в последнем равенстве, считая  $m_e v_e^2/2 \ll T_e$ , опустили слагаемое, связанное с направленным движением).]

Учет столкновений с большими потерями энергии будет простым, если считать энергию электронов после таких столкновений близкой к нулю. При этом можно использовать интеграл столкновений в форме (5.45) и тогда столкновительный член примет вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta n_e \langle K_e \rangle}{\delta t} \right)_{ea}^h &= -n_e \sum_j \int_{(v_e)} \frac{m_e v_e^2}{2} v_{ea}^{(j)} f_e d^3 v_e = \\ &= -n_e \langle v_{ea}^h K_e \rangle \approx -\frac{3}{2} \bar{v}_{ea}^h n_e T_e. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Здесь введена суммарная частота неупругих столкновений с большой потерей энергии  $v_{ea}^h = \sum_j v_{ea}^{(j)}$ .

Равенства (6.74) и (6.75) показывают, что учет неупругих столкновений приводит к замене величины  $\kappa_{\alpha\beta}$  в выражении для столкновительного члена (6.72) на суммарную величину, учитывающую потери энергии как при упругих, так и при неупругих столкновениях:

$$\overline{\kappa_{ea}^s v_{ea}^s} = \overline{\kappa_{ea} v_{ea} + \kappa_{ea}^l v_{ea}^l + v_{ea}^h}. \quad (6.76)$$

Поправка во втором слагаемом (6.72), связанная с неупругими столкновениями, сводится, как нетрудно видеть, к замене частоты столкновений  $v_{ea}$  на суммарную частоту  $v_{ea}^s$  (6.44). Эта поправка невелика, когда средняя частота неупругих столкновений значительно меньше частоты упругих столкновений (см. § 2.5, 2.7).

Уравнение баланса энергий (6.65) после подстановки выражения (6.72) для столкновительного члена принимает вид

$$\begin{aligned} n_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{q}_\alpha + n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \operatorname{grad} T_\alpha + \frac{2}{3} n_\alpha T_\alpha \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha + \\ + \frac{2}{3} \tilde{\kappa}_\alpha \operatorname{grad} \mathbf{u}_\alpha = -n_\alpha \sum_\beta \overline{\kappa_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}} (T_\alpha - T_\beta) + \\ + \frac{2}{3} n_\alpha \sum_\beta \langle v_{\alpha\beta} \rangle \frac{m_\alpha m_\beta^2}{m_\alpha^2 + m_\beta^2} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)^2. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Будем пренебрегать в дальнейшем эффектами, связанными с вязкостью, опуская соответствующий член уравнения. Для тяжелых частиц (ионов и атомов) во многих случаях можно опустить также слагаемые столкновительного члена, связанные с направленным движением — при малой анизотропии (при  $mu^2/2 \ll T$ ) они значительно меньше слагаемых, связанных с хаотическим движением. Тогда уравнение баланса энергии для тяжелых частиц приобретает вид

$$n_{\alpha} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial t} + \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{q}_{\alpha} + n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \operatorname{grad} T_{\alpha} + \frac{2}{3} n_{\alpha} T_{\alpha} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\alpha} =$$

$$= -n_{\alpha} \sum_{\beta} \overline{\kappa_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}} (T_{\alpha} - T_{\beta}), \quad (6.78)$$

где  $\kappa_{\alpha\beta} = 2m_{\alpha}m_{\beta}/(m_{\alpha} + m_{\beta})^2$ . Уравнение баланса энергии для электронов можно записать следующим образом:

$$n_e \frac{\partial T_e}{\partial t} + \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{q}_e + n_e \mathbf{u}_e \operatorname{grad} T_e + \frac{2}{3} n_e T_e \operatorname{div} \mathbf{u}_e =$$

$$= -n_e \sum_{\beta} \overline{\kappa_{e\beta}^s v_{e\beta}^s} (T_e - T_{\beta}) + \frac{2}{3} n_e \sum_{\beta} v_{e\beta} m_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_{\beta})^2, \quad (6.79)$$

где в соответствии с (6.76) произведение  $\kappa v$  заменено на суммарную величину, учитывающую неупругие столкновения.

В уравнениях (6.77) — (6.78) входят моменты третьего порядка — компоненты вектора теплового потока  $\mathbf{q}$ . Уравнения для них можно получить аналогично уравнениям для более низких моментов. При условиях, когда функции распределения по хаотическим скоростям близки к максвелловским и могут быть представлены в форме (6.35), а энергия направленного движения много меньше хаотической ( $m\mathbf{u}^2/2 \ll T$ ), уравнения для вектора теплового потока принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{5}{2} \frac{nT}{m} \operatorname{grad} T - \frac{Ze}{mc} [\mathbf{q} \times \mathbf{H}] = \frac{\delta \mathbf{q}}{\delta t}. \quad (6.80)$$

Столкновительные члены этих уравнений в общем случае довольно сложны. Выражения для столкновительных членов, связанных с электрон-атомными и ион-атомными упругими столкновениями, при не зависящей от скорости частоте столкновений могут быть представлены как

$$\left( \frac{\delta \mathbf{q}_{\alpha}}{\delta t} \right)_{\alpha\beta} = \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} v_{\alpha\beta} \left[ -\mathbf{q}_{\alpha} \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} \kappa_{\alpha\beta} \right) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{q}_{\beta} \kappa_{\alpha\beta} \frac{n_{\alpha}}{n_{\beta}} + \frac{5}{2} \kappa_{\alpha\beta} (T_{\alpha} - T_{\beta}) (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}) \right], \quad (6.81)$$

где первое слагаемое обусловлено «рассеянием» теплового потока заряженных частиц при столкновениях, второе описывает «передачу» теплового потока от атомов к заряженным частицам, третье связано с обменом энергией и направленным движением при столкновениях. Для электрон-атомных столкновений выражение (6.81) упрощается, поскольку  $\kappa_{e\alpha} = 2m_e/m_{\alpha} \ll 1$ . Пренебрегая величинами пропорциональными  $\kappa$ , находим

$$(\delta \mathbf{q}_e / \delta t)_{e\alpha} = -v_{e\alpha} \mathbf{q}_e. \quad (6.82)$$

Если частоты  $v_{e\alpha}$  и  $v_{i\alpha}$  зависят от скорости, выражения, определяющие  $\delta \mathbf{q} / \delta t$ , отличаются от приведенных коэффициентами порядка единицы, а также дополнительными слагаемыми, пропорциональными направленной скорости. Для электрон-ионных столкно-

вений, частота которых обратно пропорциональна кубу скорости, вычисления приводят к следующей формуле:

$$\left(\frac{\delta q_e}{\delta t}\right)_{ei} = -\frac{13}{10} \bar{v}_{ei} \mathbf{q}_e + \frac{2}{3} n_e T_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (6.83)$$

где  $\bar{v}_{ei}$  — усредненная частота столкновений, даваемая равенством (5.116). Столкновительный член уравнения (6.80), в отличие от ранее рассматривавшихся, должен учитывать и столкновения одинаковых частиц, поскольку тепловой поток не является величиной, сохраняющейся при столкновениях. Для случая, когда частота столкновений  $\nu_{\alpha\alpha}$  не зависит от скорости, вычисления приводят к равенству

$$(\delta q_\alpha / \delta t)_{\alpha\alpha} = (1/2) \nu_{\alpha\alpha} \mathbf{q}_\alpha. \quad (6.84)$$

Учет зависимости  $\nu_{\alpha\alpha}$  от скорости дает изменение численного множителя в формуле. В частности, столкновительный член, определяемый электрон-электронными и ион-ионными столкновениями, равен

$$(\delta q_\alpha / \delta t)_{\alpha\alpha} = (4/5) \nu_{\alpha\alpha} \mathbf{q}_\alpha, \quad (6.85)$$

где

$$\nu_{\alpha\alpha} = \frac{8\sqrt{\pi}}{3\sqrt{m_\alpha}} \frac{e^4 n_\alpha L_\alpha}{T_\alpha^{3/2}}$$

есть частота кулоновских столкновений частиц  $\alpha$ , усредненная по максвелловскому распределению в соответствии с формулой (6.57).

Приведенные выражения позволяют получить общий вид столкновительных членов уравнений (6.80) в различных случаях. В уравнении для теплового потока электронов трехкомпонентной плазмы, состоящей из электронов, однозарядных ионов и атомов, столкновительный член с помощью формул (6.82) — (6.84) можно записать в виде

$$\frac{\delta q_e}{\delta t} = -(\nu_{ea} + 1,87 \nu_{ei}) \mathbf{q}_e + \frac{3}{2} n_e T_e \nu_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \quad (6.86)$$

(здесь учтено, что  $\nu_{ee} = \sqrt{2} \nu_{ei}$ ). В уравнении для теплового потока ионов, полагая  $m_i = m_\alpha$ , член  $\delta q_i / \delta t$  найдем с помощью (6.81), (6.85):

$$\begin{aligned} \frac{\delta q_\alpha}{\delta t} = & -\left(\frac{3}{4} \nu_{ia} + \frac{4}{5} \nu_{ii}\right) \mathbf{q}_i + \frac{1}{4} \frac{n_i}{n_\alpha} \nu_{ia} \mathbf{q}_\alpha + \frac{5}{8} \times \\ & \times \nu_{ia} (T_i - T_\alpha) (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_\alpha). \end{aligned} \quad (6.87)$$

Здесь не учтен вклад ион-электронных столкновений [ $(\delta q_i / \delta t)_{ie} \sim (m_e / m_i) \nu_{ei} \mathbf{q}_i$ ], так как он во всех случаях много меньше вклада ион-ионных столкновений. Аналогичный вид имеет столкновительный член, определяющий тепловой поток атомов. С помощью (6.81) и (6.84) получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta q_\alpha}{\delta t} = & -\left(\frac{3}{4} \nu_{ai} + \frac{1}{4} \nu_{aa}\right) \mathbf{q}_\alpha + \frac{1}{2} \frac{n_\alpha}{n_i} \nu_{ia} \mathbf{q}_i + \\ & + \frac{5}{8} \nu_{ai} (T_\alpha - T_i) (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_i). \end{aligned} \quad (6.88)$$



ГЛАВА 7  
**ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В ПЛАЗМЕ  
 ПРИ ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

**§ 7.1. Направленное движение и перенос энергии  
 заряженных частиц в слабоионизованной плазме**

В этой главе рассматриваются процессы, определяющие баланс заряженных частиц и их энергий в плазме без магнитного поля. Главные из этих процессов — направленное движение заряженных частиц (перенос частиц), направленный перенос их энергии, обмен энергией между частицами при столкновениях. Для рассмотрения процессов переноса будут использоваться уравнения моментов, полученные и проанализированные в предыдущей главе. В большинстве случаев будем считать условия стационарными и пренебрегать в уравнениях моментов слагаемыми пропорциональными производным по времени. Как и раньше, рассмотрение будем проводить для трехкомпонентной плазмы, состоящей из электронов, однозарядных положительных ионов и нейтральных атомов. Процессы переноса в такой плазме зависят от степени ионизации. Можно выделить поэтому два предельных случая — случай *слабоионизованной плазмы*, в которой частота столкновений электронов и ионов с атомами много больше частоты их столкновений друг с другом:

$$v_{ea} \gg v_{ei}, v_{ee}; \quad v_{ia} \gg v_{ii}, \quad (m_e/m_i) v_{ei}, \quad (7.1)$$

и случай *сильноионизованной плазмы*, определяемый противоположными неравенствами. Степень ионизации, характеризующую переход от одного случая к другому, для водородной плазмы иллюстрирует рис. 7.1.

Рассмотрим сначала процессы переноса в слабоионизованной плазме. Направленное движение заряженных частиц определяется уравнениями первого момента. Для условий, когда эффекты, связанные с вязкостью, несущественны (см. § 7.2), эти уравнения сводятся к векторному равенству (6.62). В отсутствие магнитного поля оно имеет вид

$$m_\alpha \mathbf{u}_\alpha / \partial t = Z_\alpha e \mathbf{E} - (1/n) \text{grad} (n T_\alpha) + m_\alpha \delta \mathbf{u}_\alpha / \delta t, \quad (7.2)$$

где для электронов  $\alpha = e$ ,  $Z_e = -1$ ; для ионов  $\alpha = i$ ,  $Z_i = 1$ ,  $n_e = n_i = n$ . Столкновительный член уравнения в слабоионизованной плазме [при выполнении (7.1)] включает только слагаемые, обусловленные столкновениями заряженных частиц с нейтральными. Для случая, когда частота столкновений не зависит от скорости

ти; столкновительный член равен силе трения, удовлетворяющей (6.59):

$$m_{\alpha} \delta u_{\alpha} / \delta t = R_{\alpha\alpha} = -\mu_{\alpha\alpha} v_{\alpha\alpha} (q_{\alpha} - u_{\alpha}). \quad (7.3)$$

где  $v_{\alpha\alpha} = v_{\alpha\alpha}^t$  — транспортная частота столкновений;  $\mu_{\alpha\alpha} = m_{\alpha} \times \times m_{\alpha} (m_{\alpha} + m_{\alpha})$  — приведенная масса, для электронов  $\mu_{e\alpha} = m_e$ , для ионов при  $m_i = m_{\alpha} \mu_{i\alpha} = (1/2)m_i$ . Обычно в слабоионизованной плазме направленная скорость нейтральных атомов много меньше направленной скорости заряженных частиц. При этом сила трения (7.3) равна\*

$$R_{\alpha\alpha} = -\mu_{\alpha\alpha} v_{\alpha\alpha} u_{\alpha}. \quad (7.4)$$

Далее будем пренебрегать слагаемыми уравнений моментов, пропорциональными производным по времени. Условие такого пренебрежения в уравнении (7.2) нетрудно получить, сравнивая первый член с силой трения (7.4). Это условие имеет вид

$$|m_{\alpha} \delta u_{\alpha k} / \delta t| \approx m_{\alpha} u_{\alpha k} / \tau \ll |R_k| \approx \approx m_{\alpha} u_{\alpha k} v_{\alpha\alpha}$$

или

$$v_{\alpha\alpha} \tau \gg 1. \quad (7.5)$$

Оно означает, что использование стационарного решения уравнения (7.2) правомерно, когда характерное время изменения параметров плазмы  $\tau$  много больше времени между столкновениями  $1/v$ .

Опуская в (7.2) первый член и подставляя формулу (7.4) для столкновительного члена, получаем:

$$ZeE - \frac{1}{n} \text{grad}(nT_{\alpha}) - \mu_{\alpha\alpha} v_{\alpha\alpha} u_{\alpha} = 0. \quad (7.6)$$

Полученное равенство позволяет найти направленную скорость

$$u_{\alpha} = \frac{Z_{\alpha} e}{\mu_{\alpha} v_{\alpha\alpha}} E - \frac{T_{\alpha}}{\mu_{\alpha} v_{\alpha\alpha}} \frac{\text{grad } n}{n} - \frac{1}{\mu_{\alpha} v_{\alpha\alpha}} \text{grad } T_{\alpha}. \quad (7.7)$$

Она представляет собой сумму трех слагаемых

$$u_{\alpha} = u_{\alpha E} + u_{\alpha n} + u_{\alpha T}. \quad (7.8)$$

\* Отметим, что в случаях, когда нельзя пренебрегать направленной скоростью атомов, формула (7.4) определяет силу трения в движущейся системе отсчета, в которой эта скорость равна нулю.

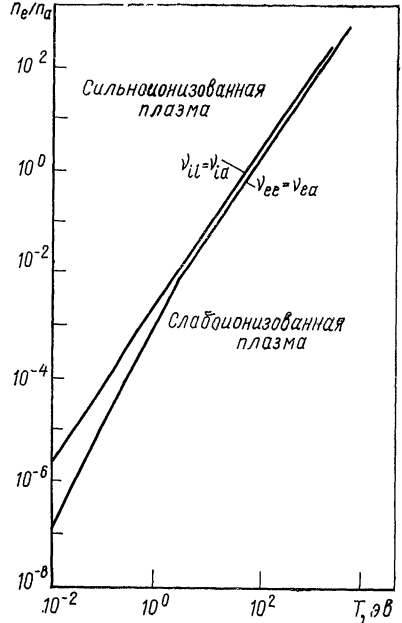


Рис. 7.1

Первое из них  $\mathbf{u}_E$  определяет направленную скорость, связанную с ускорением заряженных частиц в электрическом поле. Коэффициент пропорциональности  $b_\alpha$  между скоростью и полем называется *подвижностью*

$$\mathbf{u}_{\alpha E} = Z_\alpha b_\alpha \mathbf{E}, \quad b_\alpha = e/\mu_{\alpha a} \nu_{\alpha a}. \quad (7.9)$$

Второе слагаемое описывает диффузию, вызванную неоднородностью концентрации заряженных частиц. Диффузионная направленная скорость пропорциональна относительному градиенту концентрации

$$\mathbf{u}_{\alpha n} = -D_\alpha \text{grad } n/n, \quad D_\alpha = T_\alpha/\mu_{\alpha a} \nu_{\alpha a}. \quad (7.10)$$

Коэффициент пропорциональности  $D_\alpha$  называют *коэффициентом диффузии*.

Последнее слагаемое в (7.8) определяет диффузию, вызванную градиентом температуры, — *термодиффузию*. Направленную скорость термодиффузии  $\mathbf{u}_{\alpha T}$  можно представить в виде аналогичном (7.10):

$$\mathbf{u}_{\alpha T} = -D_\alpha^T \text{grad } T_\alpha/T_\alpha, \quad D_\alpha^T = T_\alpha/\mu_{\alpha a} \nu_{\alpha a}, \quad (7.11)$$

где  $D_\alpha^T$  — *коэффициент термодиффузии*.

Между коэффициентами  $b$ ,  $D$ ,  $D^T$ , определяющими направленное движение, существует связь. В частности, пользуясь (7.9) и (7.10), получаем соотношение между коэффициентами диффузии и подвижности

$$D_\alpha/b_\alpha = T_\alpha/e. \quad (7.12)$$

Его называют *соотношением Эйнштейна*. При распределениях скоростей частиц, близких к равновесному, оно справедливо для любой зависимости частоты их столкновений от скорости.

Суммарная направленная скорость заряженных частиц может быть выражена через введенные выше коэффициенты переноса. Подставляя (7.9) — (7.11) в (7.8), находим для электронов

$$\mathbf{u}_e = -b_e \mathbf{E} - D_e \text{grad } n/n - D_e^T \text{grad } T_e/T_e, \quad (7.13)$$

где  $b_e = e/m_e \nu_{ea}$ ,  $D_e = T_e/m_e \nu_{ea}$ , а для ионов

$$\mathbf{u}_i = b_i \mathbf{E} - D_i \text{grad } n/n - D_i^T \text{grad } T_i/T_i, \quad (7.14)$$

где  $b_i = 2e/m_i \nu_{ia}$ ,  $D_i = 2T_i/m_i \nu_{ia}$ . С помощью этих формул можно найти и плотность тока в плазме, которая является суммой электронной и ионной компонент:

$$\mathbf{j} = ne \mathbf{u}_i - ne \mathbf{u}_e = en (b_e + b_i) \mathbf{E} + e (D_e - D_i) \text{grad } n + en (D_e^T \text{grad } T_e/T_e - D_i^T \text{grad } T_i/T_i). \quad (7.15)$$

Обычно ионными слагаемыми в этой сумме можно пренебречь, так как входящие в нее коэффициенты переноса обратно пропорциональ-

ны массам. Первый член в (7.15) определяет проводимость плазмы  $\sigma$  в постоянном электрическом поле:

$$\mathbf{j}_E = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma \approx enb_e = ne^2/m_e v_{ea}. \quad (7.16)$$

Она, как видно, пропорциональна концентрации электронов.

Мы получили выражения, описывающие направленную скорость заряженных частиц для случая, когда частота их столкновений с нейтральными не зависит от скорости. В общем случае, при произвольной зависимости частоты столкновений от скорости, выражения для компонент направленной скорости, определяющихся электрическим полем, градиентами концентрации и температуры, аналогичны формулам (7.9) — (7.11). В коэффициенты переноса входят при этом некоторые усредненные по распределениям скоростей частоты столкновений, отличающиеся в различных коэффициентах численным множителем порядка единицы.

При распределении скоростей заряженных частиц, близком максвелловскому, направленную скорость можно определить, подставив в уравнение первого момента выражение для столкновительного члена, полученного в § 6.3. Это выражение состоит из двух слагаемых — силы трения и термосилы [см. (6.58)]:

$$m_\alpha \frac{\delta u_\alpha}{\delta t} = \mathbf{R}_{\alpha\alpha} - \mathbf{R}_{\alpha\alpha}^T. \quad (7.17)$$

Сила трения по-прежнему может быть представлена в виде (7.4), если использовать в ней усредненное значение частоты столкновений. В первом приближении закон усреднения дается равенством (см. (6.56)):

$$\begin{aligned} v_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\mu_{\alpha\alpha}}{T_{\alpha\alpha}} \right)^{5/2} \int_0^\infty \omega^4 v_{\alpha\alpha}^t(\omega) \exp\left(-\frac{\mu_{\alpha\alpha} \omega^2}{2T_{\alpha\alpha}}\right) d\omega = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^4 v_{\alpha\alpha}^t\left(x \sqrt{\frac{T_{\alpha\alpha}}{\mu_{\alpha\alpha}}}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где температура  $T_{\alpha\alpha} = (m_a T_\alpha + m_\alpha T_a)/(m_a + m_\alpha)$  соответствует распределению по относительным скоростям. В частности, для случая, когда частота столкновений пропорциональна скорости  $v_{\alpha\alpha}^t \sim W$ , усредненная величина (7.20) равна

$$v_{\alpha\alpha} = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} v_\alpha^t(v_T),$$

а для случая, когда частота столкновений обратно пропорциональна скорости, равна

$$v_{\alpha\alpha} = 2 \sqrt{\frac{2}{3\pi}} v_\alpha^t(v_T),$$

где  $v_T = \sqrt{3T_{\alpha\alpha}/\mu_{\alpha\alpha}}$ .

Термосила возникает при наличии градиента температуры и в отсутствие магнитного поля равна

$$\mathbf{R}_{\alpha\alpha}^T \approx g_{T\alpha} \text{grad } T_{\alpha\alpha}, \quad (7.19)$$

где коэффициент  $g_{T\alpha}$  определяется зависимостью  $v_{\alpha\alpha}$  от скорости. Величина  $g_{T\alpha}$  с точностью до численного множителя порядка единицы совпадает с (6.60):

$$g_{T\alpha} \approx (T_{\alpha\alpha}/v_{\alpha\alpha}) (dv_{\alpha\alpha}/dT_{\alpha\alpha}).$$

Для более точного вычисления эффективной частоты столкновений, определяющей силу трения, и для нахождения численного значения коэффициента  $g_{\alpha}$ , определяющего термосилу, необходимо совместное решение уравнений движения и теплового потока (см. § 6.3).

Подстановка столкновительного члена (7.17) в уравнение (7.2) приводит к прежним формулам для компонент скорости (7.9) — (7.11). При этом коэффициенты подвижности  $b$  и диффузии  $D$  также удовлетворяют прежним формулам (7.9), (7.10) с заменой в них частоты столкновений ее усредненным значением. Соответственно соотношение между коэффициентами  $D$  и  $b$  по-прежнему дается формулой (7.12). При определении коэффициента термодиффузии приходится учитывать влияние термосилы (7.18). Добавляя ее к силе, связанной с градиентом давления, получаем

$$D_{\alpha}^T = (T_{\alpha}/\mu_{\alpha\alpha} v_{\alpha\alpha}) (1 - g_{T\alpha}). \quad (7.20)$$

Эта формула показывает, что коэффициент термодиффузии может быть как больше коэффициента диффузии (при  $g \sim dv/dT < 0$ ), так и меньше него (при  $g \sim dv/dT > 0$ ).

Остановимся на определении тепловых потоков, характеризующих перенос энергии заряженных частиц. Уравнения для вектора теплового потока  $\mathbf{q}$  (уравнения третьего момента) были приведены в § 6.4. Для рассматриваемого стационарного случая при отсутствии магнитного поля они имеют вид [см. (6.80)]

$$\frac{5}{2} \frac{n_{\alpha} T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \text{grad } T_{\alpha} = \frac{\delta \mathbf{q}_{\alpha}}{\delta t}. \quad (7.21)$$

В слабоионизованной плазме существенны лишь столкновения заряженных частиц с нейтральными. Для электронов соответствующий столкновительный член при частоте столкновений, не зависящей от скорости, определяется равенством (6.82)  $\delta \mathbf{q}_e/\delta t = -v_{ea} \mathbf{q}_e$ . Подставляя его в (7.21), получаем выражение для теплового потока электронов

$$\mathbf{q}_e = -\frac{5}{2} \frac{n T_e}{m_e v_{ea}} \text{grad } T_e. \quad (7.22)$$

Коэффициент пропорциональности между тепловым потоком и градиентом температуры называют *коэффициентом теплопроводности*, а его отношение к концентрации — *коэффициентом температуропро-*

водности. Для рассматриваемого случая эти коэффициенты соответственно равны

$$\mathcal{K}_e = (5/2)nT_e/m_e v_{ea}, \quad \chi_e = \mathcal{K}_e/n = (5/2)T_e/m_e v_{ea} = (5/2)D_e. \quad (7.23)$$

Отметим, что коэффициент температуропроводности отличается от коэффициента диффузии электронов (7.13) лишь численным множителем порядка единицы. Для случая, когда частота столкновений электронов зависит от скорости, выражение, определяющее тепловой поток, усложняется. Кроме слагаемого аналогичного (7.22) в него входит еще слагаемое пропорциональное направленной скорости электронов. В результате  $q_e$  приобретает вид

$$q_e = -\frac{5}{2} g_{qe} \frac{nT_e}{m_e v_{ea}} \text{grad } T_e + g_{Te} nT_e u_e. \quad (7.24)$$

Численные значения коэффициентов  $g_q$  и  $g_T$  определяются зависимостью  $v_{ea}$  от  $v$ .

Тепловой поток ионов во многих случаях связан с тепловым потоком нейтральных атомов, так как между ними существует эффективный обмен энергией при столкновениях. В связи с этим уравнение теплового потока ионов и атомов приходится часто рассматривать совместно. Подставляя в уравнения (7.21) для ионов и нейтральных атомов столкновительные члены (6.87) и (6.88) (справедливые при не зависящих от скорости частотах столкновений  $v_{ia}$ ,  $v_{aa}$  и пренебрегая ион-ионными столкновениями, а также учитывая, что  $v_{ai} = (n_i/n_a)v_{ia}$  и  $m_i = m_a$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \frac{n_i T_i}{m_i} \text{grad } T_i = v_{ia} \left[ -\frac{3}{4} q_i + \frac{1}{4} \frac{n_i}{n_a} q_a + \frac{5}{8} (T_i - T_a) (u_i - u_a) \right]; \\ \frac{5}{2} \frac{n_a T_a}{m_a} \text{grad } T_a = \frac{n_i}{n_a} v_{ia} \left[ -\frac{3}{4} q_a + \frac{1}{4} \frac{n_a}{n_i} q_i + \right. \\ \left. + \frac{5}{8} (T_i - T_a) (u_i - u_a) \right] - \frac{1}{2} v_{aa} q_a. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно  $q_i$  и  $q_a$  и учитывая, что для слабоионизованной плазмы  $n_i \ll n_a$ , находим

$$\left. \begin{aligned} q_i = -\frac{10}{3} \frac{n_i T_i}{m_i v_{ia}} \text{grad } T_i + \frac{5}{6} n_i (T_i - T_a) (u_i - u_a) - \\ - \frac{5}{3} \frac{n_i T_a}{m_a v_{aa}} \text{grad } T_a; \\ q_a = -5 \frac{n_a T_a}{m_a v_{aa}} \text{grad } T_a - \frac{10}{3} \frac{n_i T_i}{m_i v_{ia}} \text{grad } T_i - \\ - \frac{5}{12} n_i \frac{v_{ia}}{v_{ii}} (T_i - T_a) (u_i - u_a). \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

В формуле для теплового потока нейтральных атомов ионными слагаемыми можно пренебречь в случае  $n_i T_i^2 \ll n_a T_a^2$ . При этом поток определяется лишь столкновениями атомов друг с другом. В выражении для теплового потока ионов при  $T_a \ll T_i$  последним

слагаемым также можно пренебречь. Тогда оно приобретает вид, аналогичный (7.24):

$$\mathbf{q}_i = -\frac{10}{3} \frac{n_i T_i}{m_i v_{ia}} \text{grad } T_i + \frac{5}{6} n_i T_i \mathbf{u}_i. \quad (7.26)$$

Структура выражения сохранится и при частоте столкновений, зависящей от скорости. Однако численные коэффициенты, разумеется, изменятся.

## § 7.2. Коэффициенты подвижности, диффузии и теплопроводности электронов

Коэффициенты подвижности, диффузии и теплопроводности электронов в слабоионизованной плазме могут быть определены с помощью метода, использующего разложение функции распределения по параметрам, характеризующим ее анизотропию. Такой метод был описан в гл. 5. Как было показано в § 5.1, 5.2, это разложение оказывается быстро сходящимся. Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми, можно представить функцию распределения в виде (5.20)

$$f(\mathbf{v}) = f_0(v) + (v/v)\mathbf{f}_1(v). \quad (7.27)$$

Первое слагаемое в сумме является изотропной составляющей функции распределения — оно зависит только от  $v$ . Входящая во второе слагаемое направленная составляющая определяет направленную скорость электронов. В соответствии с (5.13) находим

$$\mathbf{u} = \int (\mathbf{v}) \mathbf{v} f(\mathbf{v}) d^3 v = \frac{1}{3} \int (\mathbf{v}) v \mathbf{f}_1(v) d^3 v = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^3 \mathbf{f}_1(v) dv. \quad (7.28)$$

Подставляя сумму (7.27) в кинетическое уравнение и учитывая малость второго члена, нетрудно получить уравнения для обеих составляющих  $f_0$  и  $\mathbf{f}_1$  (см. § 5.2). Уравнение, определяющее  $\mathbf{f}_1$  [см. (5.22)], для стационарного случая ( $\partial(n\mathbf{f}_1)/\partial t = 0$ ) при отсутствии магнитного поля имеет вид

$$-\frac{ne\mathbf{E}}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v \text{grad}(nf_0) = \mathbf{S}_1. \quad (7.29)$$

Столкновительный член  $\mathbf{S}_1$  определен в § 5.3. При учете упругих и неупругих столкновений он может быть записан в форме

$$\mathbf{S}_1 = -n\mathbf{f}_1 v_{ea}^s(v), \quad (7.30)$$

где  $v_{ea}^s = v^f + v^l + v^h$  — суммарная частота столкновений электронов с атомами. Уравнение (7.29) при учете (7.30) позволяет найти функцию  $\mathbf{f}_1$ :

$$\mathbf{f}_1 = \frac{e\mathbf{E}}{m_e v_{ea}^s} \frac{df_0}{dv} - \frac{v}{v_{ea}^s} \frac{\text{grad}(nf_0)}{n}. \quad (7.31)$$

Подставляя (7.31) в (7.28), получаем направленную скорость электронов

$$\mathbf{u} = \frac{4\pi}{3} \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \int_0^\infty \frac{v^3}{v_{ea}^s} \frac{df_0}{dv} dv - \frac{4\pi}{3n} \text{grad} \left( n \int_0^\infty \frac{v^4}{v_{ea}^s} f_0 dv \right) \quad (7.32)$$

(здесь оператор grad вынесен за знак интеграла). В соответствии с определением, данным в § 7.1 [см. (7.8) — (7.11)], она может быть выражена через коэффициенты подвижности и диффузии:

$$\mathbf{u} = -b_e \mathbf{E} - \frac{1}{n} \text{grad} (D_e n) = -b_e \mathbf{E} - D_e \frac{\text{grad} n}{n} - D_e^T \frac{\text{grad} T_e}{T_e}, \quad (7.33)$$

где

$$b_e = -\frac{4\pi}{3} \frac{e}{m_e} \int_0^\infty \frac{v^3}{v_{ea}^s} \frac{df_0}{dv} dv; \quad (7.34)$$

$$D_e = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{v^4}{v_{ea}^s} f_0 dv; \quad (7.35)$$

$$D_e^T = T_e \frac{\partial D_e}{\partial T_e}. \quad (7.36)$$

Формулы (7.34), (7.35) для коэффициентов  $b_e$  и  $D_e$  могут быть записаны в виде, аналогичном формулам (7.9), (7.10):

$$b_e = e/m_e v_{ea}^b, \quad D_e = T_e/m_e v_{ea}^D, \quad (7.37)$$

если соответствующим образом определить эффективные частоты столкновений  $v_{ea}^b$  и  $v_{ea}^D$ . В общем случае (при произвольной функции распределения  $f_0$ ) эти частоты различны. Сопоставляя (7.34) и (7.35) с (7.37), находим для частоты столкновений, определяющей подвижность:

$$v_{ea}^b = \left[ -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{v^3}{v_{ea}^s} \frac{df_0}{dv} dv \right]^{-1} = \left[ \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{d}{dv} \left( \frac{v^3}{v_{ea}^s} \right) f_0 dv \right]^{-1} \quad (7.38)$$

и для частоты столкновений, входящей в коэффициент диффузии:

$$v_{ea}^D = \left[ \frac{4\pi}{3} \frac{T_e}{m_e} \int_0^\infty \frac{v^4}{v_{ea}^s} f_0 dv \right]^{-1}. \quad (7.39)$$

Нетрудно убедиться, что когда  $v_{ea}$  не зависит от  $v$ , обе эти величины равны  $v_{ea}$ . При максвелловском распределении электронов по скоростям

$$f_0(v) = \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_e v^2}{2T_e} \right),$$



частоты столкновений  $\nu_{ea}^b$  и  $\nu_{ea}^D$ , входящие в коэффициенты подвижности и диффузии, также равны. Этот результат приводит к соотношению (7.12) между  $b_e$  и  $D_e$ . Выражение для эффективной частоты столкновений, получающееся в результате подстановки максвелловского распределения в (7.38) или (7.39), имеет вид

$$\begin{aligned} \nu_{ea}(T_e) &= \left[ \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m_e}{T_e} \right)^{5/2} \int_0^\infty \frac{v^4}{\nu_{ea}^s(v)} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right) dv \right]^{-1} = \\ &= \left[ \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^4 \exp(-x^2/2)}{\nu_{ea}^s\left(x \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}\right)} dx \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Например, для случая, когда частота столкновений пропорциональна скорости  $\nu_{ea}^s \sim v$ , эффективная частота равна

$$\nu_{ea}(T_e) = \sqrt{3\pi/8} \nu_{ea}^s(v_T),$$

а для случая, когда частота столкновений обратно пропорциональна скорости ( $\nu_{ea}^s \sim 1/v$ ),

$$\nu_{ea}(T_e) = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \nu_{ea}^s(v_T),$$

где  $v_T = \sqrt{3T_e/m_e}$ . Заметим, что отличие эффективной частоты столкновений (7.40) от приведенного в § 7.1 приближенного выражения (7.18) при слабой зависимости  $\nu(v)$  невелико. Для случаев  $\nu \sim v$  и  $\nu \sim 1/v$  это отличие составляет около 13%.

Связь между коэффициентами термодиффузии и диффузии дается равенством (7.36). В соответствии с ним, используя определение  $D_e$  через эффективную частоту столкновений  $\nu_{ea}^D$  (7.37), получим

$$D_e^T = T_e \frac{\partial}{\partial T_e} \left( \frac{T_e}{m_e \nu_{ea}^D} \right) = \frac{T_e}{m_e \nu_{ea}^D} (1 - g_{T_e}), \quad (7.41)$$

где  $g_{T_e} = (T_e/\nu_{ea}^D) \partial \nu_{ea}^D / \partial T_e$ . Эта формула соответствует приведенной в § 7.1 формуле (7.20). Она позволяет найти соотношение между коэффициентами  $D_e$  и  $D_e^T$ . При частоте столкновений, не зависящей от скорости, как уже отмечалось,  $D_e = D_e^T$  [см. (7.11)]. При частоте столкновений, пропорциональной скорости  $\nu_{ea}^s \sim v$ , формула (7.41) приводит к соотношению  $D^T = (1/2)D$ , при  $\nu_{ea}^s \sim 1/v$  — к соотношению  $D^T = (3/2)D$ .

Определим теперь тепловой поток электронов. Найдем сначала с помощью разложения (7.27) поток их энергии  $\mathbf{Q} = (1/2)nm_e \times$

$\times \langle v v^2 \rangle$  (6.12). Нетрудно видеть, что он определяется направленной составляющей функции распределения

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e &= \frac{1}{2} n m_e \int_{(v)} v v^2 f(v) d^3 v = \frac{1}{6} n m_e \int_{(v)} v^3 \mathbf{f}_1(v) d^3 v = \\ &= \frac{4\pi}{6} n m_e \int_0^\infty v^5 \mathbf{f}_1(v) dv. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Тепловой поток при малых направленных скоростях связан с потоком энергии соотношением

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e &= \frac{1}{2} n m_e \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \rangle \approx \frac{1}{2} n m_e [\langle v v^2 \rangle - \mathbf{u} \langle v^2 \rangle - \\ &- 2 \langle \mathbf{v}(\mathbf{v} \mathbf{u}) \rangle] = \mathbf{Q}_e - \frac{5}{2} n T_e \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Подставляя в (7.43) формулы (7.42) для  $\mathbf{Q}$  и (7.32) для  $\mathbf{u}$ , получаем

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{3} n m \int_0^\infty \left( v^5 - 5 \frac{T_e}{m} v^3 \right) \mathbf{f}_1 dv. \quad (7.44)$$

С помощью (7.31) найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\frac{4\pi}{6} n e \mathbf{E} \int_0^\infty \frac{v^5 - 5 (T_e/m_e) v^3}{v_{ea}^s} \frac{df_0}{dv} dv - \frac{4\pi}{6} m_e \times \\ &\times \text{grad} \left[ n \int_0^\infty \frac{v^6 - 5 (T_e/m_e) v^4}{v_{ea}^s} f_0 dv \right] - \frac{10\pi}{3} n \text{grad} T_e \int_0^\infty \frac{v^4}{v_{ea}^s} f_0 dv. \end{aligned}$$

Это выражение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\frac{5}{2} \frac{n T_e}{m_e v_{ea}^D} \text{grad} T_e - g_{u1} \frac{e \mathbf{E}}{m_e} \frac{n T_e}{v_{ea}^D} + \\ &+ g_{u2} \text{grad} \left( \frac{n T_e^2}{m_e v_{ea}^D} \right), \end{aligned} \quad (7.45)$$

где  $v_{ea}^D$  — частота столкновений, определяющая коэффициент диффузии (7.38):

$$\begin{aligned} \frac{g_{u1}}{v_{ea}^D} &= \frac{4\pi}{6} \frac{m_e}{T_e} \int_0^\infty \left( v^5 - 5 \frac{T_e}{m_e} v^3 \right) \frac{1}{v_{ea}^s} \frac{df_0}{dv} dv; \\ \frac{g_{u2}}{v_{ea}^D} &= \frac{-4\pi}{6} \left( \frac{m_e}{T_e} \right)^2 \int_0^\infty \left( v^6 - 5 \frac{T_e}{m_e} v^4 \right) \frac{f_0}{v_{ea}^s} dv. \end{aligned} \quad (7.46)$$

При максвелловской функции распределения  $f_0$  находим

$$\begin{aligned} \frac{g_{u1}}{v_{ea}^D} &= \frac{g_{u2}}{v_{ea}^D} = -\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{(x^6 - 5x^4)}{v_{ea}^s \left( x \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \right)} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{v_{ea}^s} \right) x^5 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Сравнивая эту формулу с (7.40), нетрудно убедиться, что  $\frac{g_u}{v_{ea}} = -T_e \frac{\partial(1/v_{ea})}{\partial T_e}$  и, значит,

$$g_u = (T_e/v_{ea}) \partial v_{ea} / \partial T_e. \quad (7.47)$$

Учитывая, что при максвелловском распределении  $g_{u1} = g_{u2} = g_u$ , преобразуем выражение (7.45) к виду

$$q = -\left(\frac{5}{2} - g_u\right) \frac{nT_e}{m_e v_{ea}} \text{grad } T_e - g_u nT_e \mathbf{u}. \quad (7.48)$$

Первое слагаемое в (7.48) определяет коэффициент теплопроводности электронов при произвольной зависимости  $v_{ea}^s(v)$ , который равен

$$\kappa_e = (5/2 - g_u) nT_e / m_e v_{ea}. \quad (7.49)$$

Второе слагаемое описывает перенос тепла, связанный с направленным движением. Отметим, что коэффициент  $g_u$ , определяющий такой перенос (7.47), равен коэффициенту  $g_T$ , входящему в выражение для термодиффузионного потока [(см. (7.33), (7.41)]. Можно показать, что равенство этих коэффициентов при распределении скоростей, близком к максвелловскому, является следствием известного в термодинамике принципа симметрии кинетических коэффициентов (принципа Онзагера).

### § 7.3. Механизм процессов переноса

Рассмотрим теперь физическую картину процессов переноса заряженных частиц и их энергии под действием электрического поля, градиентов концентрации, температуры.

Движение заряженных частиц в электрическом поле представляет собой наложение хаотического, броуновского перемещения и направленного движения, вызванного ускорением под действием поля. В условиях, когда направленная скорость в среднем много меньше хаотической [как было показано в § 5.1, такие условия выполняются для ионов в слабом поле (5.5), а для электронов в любом поле], картина движения мало отличается от броуновской. Полная скорость каждой частицы складывается из скорости хаотиче-

ско́го (теплого) движения ( $\mathbf{w}$ ) и скорости, приобретаемой под воздействием электрического поля ( $\mathbf{v}_E$ ):

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}_E. \quad (7.50)$$

Для простоты предположим, что столкновения заряженных частиц с атомами приводят к полной изотропии скоростей и непосредственно после столкновений их средняя скорость равна нулю. Тогда для каждой частицы, испытавшей столкновение в момент времени  $t_0$ , можно считать  $\mathbf{v}_E(t_0) = 0$ ,  $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{w}$ . В промежутке между столкновениями заряженная частица в электрическом поле испытывает ускорение. Ее скорость в момент времени  $t$  равна  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + (Ze\mathbf{E}/m)(t - t_0)$  (в предположении, что напряженность поля  $\mathbf{E}$  мало меняется за время между столкновениями). Усредняя скорость по коллективу частиц и учитывая, что средняя хаотическая скорость равна нулю, а среднее время от момента последнего столкновения порядка обратной частоты столкновений, получаем формулу для направленной скорости

$$\mathbf{u}_E = \langle \mathbf{v}_E \rangle \approx Ze\mathbf{E}/m\nu, \quad (7.51)$$

которая соответствует (7.7). Здесь  $\nu$  — усредненная по столкновениям и скоростям частота столкновений (разумеется, закон усреднения при качественном рассмотрении остается неопределенным). Как видно, получающаяся зависимость направленной скорости от частоты столкновений ( $\mathbf{u}_E \sim 1/\nu$ ) обусловлена тем, что столкновения ограничивают время ускорения в электрическом поле.

Рассмотрим теперь механизм диффузии. Диффузия является следствием хаотического движения частиц. В однородной плазме при отсутствии электрического поля тепловой поток частиц через любую площадку скомпенсирован обратным потоком. Если же имеется градиент концентрации, то в направлении обратном градиенту, возникает нескомпенсированный поток частиц, обусловленный различной концентрацией частиц по обе стороны площадки, перпендикулярной градиенту. Предполагая, что градиент концентрации направлен вдоль оси  $x$ , вычислим поток частиц через площадку, расположенную перпендикулярно этой оси. Будем по-прежнему считать, что столкновения приводят к полной хаотизации скоростей. После столкновения скорость частицы в направлении выделенной площадки равна  $w_x = w \cos \Theta$ , где  $w$  — хаотическая скорость;  $\Theta$  — угол между вектором скорости и осью  $x$ . Плотность потока через площадку частиц с заданным значением и направлением скорости равна

$$d\Gamma_x = n w \cos \Theta f(\mathbf{w}) d^3 w, \quad (7.52)$$

где  $n$  — концентрация частиц в области, где они испытали последнее столкновение;  $f(\mathbf{w}) d^3 w$  — доля частиц с заданным значением и направлением скорости. Поток  $d\Gamma_x$  определяется столкновениями в точке с координатой  $x' = x - l \cos \Theta$ , где  $l$  — длина «пробега»

от точки столкновения до площадки. Полагая, что концентрация частиц мало изменяется на длине  $l$ , находим

$$d\Gamma_x = n(x - l \cos \Theta) \omega \cos \Theta f(\mathbf{w}) d^3 \mathbf{w} \approx [n \omega \cos \Theta - (\partial n / \partial x) \omega l \cos^3 \Theta] f(\mathbf{w}) d^3 \mathbf{w}.$$

Усредняя полученное выражение по направлениям, суммируя по величинам хаотической скорости и учитывая, что  $\langle \cos \Theta \rangle = 0$ ,  $\langle \cos^2 \Theta \rangle = 1/3$ , получаем

$$\Gamma_x = nu_n = -(1/3) \langle \omega l \rangle \partial n / \partial x. \quad (7.53)$$

Формула (7.53) позволяет найти коэффициент диффузии. Принимая, что средняя длина до последнего столкновения определяется частотой столкновений  $\langle l \rangle \approx \lambda \approx \omega / \nu$ , имеем

$$D = \frac{1}{3} \langle \omega l \rangle \approx \frac{1}{3} \omega^2 / \nu \approx T / m \nu,$$

что согласуется с (7.10). Зависимость диффузионного потока от температуры и частоты столкновений обусловлена характером диффузионного переноса, вызванного тепловым движением частиц, — он пропорционален тепловой скорости и разности концентраций на длине свободного пробега.

Аналогичным образом можно рассмотреть диффузию, вызванную градиентом температуры заряженных частиц. В этом случае различие потока вдоль и против градиента обусловлено различием средних величин хаотической скорости частиц и средних длин свободного пробега по разные стороны от выделенной площадки, перпендикулярной градиенту температуры. Воспользовавшись формулой (7.52) для плотности потока частиц с заданными величиной и направлением хаотической скорости и полагая, что распределение частиц по хаотическим скоростям определяется местом последнего столкновения, получаем

$$\begin{aligned} d\Gamma_x &= n \omega \cos \Theta f(\mathbf{w}, x - l \cos \Theta) d^3 \mathbf{w} = \\ &= \left( n \omega f \cos \Theta - n \omega \frac{\partial f}{\partial x} l \cos^2 \Theta \right) d^3 \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Усредняя эту формулу по углам  $\Theta$  и суммируя по хаотическим скоростям, находим плотность потока, связанного с градиентом температуры:

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= nu_T = -\frac{1}{3} \int_{(\mathbf{w})} \omega l \frac{\partial f}{\partial x} d^3 \mathbf{w} = \\ &= -\frac{1}{3} n \frac{\partial}{\partial x} \int_{(\mathbf{w})} \omega l f d^3 \mathbf{w} = -n \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{3} \langle \omega l \rangle \right), \quad (7.54) \end{aligned}$$

и далее, полагая  $l = w/v$ , получаем

$$u_T = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T}{mv} \right) = -\frac{T}{mv} \left( 1 - \frac{T}{v} \frac{dv}{dT} \right) \frac{\text{grad } T}{T}. \quad (7.55)$$

Эта формула для направленной скорости аналогична формулам (7.11) (для случая  $v = \text{const}$ ) и (7.20) (для общего случая). Как видно из (7.54), при постоянной (не зависящей от скорости) длине пробега между столкновениями термодиффузионный поток определяется разницей тепловых скоростей на этой длине, приводящей к декомпенсации потоков частиц вдоль и против градиента температуры. Дополнительный эффект связан с изменением вдоль градиента самой длины свободного пробега.

Перенос энергии под действием градиента температуры также определяется тепловым движением частиц. Он существует и в условиях, когда поток частиц отсутствует (например, в системе отсчета, в которой направленная скорость равна нулю). Действительно, из области с более высокой температурой в область с меньшей температурой должны приходить частицы с большей средней энергией, чем в обратном направлении. Поэтому даже при равенстве прямого и обратного потоков частиц должен существовать нескомпенсированный поток их энергии. Определим этот поток. Будем по-прежнему считать, что градиент температуры направлен вдоль оси  $x$ . Плотность потока энергии, переносимого частицами с заданной скоростью, получим, умножая плотность потока частиц (7.52) на их энергию:

$$dQ_x = (m\omega^2/2)n\omega \cos\Theta f(\mathbf{w})d^3w.$$

Полагая, как и раньше, что распределение скоростей частиц определяется местом их последнего столкновения и что оно мало изменяется на длине между столкновениями, находим

$$\begin{aligned} dQ_x &= \frac{nm\omega^3}{2} \cos\Theta f(\mathbf{w}, x - l \cos\Theta) d^3w = \\ &= \frac{nm\omega^3}{2} \cos\Theta \left( f - l \cos\Theta \frac{\partial f}{\partial x} \right) d^3w, \end{aligned}$$

где  $l \approx w/v$ . Усредняя поток по углам  $\Theta$  и суммируя по скоростям получаем

$$Q_x = -\frac{1}{6} nm \int_{(\mathbf{w})} \frac{w^4}{v} \frac{\partial f}{\partial x} d^3w = -\frac{1}{6} nm \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{(\mathbf{w})} \frac{w^4}{v} f d^3w \right). \quad (7.56)$$

В частности, при максвелловском распределении скоростей для случая, когда частота столкновений не зависит от скорости:

$$Q_x = -\frac{1}{6} \frac{nm}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left[ 4\pi \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \right] \times \\ \times \int_0^{\infty} \omega^6 \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2T}\right) d\omega = -5 \frac{nT}{m\nu} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Это выражение для  $Q$  аналогично полученной в § 7.2 формуле (7.43).

Чтобы найти плотность теплового потока  $q_x$ , надо вычесть из  $Q_x$  поток энергии, связанный с направленным движением:

$$q_x = \frac{1}{2} nm \langle (v_x - u_x) (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \rangle = Q_x - \frac{5}{2} n u_x T.$$

Используя (7.54), находим для случая  $\nu = \text{const}$

$$q_x = -\frac{5}{2} \frac{nT}{m\nu} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (7.57)$$

Выражение (7.57) дает коэффициент теплопроводности, величина которого совпадает с точностью до численного множителя с произведением коэффициента диффузии на среднюю энергию частиц. Это отражает *аналогию* в механизмах диффузионного переноса частиц и переноса энергии, связанных с хаотическим движением частиц.

Отметим, что электрическое поле и градиент концентрации могут привести к дополнительному переносу энергии. Выражения для соответствующих потоков, аналогичные (7.24) и (7.45), нетрудно получить из рассмотрения разности потоков энергии вдоль и против градиентов. Различие таких потоков в системе отсчета, в которой направленная скорость равна нулю, связано с зависимостью частоты столкновений от энергии частиц. Эта зависимость приводит к тому, что для частиц различных энергий время ускорения в электрическом поле и перепад концентраций на длине свободного пробега различны. В результате в системе отсчета, в которой потоки частиц вдоль и против градиентов скомпенсированы, потоки энергий также различны.

В заключение оценим компоненты тензора вязких напряжений, определяющего анизотропную часть потока импульса (см. § 6.1). Оценим, например, перенос  $y$ -компоненты импульса вдоль оси  $x$ , связанный с градиентом направленной скорости  $\partial u_y / \partial x$  и описываемый компонентой  $\pi_{yx}$  тензора вязкости. Поток импульса возникает вследствие того, что в присутствии градиента направленной скорости  $\partial u_y / \partial x$  импульсы  $mu_y$ , переносимые в результате теплового движения вдоль оси  $x$  в обоих направлениях, нескомпенсированы. Поток импульса определяется произведением среднего импульса

са в месте последнего столкновения на поток частиц. Для группы частиц с заданной тепловой скоростью найдем

$$d\pi_{yx} = m u_y (x - l \cos \Theta) d\Gamma_x \approx n m \left( u_y - \frac{\partial u_y}{\partial x} l \cos \Theta \right) \omega \cos \Theta f(\omega) d^3 \omega.$$

Суммируя по скоростям, находим

$$\pi_{yx} \approx -\frac{1}{3} n m \langle l \omega \rangle \frac{\partial u_y}{\partial x} \approx -n \frac{T}{\nu} \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (7.58)$$

Аналогичные соотношения получаются для других компонент тензора. В общем случае можно показать, что тензор определяется соотношением

$$\pi_{kl} = -\eta \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{lk} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \quad (7.59)$$

где коэффициент  $\eta \approx nT/\nu$  называется *коэффициентом вязкости*.

Чтобы определить условия пренебрежения эффектами, связанными с вязкостью в уравнениях переноса, сравним компоненты тензора вязкости, характеризующего анизотропную часть полного давления, со скалярным давлением. Тогда соответствующий критерий принимает вид  $|\pi_{\alpha\beta}| = (nT/\nu) u/L \ll p = nT$ , или  $u \ll \nu L = \langle \omega \rangle L/\lambda$ , где  $L$  — характерный масштаб изменения направленной скорости. Поскольку условия  $\lambda \ll L$ ,  $u \ll \langle \omega \rangle$  являются необходимыми для всего проводимого рассмотрения, это неравенство заведомо выполняется и влияние вязкости на процессы переноса должно быть малым.

#### § 7.4. Амбиполярная диффузия

В предыдущих параграфах были получены выражения, определяющие направленную скорость заряженных частиц под действием электрического поля, градиентов концентрации и температуры. Входящие в эти выражения коэффициенты подвижности и диффузии обратно пропорциональны массе; для электронов они много больше, чем для ионов. Однако в силу условия квазинейтральности независимое движение электронов и ионов в плазме невозможно. Быстрый уход электронов из некоторого элемента объема плазмы неизбежно приведет к возникновению электрического поля, которое будет препятствовать их дальнейшему уходу из рассматриваемого объема и способствовать более быстрому уходу ионов.

Рассмотрим, например, как происходит диффузия заряженных частиц в длинной цилиндрической трубке, полагая, что основным механизмом их устранения является рекомбинация на стенках трубки. Типичное радиальное распределение концентрации заряженных частиц в объеме приведено на рис. 7.2. Диффузия при таком распределении происходит от оси к стенкам (против градиента концентрации). Пусть в некоторый начальный момент условие



квазинейтральности точно выполняется во всем объеме. Тогда в последующий период диффузионный поток электронов много больше ионного (так как  $D_e \gg D_i$ ). В результате стенки будут заряжаться отрицательно, а в объеме будет нарастать избыточный положительный заряд. Разделение зарядов приведет к образованию радиального электрического поля, которое будет увеличивать скорость движения ионов к стенкам и тормозить электроны. Поле должно расти до тех пор, пока не станут одинаковыми потоки электронов и ионов. Пространственный заряд далее изменяться не будет, т. е. установится квазистационарное состояние. Этот режим диффузии называется *амбиполярным*. Для обеспечения отрицательного движения отрицательный потенциал границ плазмы (стенок) должен стать настолько большим, чтобы существенно уменьшить поток электронов. Соответствующая потенциальная энергия должна, очевидно, превышать среднюю тепловую энергию электронов, т. е.  $e(\phi_g - \phi_0) > T_e$ . Пространственный заряд, создающий такую разность потенциалов, обеспечивается стационарной разностью плотностей электронов и ионов ( $\Delta n = n_i - n_e$ ). В плазме величина  $\Delta n$  должна быть достаточно малой ( $\Delta n \ll n$ ) во всем объеме, за исключением пристеночных слоев.

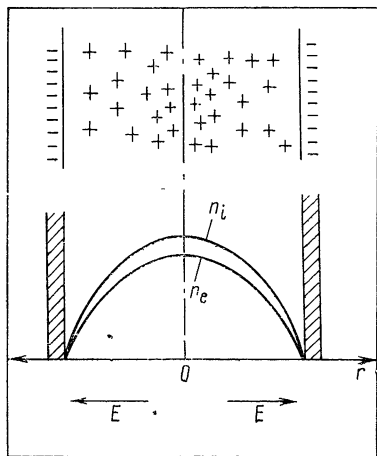


Рис. 7.2

Разумеется, наличие стенок отнюдь не обязательно для формирования амбиполярной диффузии. Разделение зарядов, необходимое для амбиполярного режима, возникает при неоднородности плазмы, вызванной любыми причинами. Опишем теперь количественно амбиполярную диффузию в плазме, содержащей электроны и однозарядные ионы. Условие квазинейтральности для такой плазмы сводится к равенству концентраций электронов и ионов во всем объеме, кроме пристеночных слоев размером порядка дебаевского радиуса,

$$|n_e - n_i| \ll n_e, \quad n_e \approx n_i \approx n. \quad (7.60)$$

Для сохранения квазинейтральности необходимо, чтобы изменение концентрации электронов и ионов в каждом элементе объема было одинаковым, т. е.  $\partial n_e / \partial t = \partial n_i / \partial t$  или в соответствии с уравнениями баланса частиц (6.36)

$$-\text{div}(n_e \mathbf{u}_e) + \delta n_e / \delta t = -\text{div}(n_i \mathbf{u}_i) + \delta n_i / \delta t.$$

Объемные процессы возникновения и устранения частиц (ионизация и рекомбинация) в трехкомпонентной плазме не могут при-

водить к нарушению квазинейтральности — в каждом из них одновременно образуются или исчезают электрон и ион. Соответственно  $\delta n_e/\delta t = n_i/\delta t$ , и условие поддержания квазинейтральности сводится к равенству дивергенций потоков

$$\operatorname{div} (n_e \mathbf{u}_e) = \operatorname{div} (n_i \mathbf{u}_i). \quad (7.61)$$

Это уравнение эквивалентно равенству  $n\mathbf{u}_i = n\mathbf{u}_e + \Gamma_j$ , где  $\operatorname{div} \Gamma_j = 0$ , т. е. поток  $\Gamma_j$  не приводит к изменению концентрации. Он определяет, очевидно, ток в плазме  $\mathbf{j} = ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = e\Gamma_j$ . Можно полагать, что этот ток связан с электрическим полем, создаваемым внешними источниками. В одномерном случае (когда ток  $n\mathbf{u}$  зависит от одной координаты) это очевидно, так как ток может замыкаться только через внешние электроды. Таким образом, в отсутствие внешнего поля, когда ток в плазме также отсутствует и  $\Gamma_j = 0$ , условие (7.61) приводит к равенству направленных скоростей электронов и ионов

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i. \quad (7.62)$$

Направленное движение, определяемое равенством (7.62), и есть амбиполярная диффузия.

При наличии внешнего поля направленная скорость электронов и ионов может быть представлена в виде суммы амбиполярной скорости и токовой скорости, связанной с полем внешних источников  $\mathbf{E}_0$  через коэффициенты подвижности

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_A - b_e \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_A + b_i \mathbf{E}_0. \quad (7.63)$$

При этом условие (7.61) приводит к равенству

$$\operatorname{div} [n(b_e + b_i)\mathbf{E}_0] = 0,$$

которое дает распределение поля  $\mathbf{E}_0$  в плазме.

Определим характеристики амбиполярного движения. Воспользуемся для этого формулами (7.13), (7.14) для направленной скорости. Для случая, когда  $|\operatorname{grad} T/T| \ll |\operatorname{grad} n/n|$  и термодиффузия незначительна, направленная скорость электронов и ионов равна

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_e &= -D_e \operatorname{grad} n/n - b_e \mathbf{E}; \\ \mathbf{u}_i &= -D_i \operatorname{grad} n/n + b_i \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (7.64)$$

Приравнивая эти скорости в соответствии с (7.62), нетрудно найти амбиполярное электрическое поле, автоматически образующееся в плазме для выравнивания потоков разноименно заряженных частиц:

$$\mathbf{E}_A = \frac{D_i - D_e}{b_e + b_i} \frac{\operatorname{grad} n}{n}. \quad (7.65)$$

Учитывая, что  $D_e \gg D_i$  и  $b_e \gg b_i$ , и используя соотношение между  $D_e$  и  $b_e$  (7.12), находим приближенное выражение для  $E_A$ :

$$E_A \approx -\frac{D_e}{b_e} \frac{\text{grad } n}{n} = -\frac{T_e}{e} \frac{\text{grad } n}{n}. \quad (7.66)$$

Электрическое поле направлено в сторону, противоположную направлению градиента концентрации. Поэтому, как и следовало ожидать, оно препятствует диффузионному движению электронов и увеличивает поток ионов. Поскольку  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , из (7.66) получим распределение потенциала в виде

$$\varphi - \varphi_0 = (T_e/e) \ln(n/n_0). \quad (7.67)$$

Эта формула определяет, в частности, разность потенциалов между центральной областью плазмы и ее границами. Как видно, при малой концентрации на границе  $n_g \ll n_0$  эта разность значительно больше  $T_e/e$ . Полученное распределение  $n = n_0 \exp[e(\varphi - \varphi_0)/T_e]$  соответствует формуле Больцмана (4.18). Равновесное больцмановское распределение концентрации в амбиполярном электрическом поле связано с тем, что амбиполярное поле приводит к почти полному отражению потока электронов от стенок (как было показано в § 4.1, отсутствие направленного движения является условием существования равновесного распределения).

Зная напряженность электрического поля, можно определить направленную скорость частиц. Подставляя (7.65) в (7.64), находим скорость совместного (амбиполярного) направленного движения заряженных частиц под действием градиента концентрации:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i = -D_A \text{grad } n/n, \quad (7.68)$$

$$D_A = (D_e b_i + D_i b_e)/(b_e + b_i). \quad (7.69)$$

Формально выражение (7.68) совпадает с выражением для скорости диффузионного потока. Коэффициент  $D_A$  называют *коэффициентом амбиполярной диффузии*. Поскольку  $D_e \gg D_i$ ,  $b_e \gg b_i$ , из (7.69) получаем  $D_A \approx D_i + b_i D_e/b_e$  и, далее, с помощью (7.10) и (7.12)

$$D_A \approx D_i (1 + T_e/T_i) = (T_e + T_i)/\mu_{ia} \nu_{ia}. \quad (7.70)$$

Отсюда следует, что коэффициент амбиполярной диффузии много меньше коэффициента свободной (униполярной) диффузии электронов и больше коэффициента диффузии ионов  $D_i < D_A \ll D_e$ . Таким образом, амбиполярное электрическое поле сильно уменьшает направленную скорость электронов.

При выводе формул амбиполярной направленной скорости полагали, что градиенты температуры отсутствуют. Нетрудно таким же способом, как это было сделано выше, учесть термодиффузию. Приравнявая полные выражения для потоков электронов и ионов, т. е. (7.13) и (7.14), можно найти амбиполярный поток при учете

градиентов температуры. Напряженность электрического поля при этом равна

$$\mathbf{E}_A = - \frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} \frac{\text{grad } n}{n} - \frac{D_e^T}{b_e + b_i} \frac{\text{grad } T_e}{T_e} - \frac{D_i^T}{b_e + b_i} \frac{\text{grad } T_i}{T_i}, \quad (7.71)$$

или, поскольку  $b_i \ll b_e$ ,  $D_i \ll D_e$ :

$$\mathbf{E}_A \approx - \frac{D_e}{b_e} \frac{\text{grad } n}{n} - \frac{D_e^T}{b_e} \frac{\text{grad } T_e}{T_e} \approx - \frac{T_e}{e} \left[ \frac{\text{grad } n}{n} + (1 - g_{T_e}) \frac{\text{grad } T_e}{T_e} \right],$$

где использованы соотношения (7.9), (7.10), (7.20) для  $b_e$ ,  $D_e$ ,  $D_e^T$ .

Выражение для амбиполярной направленной скорости приобретает вид

$$\mathbf{u}_A = - D_A \frac{\text{grad } n}{n} - D_A^T \frac{\text{grad } T_e}{T_e} - D_A^{T_i} \frac{\text{grad } T_i}{T_i}, \quad (7.72)$$

где амбиполярные коэффициенты диффузии и термодиффузии равны

$$\left. \begin{aligned} D_A &= \frac{b_i D_e + b_e D_i}{b_i + b_e} \approx D_i \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right); \\ D_A^T &= D_e^T \frac{b_i}{b_e + b_i} \approx D_i \frac{T_e}{T_i} (1 - g_{T_e}); \\ D_A^{T_i} &= D_i^T \frac{b_e}{b_e + b_i} \approx D_i (1 - g_{T_i}). \end{aligned} \right\} \quad (7.73)$$

Здесь в соответствии с (7.11), (7.20)  $D_i = T_i / \mu_{ia} \nu_{ia}$ ;  $g_{T_e} \approx (T_{aa} / \nu_{aa}) d\nu_{aa} / dT_{aa}$ .

Для условий, когда частоты столкновений не зависят от скорости,  $g_{T_e} = g_{T_i} = 0$ . В этом случае выражения для амбиполярной скорости и амбиполярной напряженности поля могут быть представлены в виде

$$\mathbf{u}_A = - \frac{\text{grad } (D_A n)}{n} = - \frac{\text{grad } [n (T_e + T_i)]}{n \mu_{ia} \nu_{ia}}; \quad \mathbf{E}_A = - \frac{\text{grad } (n T_e)}{en}. \quad (7.74)$$

### § 7.5. Уравнения баланса заряженных частиц и энергий в слабоионизованной плазме

Полученные выражения для направленной скорости и теплового потока заряженных частиц позволяют конкретизировать уравнения баланса частиц и энергий, рассматривавшиеся в гл. 6. При этом использование стационарных значений коэффициентов пере-

носа допустимо, если характерные времена изменения концентрации и температуры заряженных частиц много больше частот столкновений (7.5). Начнем с уравнения баланса частиц (см. гл. 6)

$$\frac{dn}{dt} + \text{div}(nu) = \delta n/\delta t. \quad (7.75)$$

Как было показано в предыдущем параграфе, изменение концентрации определяется амбиполярной компонентой направленной скорости. В общем случае она дается равенством (7.72). Для условий, когда частоты столкновений электронов и ионов с атомами не зависят от скорости, подставляя

$$\frac{dn}{dt} - \Delta(D_A n) = \delta n/\delta t, \quad (7.76)$$

где  $D_A = (T_e + T_i)/\mu_{ia} v_{iu}$ . В это уравнение входят в качестве неизвестных концентрация и температура. Поэтому решать его надо совместно с уравнениями баланса энергии. Обычно, однако, относительные градиенты температуры много меньше относительных градиентов концентрации заряженных частиц. В этом случае направленная скорость определяется равенством (7.68) и уравнение баланса заряженных частиц (7.75) приобретает вид

$$\frac{dn}{dt} - D_A \Delta n = \delta n/\delta t. \quad (7.77)$$

Оно является уравнением в частных производных для концентрации и может решаться независимо от уравнений баланса энергий. Для решения уравнения (7.77) необходимо знать начальное распределение концентраций и граничные условия.

Остановимся на граничных условиях. Чаще всего они определяются уходом заряженных частиц на диэлектрические или металлические стенки, ограничивающие плазму. В прилегающих к стенкам областях можно выделить слои, в которых не выполняются условия квазинейтральности (рис. 7.3). Их толщина ( $\Delta r$ ) порядка дебаевского радиуса, обычно она много меньше длины свободного пробега частиц. Поскольку при амбиполярном уходе стенки заряжаются отрицательно, электрическое поле в слое направлено к стенке. Поток заряженных частиц на стенку определяется, очевидно, их концентрацией вблизи границы слоя  $n_g$ , средней скоростью в направлении слоя  $v_{\alpha g}$  и коэффициентом отражения частиц от слоя  $\eta_\alpha$ :

$$\Gamma_{\alpha g} = (1 - \eta_\alpha) n_g v_{\alpha g}. \quad (7.78)$$

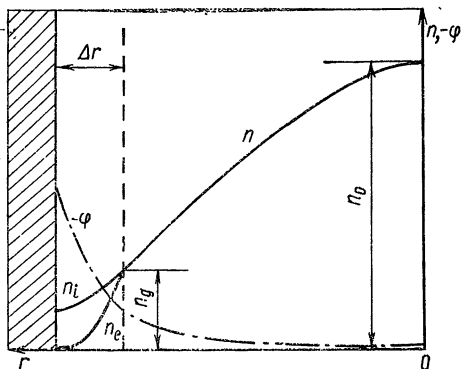


Рис. 7.3

Средняя скорость движения ионов к стенке при  $T_e > T_i$  может превосходить их хаотическую скорость из-за их ускорения в амбиполярном электрическом поле (7.66). На расстояниях нескольких длин свободного пробега от стенки это поле создает разность потенциалов порядка  $T_e/e$ ; соответственно вблизи границы слоя ионы ускоряются до энергии порядка  $T_e$  и их скорость  $v_{ig} \sim \sqrt{T_e/m_i}$ . В электрическом поле слоя ионы двигаются к стенке ускоренно, и, поскольку столкновения в слое несущественны, практически все они достигают стенки. Кроме того, большинство ионов, отразившихся от стенки, возвращаются обратно полем слоя. Поэтому коэффициент отражения ионов от слоя мал  $\eta_i \ll 1$ . Учитывая это, находим оценку для потока ионов на стенку при  $T_e \gtrsim T_i$ :

$$\Gamma_{ig} \approx (1 - \eta_i) n_g v_{ig} \approx n_g \sqrt{T_e/m_i}. \quad (7.79)$$

При оценке потока электронов на стенку следует иметь в виду, что для них средняя хаотическая скорость всегда много больше направленной. Соответственно их средняя скорость в направлении стенки определяется хаотическим движением  $v_{eg} \approx (1/4) \langle \omega_e \rangle \approx \sqrt{T_e/m_e}$  и поток электронов к стенке равен  $\Gamma_{eg} \approx (1 - \eta_e) n_g \sqrt{T_e/m_e}$ . При отсутствии тока на стенку поток электронов должен равняться потоку ионов. Это равенство возможно лишь при коэффициенте отражения электронов  $\eta_e$ , близком к единице  $1 - \eta_e \approx \sqrt{m_e/m_i}$ . Нетрудно определить падение потенциала в слое  $\Delta\phi_l$ , обеспечивающее необходимый коэффициент отражения. Через слой на стенку могут пройти, очевидно, лишь электроны, энергия движения которых в направлении стенки превышает  $e\Delta\phi_l$ . Поток таких электронов на границу слоя равен

$$\Gamma_{eg} = n_g \int_{(2e\Delta\phi_l/m_e)^{1/2}}^{\infty} \omega_x f_{ex}(\omega_x) d\omega_x,$$

где ось  $x$  направлена вдоль нормали к слою. При максвелловском распределении  $f_{ex} = (m_e/2\pi T_e)^{3/2} \exp(-m_e \omega_x^2/2T_e)$  получаем

$$\Gamma_{ed} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n_g \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \exp\left(-\frac{e\Delta\phi_l}{T_e}\right). \quad (7.80)$$

Приравнивая этот поток потоку ионов (7.79), определяем падение потенциала, обеспечивающее амбиполярный уход частиц из плазмы:

$$\Delta\phi_l \approx (T_e/e) \ln \sqrt{m_i/m_e} \approx (4 \div 7) T_e/e. \quad (7.81)$$

Для оценки концентрации заряженных частиц на границе плазмы и слоя (в области квазинейтральности) следует приравнять поток заряженных частиц на границе слоя диффузионному потоку частиц из плазмы. Поток из плазмы можно определить с помощью соотношений для скорости амбиполярной диффузии (7.68)

$\Gamma_{ag} = D_A | \text{grad } n | \approx (T_e / m_i v_{ia}) n_0 / L$ , где  $n_0$  — концентрация заряженных частиц в центральной области плазмы;  $L$  — характерный размер плазмы. Приравнявая этот поток потоку ионов в слой (7.79), получаем соотношение между концентрациями заряженных частиц на границе плазмы и в центре

$$\frac{n_g}{n_0} \approx \frac{1}{L v_{ia}} \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} \approx \frac{\lambda_{ia}}{L} \sqrt{\frac{T_e}{T_i}}. \quad (7.82)$$

В области условий, для которой применимы уравнения переноса, изменение параметров плазмы на длине свободного пробега должно быть малым. Поэтому можно в большинстве случаев считать  $\lambda_{ia} \ll L$ ,  $n_g \ll n_0$  и приближенно полагать граничную концентрацию равной нулю  $n_g = 0$ . Нулевые граничные условия используются обычно при решении диффузионных задач.

Перейдем к уравнениям баланса энергий заряженных частиц, полученным в § 6.4 из уравнений второго момента. Для слабоионизованной плазмы, в которой существенны только столкновения заряженных частиц с нейтральными, уравнения баланса энергий электронов и ионов (6.77) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \text{grad } T_\alpha + \frac{2}{3} T_\alpha \text{div } \mathbf{u}_\alpha + \frac{2}{3} \text{div } \mathbf{q}_\alpha = \\ = -\chi_{\alpha a} v_{\alpha a} (T_\alpha - T_a) + \frac{2}{3} v_{\alpha a} \frac{m_\alpha m_a^2}{(m_\alpha + m_a)^2} u_{\alpha a}^2. \end{aligned} \quad (7.83)$$

В эти уравнения следует подставить полученные выше выражения для направленной скорости  $\mathbf{u}$  и теплового потока  $\mathbf{q}$ . В результате получим нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Совместное решение уравнений баланса энергий для электронов и ионов и уравнения баланса частиц позволяет в принципе определить распределение концентрации, электронной и ионной температуры в объеме плазмы. Разумеется, в общем случае эта задача очень сложна.

Рассмотрим уравнение баланса энергии электронов, полагая, что частоты столкновений электронов и ионов с атомами не зависят от скорости. Как было показано в § 6.4, направленную скорость электронов можно представить в виде суммы амбиполярной скорости (7.74) и токовой скорости, обусловленной внешним полем (7.63):

$$\mathbf{u}_e = -\frac{1}{n} \text{grad } (D_A n) - b_e \mathbf{E}_0,$$

где  $D_A = (T_e + T_i) / \mu_{ia} v_{ia}$ ,  $b_e = e / m_e v_{ea}$ , распределение поля  $\mathbf{E}_0$  должно удовлетворять условию  $\text{div } (n \mathbf{u}_E) = b_e \text{div } (n \mathbf{E}_0) = 0$ . Поток тепла электронов определяется равенством (7.22)

$$\mathbf{q}_e = -\mathcal{K}_e \text{grad } T_e = -\chi_e n \text{grad } T_e,$$

где  $\chi_e = (5/2) T_e/m_e v_{ea} = (5/2) D_e$ . Подставляя эти выражения в уравнение (7.83), учтем, что  $D_A \ll D_e$  и амбиполярный член в выражении для  $\mathbf{u}_a$  обычно много меньше токовой скорости  $D_A/L \ll b_e E_0$ . Пренебрегая соответствующими малыми слагаемыми, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_e}{\partial t} - \frac{5}{3n} \operatorname{div} (D_e n \operatorname{grad} T_e) - \frac{2}{3} D_A \operatorname{div} \left( \frac{\operatorname{grad} n}{n} \right) - \\ - \frac{2}{3} e D_e E_0 \frac{\operatorname{grad} n}{n} - e D_e E_0 \frac{\operatorname{grad} T_e}{T_e} = \\ = -\chi_{ea} v_{ea} (T_e - T_a) + \frac{2}{3} \frac{e^2 E_0^2}{m_e v_{ea}}. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Здесь средний коэффициент передачи энергии при столкновениях  $\chi_{ea}$  и частота столкновений  $v_{ea}$  удовлетворяют равенствам (6.44), (6.76), т. е. включают как упругие, так и неупругие столкновения электронов с атомами. Нелинейное уравнение (7.84) достаточно сложно. Во многих случаях, однако, некоторые из слагаемых в левой части оказываются малыми. Так, в газоразрядной плазме в длинных цилиндрических трубках внешнее поле направлено по оси, а градиенты — по радиусу, поэтому  $E_0 \perp \operatorname{grad} n$ ,  $\operatorname{grad} T_e = 0$ , и два последних члена в левой части (7.84) обращаются в нуль. В случае, если  $\operatorname{grad} T/T$  и  $\operatorname{grad} n/n$  сравнимы, можно пренебречь третьим слагаемым по сравнению со вторым, так как  $D_A \ll D_e$ . Наконец, при достаточно больших отношениях характерных размеров к длинам свободного пробега можно пренебречь всеми слагаемыми в левой части, определяющими перенос энергии. Сопоставляя их с первым слагаемым в правой части, описывающим передачу энергии электронов при столкновениях, получаем условия такого пренебрежения

$$L_T^2; L_T L_n \gg \frac{\lambda_{ea}^2}{\chi_{ea}}; L_n^2 \gg \left( \frac{m_e T_e}{m_i T_i} \right)^{1/2} \frac{\lambda_{ea} \lambda_{ia}}{\chi_{ea}}, \quad (7.85)$$

где  $L_T = (\operatorname{grad} T_e/T_e)^{-1}$ ,  $L_n = (\operatorname{grad} n/n)^{-1}$  — характерные масштабы изменения концентрации и температуры. При выполнении этих условий уравнение (7.84) приобретает наиболее простой вид:

$$\partial T_e / \partial t = -\chi_{ea} v_{ea} (T_e - T_a) + e^2 E_0^2 / m_e v_{ea}. \quad (7.86)$$

Оно дает локальную связь электронной температуры с напряженностью поля, создаваемого внешними источниками.

Для решения уравнения баланса энергий электронов при учете переноса энергии необходимо наряду с граничными условиями для концентрации определить граничные условия для электронной температуры. Для этого надо оценить энергию, переносимую электронами, уходящими из плазмы. Как было показано выше (см. рис. 7.3), в пристеночном слое существует потенциальный барьер для электронов  $e\Delta\phi_i$  (7.81), значительно уменьшающий их поток на стенку и тем самым обеспечивающий амбиполярность



ухода. Электроны, энергия которых меньше  $e\Delta\phi_l$ , отражаются от слоя и возвращаются в плазму без изменения энергии. Электроны с энергией большей  $e\Delta\phi_l$  проходят через слой и уходят на стенки. Часть их энергии (остающуюся после замедления в слое) они уносят на стенки. Оставшаяся часть энергии затрачивается на поддержание падения потенциала в слое, она уносится на стенки ионами, ускоряющимися в слое. Таким образом, поток энергии электронов на границу слоя переносится быстрыми частицами с энергией большей  $e\Delta\phi_l$ . Определим его для максвелловского распределения электронов по скоростям.

Полагая, что ось  $x$  параллельна нормали к слою, находим

$$\begin{aligned} q_{eg} &= n_g \int \omega_x \frac{m_e \omega^2}{2} f_{eg}(\mathbf{w}) d^3 \omega = \\ &= n_g \left( \frac{m}{2\pi T_{eg}} \right)^{3/2} \int_{(2e\Delta\phi_l/m_e)^{1/2}}^{\infty} \omega_x d\omega_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_y d\omega_z \times \\ &\quad \times \frac{m_e \omega^2}{2} \exp(-m_e \omega^2/2T_{eg}), \end{aligned}$$

где величины  $n_g$ ,  $T_{eg}$ ,  $q_{eg}$  определены вблизи границы слоя; интегрирование проводится по скоростям  $\omega_x$ , при которых возможно преодоление барьера ( $m_e \omega_x^2/2 > e\Delta\phi_l$ ), и по всем скоростям  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ . После интегрирования получаем

$$q_{eg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n_g T_{eg}^{3/2}}{m_e^{1/2}} \left( 2 + \frac{e\Delta\phi_l}{T_{eg}} \right) \exp\left(-\frac{e\Delta\phi_l}{T_{eg}}\right). \quad (7.87)$$

Отношение потока тепла к потоку частиц на границе слоя (7.80) равно средней энергии, уносимой из плазмы одним электроном:

$$\epsilon_v = q_{eg}/\Gamma_{eg} = T_{eg} \left( 2 + e\Delta\phi_l/T_{eg} (2 + \ln \sqrt{m_i/m_e}) \right). \quad (7.88)$$

Чтобы определить граничные условия, следует приравнять поток тепла на границу слоя потоку тепла из плазмы. Учитывая соотношения (7.22), (7.68), получаем

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} n_g D_e |\text{grad } T_e| &= T_{eg} \left( 2 + \ln \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right) \Gamma_{eg} \approx \\ &\approx T_{eg} \left( 2 + \ln \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right) D_A |\text{grad } n|. \end{aligned}$$

Из этого равенства найдем отношение градиентов температуры и концентрации на границе

$$\begin{aligned} \left( \frac{\text{grad } T_e}{T_e} \right)_g &\approx \left( 2 + \ln \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right) \frac{D_A}{D_e} \left( \frac{\text{grad } n}{n} \right)_g \approx \\ &\approx \left( 2 + \ln \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right) \frac{m_e \nu_{ea}}{m_i \nu_{ia}} \left( \frac{\text{grad } n}{n} \right)_g. \end{aligned} \quad (7.89)$$

Видно, что вблизи границы ( $\text{grad } T_e/T_e \ll (\text{grad } n/n)$ ), и приближенно можно задавать граничные условия для  $T_e$ , полагая  $(\text{grad } T_e)_g = 0$ . Это условие является следствием существенной разницы между коэффициентами амбиполярной диффузии  $D_A$  и температуропроводности  $\chi_e = (5/2)D_e$ . Поскольку  $D_A \ll \chi_e$ , перенос тепловой энергии электронов из центральной части к периферии плазмы происходит значительно быстрее амбиполярного переноса самих электронов. В то же время перенос энергии на стенки связан с уходом на стенки электронов, поэтому он осуществляется со скоростью, лишь ненамного превышающей скорость амбиполярного переноса частиц. Более быстрый обмен энергией электронов внутри объема плазмы и приводит к выравниванию электронной температуры в объеме.

Уравнение баланса энергии ионов можно получить, подставляя в (7.83) выражения (7.63), (7.74) для направленной скорости и выражения (7.25) для теплового потока. В результате получается еще более сложное уравнение, чем для электронов, так как тепловой поток ионов, вообще говоря, связан с тепловым потоком атомов. Не будем здесь рассматривать это уравнение. Отметим лишь условия, при которых перенос тепла не существует. Они получаются в результате сравнения слагаемых уравнения, пропорциональных градиентам концентрации и температуры, со слагаемым, определяющим передачу энергии ионов нейтральным атомам при столкновениях. Легко убедиться, что эти условия (при  $E_0 \perp \text{grad } n$ ,  $\text{grad } T$ ) сводятся к неравенству

$$L \ll \sqrt{T_e/T_i} \lambda_{in}. \quad (7.90)$$

При его выполнении уравнение баланса энергий ионов принимает вид

$$\partial T_i / \partial t = -(1/2)v_{ia} (T_i - T_a) + (1/6)v_{ia} m_i u_i^2, \quad (7.91)$$

где в соответствии с (7.63)

$$u_i = b_i E_0 - \frac{\text{grad } (D_A n)}{n} = \frac{2}{m_i v_{ia}} \left[ e E_0 - \frac{1}{n} \text{grad } n (T_e + T_i) \right]$$

(здесь учли, что  $m_i = m_a$ ,  $\mu_{ia} = (1/2) m_i$ ).

### § 7.6. Баланс заряженных частиц и энергий в плазме стационарного газового разряда

В качестве примера применения полученных уравнений рассмотрим баланс заряженных частиц и энергий в плазме стационарного газового разряда, поддерживаемого в длинном цилиндрическом баллоне продольным электрическим полем. При длине баллона, много большей его диаметра, можно считать, что параметры плазмы не зависят от продольной координаты, т. е. градиенты перпендикулярны оси. Внешнее электрическое поле в такой плазме долж-

но быть практически однородным. В соответствии с анализом, проведенным в § 7.5, амбиполярный режим ухода заряженных частиц на стенки приводит к тому, что вблизи стенок относительный градиент электронной температуры много меньше относительного градиента концентрации. Поэтому в условиях, когда нагрев электронов одинаков по сечению, электронную температуру в первом приближении также можно считать постоянной. Ионная температура из-за сильного обмена энергией между ионами и атомами обычно много меньше электронной и также мало изменяется по сечению. Распределение концентраций заряженных частиц при таких условиях с достаточной точностью описывается уравнением (7.77). Для стационарного случая, полагая  $\partial n/\partial t = 0$ , получаем

$$D_A \Delta n + \delta n/\delta t = 0. \quad (7.92)$$

Примем во внимание, что в цилиндрически-симметричной плазме концентрация зависит только от радиуса. Тогда

$$D_A \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dn}{dr} \right) + \frac{\delta n}{\delta t} = 0.$$

Столкновительный член уравнения  $\delta n/\delta t$  определяет эффективность процессов ионизации и рекомбинации в объеме. В общем случае он может включать прямую ионизацию при столкновениях электронов с атомами, ступенчатую ионизацию, электрон-ионную рекомбинацию, захват электронов с последующей ион-ионной рекомбинацией. Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда единственным объемным процессом, существенно влияющим на баланс частиц, является прямая ионизация. В этом случае  $\delta n/\delta t = v^i n$  и уравнение принимает вид

$$D_A \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dn}{dr} \right) + v^i n = 0, \quad (7.93)$$

Где  $v^i = \langle n_a s_{ea}^i v \rangle$  — средняя частота ионизации, определяющаяся функцией распределения электронов по энергиям. Для условий, при которых функция распределения электронов не зависит от их концентрации, уравнение (7.93) оказывается линейным. Его частным решением, конечным при  $r = 0$ , является, как известно, функция Бесселя нулевого порядка. Оно может быть записано следующим образом:

$$n = n_0 J_0(r/\Lambda); \quad \Lambda = \sqrt{D_A/v^i}. \quad (7.94)$$

Для того, чтобы концентрация обращалась в нуль на границе (при  $r = a$ ), аргумент бесселевой функции в этой точке должен быть ее корнем. Число корней бесселевой функции бесконечно, однако физический смысл имеет только решение, соответствующее первому корню ( $\zeta = 2,405$ ), так как только оно положительно во всей области  $r < a$ . Учитывая это, находим

$$\Lambda = a/2,405. \quad (7.95)$$

Соотношение (7.95) определяет величину  $\Lambda$  и тем самым распределение концентраций (7.94). Это распределение, называемое *диффузионным*, изображено на рис. 7.4 (кривая 1). Характерную длину  $\Lambda$  называют *диффузионной длиной*. Она определяет соотношение между величинами  $\nu^i$  и  $D_A$ .

В соответствии с (7.94), (7.95) находим

$$\nu^i = D_A/\Lambda^2 = 5,8D_A/a^2. \quad (7.96)$$

Это соотношение есть условие стационарности концентрации — равенства скоростей возникновения заряженных частиц и их диффузионного устранения из объема плазмы. Правую часть (7.96) называют иногда диффузионной частотой устранения  $\nu_D$ , обратную ей величину — временем диффузии  $\tau_D$ :

$$\tau_D = 1/\nu_D = \Lambda^2/D_A. \quad (7.97)$$

При решении уравнения баланса заряженных частиц (7.93) мы полагали, что частота ионизации  $\nu^i$  не зависит от концентрации. Во многих случаях, однако, это несправедливо. При не очень больших концентрациях зависимость  $\nu^i$  от  $n$  может быть обусловлена влиянием электрон-электронных столкновений. Как уже было показано в § 5.6, эти столкновения стремятся «максвеллизировать»

распределение, приводя к увеличению числа быстрых электронов, т. е. к росту частоты ионизации. При больших концентрациях начинает играть существенную роль также ступенчатая ионизация, эффективность которой квадратично зависит от концентрации. При учете зависимости  $\nu^i$  от  $n$  уравнение баланса (7.93) становится нелинейным. Определяемое этим уравнением распределение концентраций обусловлено видом зависимости  $\nu^i$  от  $n$ . На рис. 7.4 (кривая 2) представлено для примера распределение  $n(r)$  в случае  $\nu^i \sim n$ . Получаемое при решении уравнения условие баланса частиц может быть записано в виде, аналогичном (7.96):  $\nu^i(n_0) = D_A/\Lambda^2$ , где  $\nu^i(n_0)$  — частота ионизации при максимальной концентрации электронов. Разумеется, соотношение между диффузионной длиной  $\Lambda$  и радиусом плазмы отличается от (7.85). При  $\nu^i \sim n$ , например,  $\Lambda = a/3,5$ .

Равенство (7.96) позволяет определить электронную температуру. Ее можно найти, если известна зависимость  $\nu^i$  от  $T_e$ . Для максвелловского распределения эта зависимость дается формулой

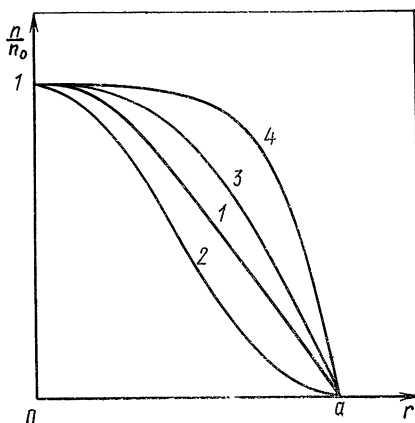


Рис. 7.4

(5.117). Подставляя ее в (7.96), получаем трансцендентное уравнение для  $T_e$ . При  $T_e \ll \mathcal{E}_i$  оно имеет вид

$$2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} n_0 s_0^i \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_i}{T_e}\right) = \frac{T_e}{m_i v_{ia} \Lambda^2}, \quad (7.98)$$

где  $s_0^i$  определено в соответствии с (2.86). Его приближенное решение дает

$$\frac{T_e}{\mathcal{E}_i} = \left[ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\lambda_{ea} \lambda_0^i} \frac{m_i v_{ia}}{m_e v_{ea}}\right) \right]^{-1}$$

(здесь  $\lambda_0^i = 1/n_0 s_0^i$ ).

Решение уравнения баланса частиц (7.93) позволило найти радиальное распределение концентраций, но не дало ее абсолютной величины, т. е.  $n_0$ . В рассматриваемом случае концентрация зависит от продольного тока разряда. Плотность тока связана с внешним полем через подвижность электронов [см. (7.16)]  $\mathbf{j} = enb_e \mathbf{E}_0$ . Соответственно полный ток можно вычислить интегрированием по сечению плазмы  $\mathbf{I} = \int \mathbf{j} dS = 2\pi eb_e E_0 \int_0^a n(r) r dr$ . Подставляя сюда распределение (7.94), находим

$$n_0 = \frac{2,3I}{\pi a^2 eb_e E_0} = \frac{2,3m_e v_{ea}}{\pi a^2 e^2} \frac{I}{E_0}. \quad (7.99)$$

До сих пор мы пренебрегали влиянием объемной рекомбинации. Для случая, когда необходимо учитывать квадратичную рекомбинацию, уравнение баланса частиц (7.92) приобретает вид

$$D_A \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dn}{dr} \right) + v^i n - \alpha n^2 = 0, \quad (7.100)$$

где  $\alpha = \langle s^i v \rangle$  — коэффициент рекомбинации. При преобладающем влиянии рекомбинации, когда  $\alpha n_0 \gg v_D = D_A/\Lambda^2$ , можно пренебрегать в центральной области плазмы влиянием диффузионного члена уравнения. Получающееся тогда условие баланса частиц будет следующим:

$$v^i = \alpha n_0. \quad (7.101)$$

Оно означает, что скорость возникновения заряженных частиц в результате ионизации равна скорости их рекомбинационного устранения. Правую часть (7.101) можно назвать рекомбинационной частотой устранения, обратную ей величину — временем рекомбинации

$$\tau_r = 1/v_r = 1/\alpha n_0. \quad (7.102)$$

Поскольку  $v^i$  и  $\alpha$  зависят от  $T_e$ , равенство (7.101) определяет электронную температуру в зависимости от концентрации в центре. Оно нарушается лишь вблизи границ плазмы, где существенно

диффузионное устранение частиц. Нетрудно оценить ширину области ( $b$ ), в которой существенна диффузия, сопоставляя первый и последний члены уравнения (7.100). Полагая в этой области  $dn/dr \sim n/b$ , получаем

$$D_A/b^2 \approx \alpha n_0, \quad b \approx \sqrt{D_A/\alpha n_0} \ll \Lambda.$$

В этом случае радиальное распределение концентраций является плоским в центральной области и имеет резкие градиенты вблизи границ (см. рис. 7.4, кривые: 3 —  $\alpha n_0 = 2D_A/\Lambda^2$ , 4 —  $\alpha n_0 = 3D_A/\Lambda^2$ ). По мере роста отношения коэффициента диффузии к коэффициенту рекомбинации и соответственно  $v_D/v_r$ , градиенты концентрации на границах плазмы делаются более пологими и при  $v_D > v_r$  распределение концентраций приближается к диффузионному распределению (7.94). Количественно этот переход можно проследить с помощью уравнения (7.100).

Перейдем теперь к балансу энергий электронов. Уравнение баланса (7.84) в рассматриваемом случае ( $E \perp \text{grad } n$ ;  $\text{grad } T = 0$ ,  $\partial T/\partial t = 0$ ) приобретает вид

$$\begin{aligned} & -\text{div}(\kappa_e \text{grad } T_e) - D_A n T_e \text{div}(\text{grad } n/n) = \\ & = -(3/2)n\kappa_{ea}v_{ea}(T_e - T_a) + ne^2E_0^2/m_e v_{ea}. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Это уравнение при заданном распределении концентрации представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение для электронной температуры. Как отмечалось выше, относительный градиент электронной температуры обычно можно считать много меньшим относительного градиента концентрации. Считая также, что условия (7.85) выполняются, пренебрежем в первом приближении слагаемыми в левой части. Уравнение баланса энергии сводится тогда к равенству средней энергии, приобретаемой электронами в продольном электрическом поле и энергии, теряемой ими при упругих и неупругих столкновениях (ср. § 5.4, 5.6):

$$ne^2E_0^2/m_e v_{ea} = (3/2)n\kappa_{ea}v_{ea}(T_e - T_a).$$

Отсюда найдем связь между напряженностью внешнего электрического поля и электронной температурой

$$E_0^2 = \frac{3}{2} \frac{m_e}{e^2} \kappa_{ea} v_{ea}^2 (T_e - T_a). \quad (7.104)$$

Заметим, что эта связь определяется не только множителем  $(T_e - T_a)$ ; средний коэффициент передачи энергии  $\kappa_{ea}$  и средняя частота столкновений  $v_{ea}$  также могут зависеть от электронной температуры.

Более точное условие баланса средних энергий может быть получено из уравнения (7.103). Чтобы получить его, надо проинтегрировать уравнение по поперечному сечению плазмы. При этом во всех слагаемых, кроме первого, можно по-прежнему считать электронную температуру не зависящей от радиуса. Выполним интегрирование, полагая радиальное распределение концентраций диф-

фузионным (7.94). Интеграл от первого слагаемого найдем с помощью граничного условия (7.88)

$$J_1 = \int \operatorname{div} \mathbf{q}_e dS = 2\pi a q_{eg} = 2\pi a T_e \left( 2 + \ln \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right) \Gamma_g$$

и, далее, поскольку поток частиц на границе  $\Gamma_g$  определяется их диффузией  $2\pi a \Gamma_g = (D_A/\Lambda^2) \int n dS$ , получим

$$J_1 = \frac{D_A}{\Lambda^2} \bar{n} T_e \pi a^2 \left( 2 + \ln \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right)$$

$\bar{n} = \frac{1}{\pi a^2} \int n dS$  — средняя по сечению концентрация).

Интеграл от второго слагаемого преобразуется к виду

$$\begin{aligned} J_2 &= D_A T_e \int \operatorname{div} \left( \frac{\operatorname{grad} n}{n} \right) dS = D_A T_e \int \left[ \Delta n - \frac{(\operatorname{grad} n)^2}{n} \right] dS = \\ &= -\frac{D_A T_e}{\Lambda^2} \bar{n} \pi a^2 - D_A T_e 2\pi \int_0^a \frac{1}{n} \left( \frac{dn}{dr} \right)^2 r dr. \end{aligned}$$

При вычислении интеграла, входящего во второй член, учтем, что он логарифмически возрастает при  $r \rightarrow a$ , когда  $n \rightarrow 0$ . Поэтому приближенно можно записать

$$2\pi \int_0^a \frac{1}{n} \left( \frac{dn}{dr} \right)^2 r dr \approx 2\pi a \left( \frac{dn}{dr} \right)_{r=a} \ln \frac{n_0}{n_g} = \frac{\pi a^2 \langle n \rangle}{\Lambda^2} \ln \frac{n_0}{n_g}.$$

Более аккуратное вычисление, при котором используется распределение (7.94), приводит к результату

$$J_2 = -(D_A/\Lambda^2) \langle n \rangle \pi a^2 T_e (s + \ln(n_0/n_g)).$$

В интегралы от третьего и четвертого слагаемых войдет величина  $\int n dF = \pi a^2 \langle n \rangle$ .

Собирая все четыре слагаемых, получим условие баланса средних энергий в виде

$$\frac{e^2 E_0^2}{m_e \nu_{ea}} = \kappa_{ea} \nu_{ea} (T_e - T_a) + \frac{D_A}{\Lambda^2} T_e \left( 3 + \ln \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} + \ln \frac{n_0}{n_g} \right). \quad (7.105)$$

Это равенство отличается от (7.104) вторым слагаемым, учитывающим потери энергии, связанные с уходом частиц на стенки. Поскольку множитель  $D_A/\Lambda^2 = \nu_D$  определяет обратное время диффузии, средние потери энергии, приходящиеся на один покидающий плазму электрон, равны

$$\mathcal{E} = 3T_e + T_e \ln(n_0/n_g) + T_e \ln \sqrt{m_i/m_e}. \quad (7.106)$$

Эта сумма включает, во-первых, энергию, непосредственно уносимую электронами на стенки; как было показано в § 7.5, средняя величина этой энергии при максвелловском распределении составляет  $2T_e$ . Во-вторых, она включает энергию, затрачиваемую на поддержание амбиполярного поля в плазме. Эта энергия приблизительно равна  $e(\varphi_g - \varphi_0) = T_e \ln(n_0/n_g)$ , где  $\varphi_g - \varphi_0$  — амбиполярная разность потенциалов (7.67); она уходит на ускорение ионов при их движении к границам. Наконец, в сумму (7.106) входит энергия, затрачиваемая на поддержание пристеночной разности потенциалов  $\Delta\varphi_e = (T_e/e) \ln \sqrt{m_i/m_e}$  (7.81). Как отмечалось выше (см. с. 200), эта энергия уходит на ускорение ионов и уносится ими на стенку.

Определим теперь ионную температуру, полагая, что удовлетворяется условие (7.90) и перенос энергии ионами не существен. Используя уравнение баланса энергий (7.91) для стационарной плазмы, получаем

$$T_i - T_a = \frac{m_i}{3} b_i^2 E_0^2 + \frac{1}{3} m_i \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial (DA n)}{\partial r} \right]^2$$

и при не зависящей от скорости частоте столкновений ионов

$$\begin{aligned} T_i - T_a &= \frac{4}{3} \frac{e^2 E_0^2}{m_i v_{ia}^2} + \frac{4}{3} \frac{T_e^2}{m_i v_{ia}^2} \left( \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right)^2 = \\ &= \frac{4}{3} \frac{e^2}{m_i v_{ia}^2} (E_0^2 + E_A^2), \end{aligned} \quad (7.107)$$

где  $E_A = (T_e/en) dn/dr$  — амбиполярное поле (7.66).

Ионная температура определяется балансом между энергией, получаемой ионами в электрическом поле, и энергией, передаваемой ими нейтральным атомам при упругих столкновениях. Выражение (7.107) показывает, что нагрев ионов осуществляется как внешним полем  $E_0$ , так и амбиполярным полем  $E_A$ . Нетрудно с помощью равенства (7.104) оценить соотношение между этими полями

$$\frac{E_A}{E_0} \approx \frac{T_e}{eE_0} \left| \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right| \approx \frac{\lambda_{ia}}{\sqrt{\kappa_{ia}}} \left| \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{\kappa_{ia}}} \frac{\lambda_{ia}}{\Lambda} \frac{n_0}{n}.$$

Оценка показывает, что при не очень малой величине  $\lambda_{ia}$  амбиполярное поле может быть сравнимо с продольным. В этом случае ионная температура должна нарастать от центральной области к границам плазмы, так как амбиполярное поле  $E_A \sim 1/n$  нарастает к границам.

Нетрудно убедиться, что нагрев ионов, определяемый формулой (7.107), значительно меньше нагрева электронов. Сравняя (7.107) и (7.104), получаем

$$\frac{T_i - T_a}{T_e - T_a} \approx \frac{\kappa_{ea} m_e v_{ea}^2}{m_i v_{ia}^2} \approx \kappa_{ea} \frac{\lambda_{ia}^2}{\lambda_{ea}^2}.$$



Различие в нагреве обусловлено, в первую очередь, разницей в передаче энергии при столкновениях — доля энергии, передаваемая электронами ( $\kappa_{ea} \ll 1$ ), всегда много меньше потерь энергии ионами ( $\kappa_{ia} \approx 1/2$ ).

Таким образом, уравнения баланса частиц и энергий позволяют установить основные характеристики газоразрядной плазмы. Для случая, когда основным процессом ионизации является прямая ионизация атомов электронами, основной процесс устранения заряженных частиц — амбиполярная диффузия, и процессы переноса слабо влияют на баланс энергий частиц, мы получили выражения, определяющие эти характеристики: распределение концентрации  $n(r)$  (7.94) найдено в результате решения уравнения баланса частиц, величина концентрации  $n_0$  определяется током разряда (7.99), электронная температура  $T_e$  — условием баланса частиц (7.96), напряженность поля в разряде  $E_0$  получается из баланса энергий электронов (7.104), ионная температура  $T_i$  — из баланса энергий ионов (7.107).

### § 7.7. Ионизационная неустойчивость

Рассмотренный в § 7.6 баланс заряженных частиц плазмы стационарного газового разряда может оказаться неустойчивым. Неустойчивость ионизационного баланса вызывается зависимостью частоты ионизации от концентрации электронов. Как отмечалось, такая зависимость может быть связана с влиянием электрон-электронных столкновений на функцию распределения и со ступенчатой ионизацией. При существенном влиянии этих процессов случайное увеличение концентрации электронов на некотором участке плазменного столба может привести к локальному росту частоты ионизации и к дальнейшему росту концентрации. В результате оно будет экспоненциально нарастать со временем. Такое нарастание малого возмущения свидетельствует о неустойчивости ионизационного равновесия по отношению к возмущению.

Рассмотрим условия возникновения *ионизационной неустойчивости*. Для этого воспользуемся уравнением баланса частиц [см. 7.77]

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_A \Delta n = \nu^i n. \quad (7.108)$$

Предположим, что в плазме возникает малое возмущение концентрации, гармонически зависящее от продольной координаты. При наличии такого возмущения распределение концентраций может быть представлено в виде

$$n(r, z, t) = n^{(0)}(r) + n^{(1)}(r, z, t) = n_0(r) + \text{Re} [n_k^{(1)}(r, t) \exp(-ikz)], \quad (7.109)$$

где  $n^{(0)}(r)$  — невозмущенная концентрация;  $\text{Re} [n_k^{(1)} \exp(-ikz)]$  — возмущение концентрации, записанное для упрощения анализа

в комплексной форме; величина  $k$  определяет продольный масштаб или длину волны возмущения  $\lambda_n = 2\pi/k$ . Возмущение концентрации приводит к изменению распределения напряженности электрического поля и к неоднородности нагрева электронов. Соответственно появляется и возмущение электронной температуры. Поскольку, однако, электронная теплопроводность плазмы велика, это возмущение в определенной области условий мало. Пока не будем его учитывать.

Подставляя концентрацию (7.109) в уравнение баланса (7.108) и полагая радиальные распределения стационарной концентрации и возмущения одинаковыми, получаем следующее уравнение для возмущения концентрации:

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} + k^2 D_A n^{(1)} = n^{(0)} (v_*^i - v^i), \quad (7.110)$$

где  $v_*^i$  — средняя частота ионизации при наличии возмущения,  $v^i$  — в его отсутствие. Полагая возмущение малым и ограничиваясь первым членом разложения  $v_*^i$  по его степеням, получаем

$$v_*^i - v^i \approx \frac{\partial v^i}{\partial n} n^{(1)}.$$

Уравнение для возмущения принимает тогда вид

$$\partial n^{(1)}/\partial t = (n \partial v^i / \partial n - k^2 D_A) n^{(1)}. \quad (7.111)$$

Его решение при положительном коэффициенте в правой части дает экспоненциальное нарастание возмущения

$$n^{(1)} = n_0^{(1)} \exp(\gamma t); \quad \gamma = n \frac{\partial v^i}{\partial n} - k^2 D_A. \quad (7.112)$$

Величину  $\gamma$  называют *инкрементом неустойчивости*. Таким образом, критерий существования неустойчивости в рассматриваемой модели сводится к неравенству

$$n \partial v^i / \partial n > k^2 D_A. \quad (7.113)$$

При обратном неравенстве показатель экспоненты оказывается отрицательным. Это означает, что случайно возникающее возмущение убывает со временем, т. е. плазма устойчива по отношению к возмущению.

Нетрудно понять физический смысл неравенства (7.113). Его левая часть описывает увеличение частоты ионизации, нарушающее ионизационное равновесие при наличии возмущения, правая часть определяет скорость диффузионного распыливания возмущения ( $v_D \sim \frac{D_A}{\lambda_k^2} \sim D_A k^2$ ). Поэтому неравенство (7.113) означает, что скорость ионизационного нарастания возмущения превышает скорость его диффузионного распыливания. Критерий (7.113) ограничивает масштаб возмущения снизу. Учитывая стационарную связь меж-

ду коэффициентом амбиполярной диффузии и частотой ионизации (7.96), приведем этот критерий к виду

$$k^2 \Lambda^2 < (n/v^i) \partial v^i / \partial n. \quad (7.114)$$

Поскольку правая часть выражения (7.114) имеет порядок единицы, оно показывает, что неустойчивость может возникать лишь при длинах волн возмущения ( $\lambda_z = 2\pi/k$ ), больших радиуса плазменного столба ( $a = \Lambda/2,4$ ).

Рассмотрим теперь влияние возмущения электронной температуры на условия развития неустойчивости. Это влияние может быть значительным даже при относительно малых величинах возмущения (при  $T^{(1)}/T \ll n^{(1)}/n$ ), поскольку зависимость частоты ионизации от электронной температуры обычно много сильнее, чем ее зависимость от концентрации. Возмущение электронной температуры связано с продольным электрическим полем, определяющим нагрев электронов. Продольное поле в соответствии с (7.63), складывается из двух компонент: токовой  $E_j$  и амбиполярной  $E_A$ . Токовое поле дается условием постоянства продольного тока по длине

$$j_z = en b_e E_j. \quad (7.115)$$

Полагая для простоты частоту столкновений электронов и соответственно их подвижность  $b_e = e/m_e \nu_{ea}$  не зависящими от температуры, получаем

$$n E_j = (n^{(0)} + n^{(1)}) (E_0 + E_j^{(1)}),$$

где поле  $E_j$  представлено в виде суммы невозмущенной составляющей  $E_0$  и возмущения  $E_j^{(1)}$ . Считая возмущения малыми  $n^{(1)} \ll n^{(0)}$ ,  $E_j^{(1)} \ll E_0$ , находим связь возмущений поля  $E_j$  и концентрации  $n_1$ :

$$E_j^{(1)} = -(n^{(1)}/n^{(0)}) E_0, \quad (7.116)$$

характеризующую распределение  $E_j^{(1)}$  по длине.

Как видно, возмущение поля  $E_j^{(1)}$  находится в противофазе с возмущением концентрации — увеличение концентрации приводит к уменьшению поля (рис. 7.5). Амбиполярная компонента продольного электрического поля дается формулой (7.66);  $E_A = - (T_e/en) \partial n / \partial z$ . Подставляя в нее (7.109), получаем

$$E_A^{(1)} = ik (T_e/en) n^{(1)}. \quad (7.117)$$

Продольное распределение  $E_A^{(1)}(z)$  оказывается сдвинутым по фазе относительно распределения концентрации  $n^{(1)}(z)$  на четверть длины волны — поле максимально в области, в которой максимален градиент концентрации (см. рис. 7.5). Полученные соотношения определяют мощность нагрева электронного газа при учете возмущений поля. В соответствии с ним мощность, выделяющаяся в единице объема

$$P_E = j_z E_z \approx en b_e E_0 (E_0 + E_j^{(1)} + E_A^{(1)}) = -en b_e E_0^2 - en^{(1)} b_e E_0^2 + ik b_e T_e E_0 n^{(1)}, \quad (7.118)$$

где учтено постоянство продольного тока (7.115). Первое слагаемое этой формулы описывает продольно-однородный нагрев при отсутствии возмущений, второе и третье — изменение нагрева, связанное с возмущением концентрации. Возникающие при этом возмущения электронной температуры можно найти с помощью уравнения баланса энергии (7.84), которое приближенно запишем в виде

$$\frac{3}{2} n \frac{\partial T_e}{\partial t} - \text{div} (\mathcal{K}_e \text{grad } T_e) = P_E - \frac{3}{2} \kappa_{ea} v_{ea} n T_e, \quad (7.119)$$

где при  $v_{ea} = \text{const}$   $\mathcal{K}_e = (5/2)(T_e n / m_e v_{ea})$ . В отсутствие возмущений левая часть уравнения обращается в нуль и условие баланса энергий сводится к равенству

$$P_{E_0} = e n_0 b_e E_0^2 = (3/2) \kappa_{ea} v_{ea} n T_e.$$

Оно дает связь напряженности продольного поля с температурой (7.104)

$$e E_0 = \left( \frac{3}{2} \kappa_{ea} m_e v_{ea}^2 T_e \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{T_e}{\lambda_{Te}}}, \quad (7.120)$$

где  $\lambda_{Te} = (T_e / \kappa_{ea} m_e v_{ea}^2)^{1/2} \approx \lambda_e / \sqrt{\kappa_{ea}}$  — длина тепловой релаксации, т. е. длина, на которой происходит обмен энергией между электронами и атомами.

Возмущение температуры следует искать в виде, аналогичном (7.109):

$$T^{(1)}(z, t) = \text{Re} [T_k^{(1)}(t) \exp(-ikz)].$$

Подставив его в уравнение (7.119), учтем, что в связи с большой теплопроводностью электронного газа первый член, описывающий изменение возмущения  $T^{(1)}$  со временем, обычно много меньше второго  $n \left| \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} \right| \ll \mathcal{K}_e k^2 |T^{(1)}|$  и относительное возмущение темпе -

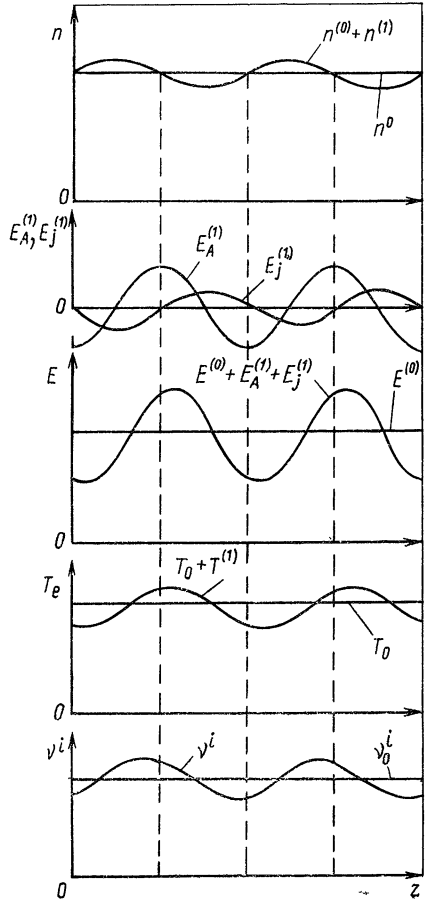


Рис. 7.5

ратуры много меньше относительного возмущения концентрации  $\left| \frac{T_e^{(1)}}{T_e} \right| \ll \left| \frac{n^{(1)}}{n} \right|$  \*. Пренебрегая соответствующими малыми слагаемыми, получаем

$$k^2 \mathcal{K}_e n T_e^{(1)} = P_E^{(1)} - \frac{3}{2} \kappa_{e0} \nu_{e0} T_{e0} n^{(1)}. \quad (7.121)$$

Используя соотношение (7.118) для  $P_E$  и учитывая (7.120), находим связь возмущений температуры и концентрации

$$\begin{aligned} \frac{T_e^{(1)}}{T_{e0}} &= - \left( \frac{4}{5} \frac{e^2 E_0^2}{k^2 T_e^2} - i \frac{e E_0}{k T_e} \right) \frac{n_k^{(1)}}{n} = \\ &= - \left[ \frac{6}{5} \frac{1}{(k^2 \lambda_{Te}^2)} - \frac{\sqrt{6}}{5} \frac{i}{k \lambda_{Te}} \right] \frac{n_k^{(1)}}{n}, \end{aligned} \quad (7.122)$$

где учтено, что при  $\nu_{ea} = \text{const}$   $\mathcal{K}_e/b_e = (5/2)(n T_e/e)$ .

Возмущение электронной температуры, как и возмущение концентрации приводит к изменению частоты ионизации. Учитывая оба возмущения, получаем

$$\nu_*^i - \nu^i = \frac{\partial \nu}{\partial n} n^{(1)} + \frac{\partial \nu}{\partial T_e} T_e^{(1)},$$

где  $T_e^{(1)}$  удовлетворяет равенству (7.122). Подставляя эту разность в уравнение баланса частиц (7.110), приводим его к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k^{(1)}}{\partial t} &= i \frac{\sqrt{6}}{5} \frac{T_e}{k \lambda_{Te}} \frac{\partial \nu^i}{\partial T_e} n_k^{(1)} + \left( n \frac{\partial \nu^i}{\partial n} - D_A k^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{6}{5} \frac{T_e}{k^2 \lambda_{Te}^2} \frac{\partial \nu^i}{\partial T_e} \right) n_k^{(1)}. \end{aligned} \quad (7.123)$$

Решение уравнения дает зависимость  $n_k^{(1)}$  от времени

$$n_k^{(1)} = n_0^{(1)} \exp(i\omega t) \exp(\gamma t), \quad (7.124)$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\sqrt{6}}{5} \frac{T_e}{k \lambda_{Te}} \frac{\partial \nu^i}{\partial T_e}; \\ \gamma &= n \frac{\partial \nu^i}{\partial n} - D_A k^2 - \frac{6}{5} \frac{T_e}{k \lambda_{Te}^2} \frac{\partial \nu^i}{\partial T_e}. \end{aligned}$$

Соответственно получаем

$$n^{(1)} = \text{Re} [n_k^{(1)} \exp(-ikz)] = n_{10} \exp(\gamma t) \cos(\omega t - kz). \quad (7.125)$$

Из этой формулы видно, что возмущение концентрации (как и связанные с ним возмущения температуры поля) представляет со-

\* Как следует из (7.122), условия малости  $|T^{(1)}/T|$  сводятся к неравенству  $k \gg eE_0/T_e = 1/\lambda_{Te}$ .

бой волну частоты  $\omega$ , распространяющуюся в направлении оси  $z$ . Нетрудно понять механизм ее распространения. Как отмечалось, амбиполярное электрическое поле, пропорциональное  $\text{grad}n$ , сдвинуто по фазе относительно возмущения концентрации на четверть длины волны (см. рис. 7.5). Нагрев электронов и частота ионизации растут с увеличением электрической силы  $eE$ . Соответственно концентрация нарастает в области, где  $eE > eE_0$ , и частота ионизации больше частоты диффузии  $\nu^i > \nu_D$ , и убывает в области, в которой  $eE < eE_0$  и  $\nu^i < \nu_D$ . Поскольку области максимального и минимального поля в каждый данный момент смещены относительно максимумов и минимумов концентрации, изменение концентрации в них приводит к перемещению максимумов и минимумов, т. е. к распределению волны ионизации (см. рис. 7.5).

Формула для инкремента нарастания неустойчивости  $\gamma$  (7.124) при учете возмущения температуры отличается от (7.112) наличием дополнительного слагаемого, уменьшающего инкремент. Оно связано с возмущением токового электрического поля  $E_j$  (7.116). Поскольку это возмущение находится в противофазе с возмущением концентрации, оно приводит к уменьшению температуры электронов и частоты ионизации в области максимумов концентрации и к увеличению их в области минимумов концентрации. Такие изменения приводят к уменьшению исходного возмущения. Эффект этот тем больше, чем больше длина волны возмущения, так как с уменьшением длины волны электронная теплопроводность уменьшает возмущение температуры [как видно из (7.124), последний член пропорционален  $1/k^2$ ].

Анализ выражения для  $\gamma$  позволяет определить условия раскачки ионизационной неустойчивости. Так как диффузионное слагаемое в  $\gamma$  пропорционально  $k^2$ , а температурное слагаемое обратно пропорционально  $k^2$ , максимум  $\gamma$  получается при таком  $k$ , при котором эти слагаемые равны:

$$k_0^2 \approx \left( \frac{6}{5} \frac{T_e}{D_A \lambda_{Te}^2} \frac{\partial \nu^i}{\partial T_e} \right)^{1/2} = \frac{1}{\Lambda \lambda_{Te}} \left( \frac{6}{5} \frac{T_e}{\nu^i} \frac{\partial \nu^i}{\partial T_e} \right)^{1/2}. \quad (7.126)$$

Величина  $\gamma$  при этом положительна, если  $n \partial \nu^i / \partial n > 2 D_A k_0^2 = 2 \nu^i \Lambda^2 k_0^2$ , или

$$\Lambda < \frac{1}{2} \lambda_{Te} \left( \frac{n}{\nu^i} \frac{\partial \nu^i}{\partial n} \right) \left( \frac{6}{5} \frac{T_e}{\nu^i} \frac{\partial \nu^i}{\partial T_e} \right)^{-1/2}. \quad (7.127)$$

Неравенство (7.127) показывает, что раскачка неустойчивости возможна лишь при достаточно малом радиусе плазмы

$$a \lesssim \lambda_{Te} = (T_e / \kappa_{ea} m_e \nu_{ea}^2)^{1/2}.$$

В случае, когда неравенство (7.127) выполняется с большим запасом, имеется широкая область значений  $k$ , в пределах которой возможна раскачка ионизационной неустойчивости. Со стороны больших  $k$  эта область ограничена неравенством (7.114), учитывающим

влияние диффузионного расплывания возмущения. Со стороны малых  $k$  она ограничена влиянием температурного возмущения. В соответствии с (7.124)

$$n \frac{\partial v^i}{\partial n} > \frac{T_e}{k^2 \lambda_{Te}^2} \frac{\partial v^i}{\partial T_e}, \quad (7.128)$$

или

$$k^2 \lambda_{Te}^2 > \left( \frac{T_e}{v^i} \frac{\partial v^i}{\partial T_e} \right) \left( \frac{n}{v^i} \frac{\partial v^i}{\partial n} \right)^{-1}.$$

Максимальное значение инкремента определяется при этом первым слагаемым в выражении для  $\gamma$  [см. (7.124)]:

$$\gamma_{\text{макс}} \approx n \partial v^i / \partial n. \quad (7.129)$$

Проведенный анализ позволяет определить условия устойчивости ионизационного баланса газоразрядной плазмы по отношению к малым возмущениям. Он основан на линеаризации уравнений баланса, справедливой, пока возмущения параметров плазмы много меньше их стационарных значений. В области параметров, в которой ионизационное равновесие неустойчиво, нарастание возмущений может привести к новому стационарному состоянию, характеризующемуся значительным изменением параметров плазмы. При рассмотрении таких изменений упрощения, связанные с линеаризацией уравнений недопустимы и необходим значительно более сложный нелинейный анализ. Не останавливаясь на нем, отметим лишь, что развитие ионизационной неустойчивости может привести к сильной продольной модуляции основных параметров газоразрядной плазмы. В результате в плазменном столбе образуются стоячие или бегущие нелинейные волны, которые называют стратами.

## § 7.8. Распад плазмы

Рассмотрим теперь с помощью уравнений баланса процесс распада (деионизации) плазмы, созданной в длинном цилиндрическом баллоне под действием внешнего электрического поля или каких-либо других источников ионизации. После их отключения температура заряженных частиц уменьшается, так как потери энергии не компенсируются внешними источниками. С уменьшением температуры резко падает эффективность ионизации, и в результате процессов диффузии и рекомбинации начинает уменьшаться концентрация заряженных частиц (рис. 7.6). Плазму на этой стадии называют *распадающейся*.

Для определения характеристик распада воспользуемся уравнениями баланса частиц и энергий. Как и в предыдущем параграфе, будем считать, что основным механизмом устранения заряженных частиц является амбиполярная диффузия, а процессы переноса энергии электронами и ионами несущественны (т. е. справедли-

вы неравенства (7.85), (7.90). Уравнения баланса (7.77), (7.86), (7.91) примут тогда вид

$$\left. \begin{aligned} \partial n / \partial t - D_A \Delta n &= 0; \\ \partial T_e / \partial t &= -\kappa_{ea} \nu_{ea} (T_e - T_a); \\ \partial T_i / \partial t &= -\frac{1}{2} \nu_{ia} (T_i - T_a). \end{aligned} \right\} \quad (7.130)$$

В первом из них опустили член  $\nu^i n$ , полагая, что  $\nu^i \ll D_A / \Lambda^2$ , т. е. что при распаде ионизация практически не оказывает влияния на баланс частиц. При не зависящих от скорости частотах столкновений  $\nu_{ea}$ ,  $\nu_{ia}$  и коэффициенты  $\kappa_{ea}$  решения уравнений баланса энергий можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} T_e &= T_a + (T_{e0} - T_a) \exp(-\kappa_{ea} \nu_{ea} t); \\ T_i &= T_a + (T_{i0} - T_a) \exp\left(-\frac{1}{2} \nu_{ia} t\right), \end{aligned} \right\} \quad (7.131)$$

где  $T_{e0}$ ,  $T_{i0}$  — температуры электронов и ионов при  $t = 0$ .

Из формул (7.131) видно, что температуры электронов и ионов после отключения внешних источников энергии изменяются экспоненциально. В результате столкновений с нейтральными атомами их температуры в процессе распада приближаются (релаксируют) к температуре нейтрального газа. Постоянные времени спада температуры равны

$$\tau_{T_e} = 1 / \kappa_{ea} \nu_{ea}; \quad \tau_{T_i} = 2 / \nu_{ia}. \quad (7.132)$$

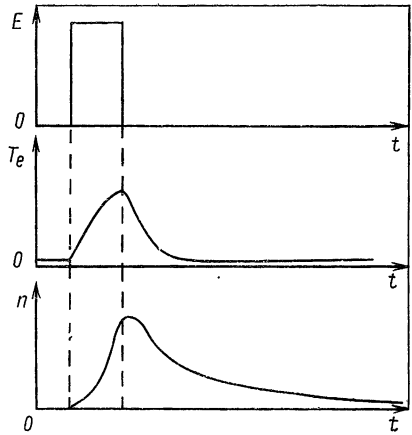


Рис. 7.6

Время релаксации электронной температуры много больше времени релаксации температуры ионов ( $\tau_{T_e} \gg \tau_{T_i}$ ). Это различие связано с малой эффективностью передачи энергии электронов при столкновениях с атомами ( $\kappa_{ea} \ll 1$ , в то время как  $\kappa_{ia} = 1/2$ ).

В случае, когда величины  $\nu_{ea}$ ,  $\nu_{ia}$ ,  $\kappa_{ea}$  зависят от температур, закон релаксации, разумеется, отличается от экспоненциального. Для электронов, например, при  $\kappa_{ea} \nu_{ea} \sim T_e^s$  и  $T_e \gg T_a$  уравнение баланса энергий принимает вид

$$\partial T_e / \partial t = -(\kappa_{ea} \nu_{ea})_0 (T_e / T_{e0})^s T_e.$$

Его решение приводит к следующей зависимости  $T_e(t)$ :

$$T_e = T_{e0} [1 + s (\kappa_{ea} \nu_{ea})_0 t]^{1/s}, \quad (7.133)$$

где  $(\kappa_{ea} \nu_{ea})_0$  — значение  $\kappa_{ea} \nu_{ea}$  при  $t = 0$ .



Перейдем теперь к решению уравнения баланса частиц. Для цилиндрически-симметричной плазмы оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} - D_A(t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial n(r,t)}{\partial r} \right] = 0, \quad (7.134)$$

где коэффициент диффузии  $D_A = 2(T_e + T_i)/m_i v_{ia}$ , вообще говоря, является функцией времени.

Это линейное дифференциальное уравнение в частных производных называют иногда уравнением диффузии. Его решение хорошо известно. Частное решение уравнения имеет вид

$$g(r,t) = \exp \left[ -\frac{\zeta^2}{a^2} \int_0^t D_A(t) dt \right] J_0 \left( \zeta \frac{r}{a} \right).$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям, т. е. обращается в нуль при  $r = a$ , если  $\zeta$  является корнем бесселевой функции  $J_0(\zeta) = 0$ . Поскольку число таких корней бесконечно, получается бесконечное число независимых решений. Общее решение можно представить в виде их линейной комбинации

$$n(r,t) = \sum_k C_k \exp \left[ -\frac{\zeta_k^2}{a^2} \int_0^t D_A dt \right] J_0 \left( \zeta_k \frac{r}{a} \right). \quad (7.135)$$

Постоянные коэффициенты  $C_k$  определяются начальным распределением концентраций

$$C_k = \int_0^a n(r,0) J_0 \left( \zeta_k \frac{r}{a} \right) r dr.$$

В частности, если начальное распределение является диффузионным [см. (7.94)]  $n = n_0 J_0(r/\Lambda)$  (где  $\Lambda = a/\zeta_1$ ,  $\zeta_1 = 2,405$  — первый корень функции Бесселя), то в сумме (7.135) остается только один член.

Таким образом, диффузионное распределение, устанавливающееся в стационарном разряде, не изменяется в процессе распада плазмы. Произвольное начальное распределение деформируется в процессе распада. Действительно, показатели экспонент в сумме (7.135) зависят от номера  $k$ , поскольку  $\zeta_k$  растет с ростом  $k$ . Поэтому через достаточно большое время  $t > \tau_D = \Lambda^2/\bar{D}_A$  первый член с наименьшим показателем окажется много больше остальных и решение преобразуется следующим образом:

$$n(r,t) = C_1 \exp \left[ -\frac{1}{\Lambda^2} \int_0^t D_A dt \right] J_0 \left( \frac{r}{\Lambda} \right).$$

Эта формула отличается от (7.135) только постоянным коэффициентом. Она показывает, что независимо от начального распределения концентраций через время порядка  $\tau_D$  установится диффузионное распределение концентраций, описываемое бесселевой функцией нулевого порядка.

В соответствии с полученными формулами уменьшение концентрации заряженных частиц в процессе распада плазмы определяется коэффициентом амбиполярной диффузии  $D_A = 2(T_e + T_i)/m_i v_{ia}$ . Его зависимость от времени связана с временным изменением электронной и ионной температур. Например, для случая, когда  $v_{ea}$ ,  $v_{ia}$ ,  $\kappa_{ea}$  не зависят от скорости, можно использовать для определения зависимости  $D_A(t)$  формулы (7.131). Обычно время диффузии заряженных частиц  $\tau_D$  много больше времени релаксации электронной температуры  $\tau_{Te}$ :

$$\frac{\tau_D}{\tau_{Te}} = \frac{\Lambda^2}{D_A} \kappa_{ea} v_{ea} \approx \sqrt{\frac{m_i}{m_e} \frac{\kappa_{ea} \Lambda^2}{\lambda_{ea} \lambda_{ia}}} \gg 1.$$

Время  $\tau_{Te}$ , в свою очередь, больше времени релаксации ионной температуры (7.132). Поэтому на первой стадии распада происходит уменьшение температур электронов и ионов, а концентрация остается практически неизменной. На следующей стадии (при  $t \gg \tau_{Te}$ ) температура заряженных частиц практически равна температуре нейтрального газа и происходит относительно медленное уменьшение концентрации. На этой стадии коэффициент амбиполярной диффузии практически постоянен  $D_A \approx 4T_a/m_i v_{ia}$ . Подставляя его в (7.135), (7.136), получаем закон изменения концентрации. На достаточно поздней стадии распада  $t > \tau_D$ , когда устанавливается диффузионное распределение концентраций, этот закон становится экспоненциальным. С помощью (7.136) получаем

$$n_0(t) = n_0(0) \exp(-D_A t / \Lambda^2). \quad (7.137)$$

Постоянная времени распада плазмы на этой стадии равна времени диффузии (7.97)

$$\tau_n = D_A / \Lambda^2 = (23,2/a^2) T_a / m_i v_{ia}. \quad (7.138)$$

При условиях, когда наряду с диффузией существенно влияет на распад плазмы квадратичная рекомбинация, уравнение баланса частиц принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_A \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n}{\partial r} \right) = -\alpha n^2, \quad (7.139)$$

причем на поздней стадии распада можно считать коэффициенты диффузии  $D_A$  и рекомбинации  $\alpha$  постоянными, соответствующими  $T_e = T_i = T_a$ .

Можно показать, что уравнение (7.139) при постоянных коэффициентах  $D_A$  и  $\alpha$  имеет частное решение, при котором радиальное распределение концентрации в каждый данный момент близко

к радиальному распределению в стационарной плазме, определяемому решением (7.100). Это распределение зависит от отношения диффузионной и рекомбинационной частот устранения  $\nu_D = D_A/\Lambda^2$  (7.97) и  $\nu_r = \alpha n_0$  (7.102) и в процессе распада переходит от диффузионного распределения при  $\nu_D \gg \nu_r$  к «уплощенному» при  $\nu_r > \nu_D$  (см. рис. 7.4). Соответствующее такому решению изменение во времени максимальной концентрации  $n_0$  приближенно описывается уравнением

$$\frac{dn_0}{dt} = -\rho_D \frac{D_A}{\Lambda^2} n_0 - \rho_\alpha \alpha n_0^2,$$

где коэффициенты  $\rho_D$  и  $\rho_\alpha$  масштаба единицы зависят от отношения  $\nu_D/\nu_r$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$n_0(t) = \frac{\rho_D \frac{D_A}{\Lambda^2} n_0(0) \exp\left(-\rho_D \frac{D_D}{\Lambda^2} t\right)}{\rho_D \frac{D_A}{\Lambda^2} + \rho_D \alpha n_0(0) \left[1 - \exp\left(-\rho_D \frac{D_A}{\Lambda^2} t\right)\right]}. \quad (7.140)$$

При  $D_A/\Lambda^2 \gg \alpha n_0$  решение (7.140) переходит в экспоненциальную зависимость, характерную для диффузионного распада. При  $\alpha n_0 \gg D_A/\Lambda^2$  уравнение баланса частиц можно записать следующим образом:  $dn/dt = -\alpha n^2$ . Оно дает изменение концентрации при рекомбинационном распаде плазмы

$$n(t) = n(0)/(1 + \alpha n(0)t), \quad (7.141)$$

или  $1/n(t) = 1/n(0) + \alpha t$ .

Таким образом, изменение концентрации заряженных частиц на поздней стадии распада плазмы характеризуется коэффициентами амбиполярной диффузии и рекомбинации при температуре заряженных частиц, близкой к температуре нейтрального газа. Поэтому распад плазмы часто используют для измерения этих коэффициентов.

## § 7.9. Направленное движение в сильноионизованной плазме

В сильноионизованной плазме необходимо учитывать не только столкновения заряженных частиц с нейтральными, но и их столкновения друг с другом. При этом квазистационарные уравнения движения электронов и ионов можно записать в виде [см. (6.62)]:

$$\left. \begin{aligned} -eE - \frac{1}{n} \text{grad}(nT_e) + R_{ea} + R_{ea}^T + R_{ei} + R_{ei}^T &= 0; \\ +eE - \frac{1}{n} \text{grad}(nT_i) + R_{ia} + R_{ia}^T + R_{ie} + R_{ie}^T &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.142)$$

Они справедливы для условий (7.5), когда можно пренебречь изменением направленных скоростей за время между столкновениями. В уравнениях (7.142)  $R_{\alpha\beta}$  — сила трения, действующая на ча-

стицы  $\alpha$  в результате их столкновений с частицами  $\beta$ ; в системе отсчета, в которой направленная скорость нейтральных атомов равна нулю,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_{e\alpha} &= -m_e v_{e\alpha} \mathbf{u}_e, & \mathbf{R}_{i\alpha} &= -\mu_{i\alpha} v_{i\alpha} \mathbf{u}_i, \\ \mathbf{R}_{ei} &= -\mathbf{R}_{ie} = -m_e v_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i). \end{aligned} \right\} \quad (7.143)$$

Величины  $\mathbf{R}_{\alpha\beta}^T = g_{\alpha\beta}^T \text{grad } T_{\alpha\beta}$ , где  $g_{\alpha\beta}^T \approx (T_{\alpha\beta}/v_{\alpha\beta}) dv_{\alpha\beta}/dT_{\alpha\beta}$ , представляют компоненты термосилы, действующей на частицы  $\alpha$  в результате их столкновений с частицами  $\beta$ , при этом в силу закона сохранения импульса при столкновениях  $\mathbf{R}_{ei}^T = -\mathbf{R}_{ie}^T$ .

Определим численные значения эффективных частот столкновений и коэффициентов  $g^T$ , определяющих термосилу для случая, когда частоты столкновений электронов и ионов с нейтральными атомами не зависят от скорости и эти столкновения не дают вклада в термосилу ( $v_{e\alpha} = \text{const}$ ;  $v_{i\alpha} = \text{const}$ ;  $g_{en}^T = g_{in}^T = 0$ ). Частоту электрон-ионных столкновений [см. (2.69)]

$$v_{ei} = \frac{4\pi n e^4}{m_e^2 v^3} L_e$$

можно считать обратно пропорциональной кубу скорости электронов, пренебрегая вкладом ионов в относительную скорость и слабой зависимостью от скорости кулоновского логарифма. Для этого случая столкновительный член, определяющий влияние электрон-ионных столкновений на направленную скорость электронов при их распределении, близком к максвелловскому, может быть найден с помощью формул (6.49), (6.56), (6.57) (в приближении восьми моментов):

$$\left( \frac{\delta \mathbf{u}_e}{\delta t} \right)_{ei} = -\frac{m_e}{3T_e} \langle v_{ei} v^2 \rangle (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) + \frac{1}{3} \frac{q_e}{nT_e} \left\langle v_{ei} \left( \frac{m_e v^2}{T_e} - \frac{m_e^2 v^4}{5T_e^2} \right) \right\rangle, \quad (7.144)$$

где знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по максвелловскому распределению электронов. Проводя это усреднение, получаем [см. (5.116)]

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{ei} &= \frac{m_e}{3T_e} \langle v_{ei} v^2 \rangle = 4\pi \frac{ne^4}{m_e^2} L_e \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m_e}{T_e} \right)^{5/2} \times \\ &\times \int_0^\infty v \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right) dv = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{ne^4}{m_e^{1/2} T_e^{3/2}} L_e; \\ \left\langle v_{ei} \left( \frac{m_e v^2}{T_e} - \frac{m_e^2 v^4}{5T_e^2} \right) \right\rangle &= \frac{4\pi ne^4 L_e}{m_e^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m_e}{T_e} \right)^{5/2} \times \\ &\times \int_0^\infty dv \left( v - \frac{m_e}{5T_e} v^3 \right) \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right) = \frac{9}{5} \bar{v}_{ei}. \end{aligned} \right\} \quad (7.145)$$

В (7.144) входит тепловой поток электронов. Подставляя его значение, определяемое выражением (7.160), учитывающим влияние электрон-ионных, электрон-электронных и электрон-атомных столкновений, получаем

$$m_e \left( \frac{\delta u_e}{\delta t} \right)_{ei} \approx m_e \bar{v}_{ei} \frac{v_{ea} + 0,97 \bar{v}_{ei}}{v_{ea} + 1,87 \bar{v}_{ei}} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) - \frac{3}{2} \frac{\bar{v}_{ei}}{(v_{ea} + 1,87 \bar{v}_{ei})} \text{grad } T_e.$$

Первое слагаемое этой формулы дает силу трения

$$\mathbf{R}_{ei} = -m_e v_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i); \quad v_{ei} = \bar{v}_{ei} \frac{\bar{v}_{ea} + 0,97 \bar{v}_{ei}}{v_{ea} + 1,87 \bar{v}_{ei}}, \quad (7.146)$$

второе слагаемое — термосилу

$$\mathbf{R}_{ei}^T = -g_T \text{grad } T_e; \quad g_T = \frac{3}{2} \frac{\bar{v}_{ei}}{v_{ea} + 1,87 \bar{v}_{ei}}. \quad (7.147)$$

Как видно, эффективная частота электрон-ионных столкновений, определяющая силу трения, и коэффициент  $g^T$ , определяющий термосилу, зависят не только от  $\bar{v}_{ei}$ , но и от  $v_{ea}$ . В частности, если  $v_{ea} \gg v_{ei}$ , то  $v_{ei} = \bar{v}_{ei}$ ,  $g_T = (3/2) \bar{v}_{ei}/v_{ea} \ll 1$ ; при  $v_{ei} \gg v_{ea}$  и для полностью ионизованной плазмы  $v_{ei} \approx 0,52 \bar{v}_{ei}$ ;  $g_T \approx 0,80$ . Более точные вычисления (соответствующие учету более высоких моментов функции распределения) приводят к некоторому изменению численных коэффициентов. Для случая  $v_{ei} \gg v_{ea}$  они дают

$$v_{ei} = 0,51 \bar{v}_{ei}; \quad g_T = 0,71. \quad (7.148)$$

Следует отметить, что в приведенных значениях  $v_{ei}$  и  $g^T$  учитывается влияние электрон-электронных и электрон-ионных столкновений. Нетрудно понять механизм этого влияния. Сильная зависимость частоты электрон-ионных столкновений от скорости приводит к тому, что основной вклад в направленную скорость вносят быстрые электроны, частоты столкновений которых существенно меньше, чем медленных. Поэтому эффективная частота столкновений значительно меньше средней (при учете одних электрон-ионных столкновений она равна  $0,3 \bar{v}_{ei}$ ). Электрон-электронные столкновения приводят к обмену энергией между быстрыми и медленными частицами и потому уменьшают этот эффект; уменьшение сравнимо с эффектом, так как  $\bar{v}_{ee} = \sqrt{2} \bar{v}_{ei}$ . Дополнительное его уменьшение при  $v_{ea} \gtrsim v_{ei}$  связано с электрон-атомными столкновениями, которые при  $v_{ea} = \text{const}$  выравнивают вклад в направленную скорость быстрых и медленных частиц. Термосила, как показано в § 6.3, обусловлена зависимостью частоты столкновений от скорости, т. е. тем, что электроны, движущиеся из области с более низ-

кой температурой, сталкиваются с ионами чаще, чем частицы, движущиеся в обратном направлении. При наличии одних электрон-ионных столкновений этот эффект приводит к коэффициенту  $|g_T| \approx |(T/v)dv/dT| = 3/2$  [см. (7.41)]. Электрон-электронные и электрон-атомные столкновения уменьшают эффект, так как из-за связанного с ними изменения направления скорости происходит перемешивание частиц, движущихся вдоль и против градиента.

Таким образом, при независимых от скорости частотах столкновений электронов и ионов с атомами уравнения движения (7.142) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} -e\mathbf{E} - \frac{1}{n} \text{grad}(nT_e) - g_T \text{grad} T_e - m_e v_{ea} \mathbf{u}_e - \\ - m_e v_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) = 0; \\ + e\mathbf{E} - \frac{1}{n} \text{grad}(nT_i) + g_T \text{grad} T_e - \mu_{ia} v_{ia} \mathbf{u}_i - \\ - m_e v_{ei} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.149)$$

где частота столкновений  $v_{ei}$  и коэффициент  $g_T$  определяются формулами (7.146) — (7.148). Здесь учтено, что столкновительные члены, обусловленные электрон-ионными столкновениями, в электронном и ионном уравнениях равны по величине и противоположны по знаку. Уравнения (7.149) позволяют найти направленную скорость заряженных частиц. Как и в случае слабоионизованной плазмы, ее можно обычно представить как сумму амбиполярной скорости и скорости, определяемой внешним электрическим полем. Определим сначала направленную скорость, обусловленную полем. Для этого положим в уравнениях  $\text{grad} n = \text{grad} T_e = \text{grad} T_i = 0$ . Тогда, сложив их, получим соотношение между  $\mathbf{u}_{eE}$  и  $\mathbf{u}_{iE}$ :

$$\mathbf{u}_{iE} = -(m_e v_{ea} / \mu_{ia} v_{ia}) \mathbf{u}_{eE}, \quad (7.150)$$

из которого следует, что  $\mathbf{u}_{iE} \ll \mathbf{u}_{eE}$ . Учтя это, найдем направленную скорость электронов

$$\mathbf{u}_{eE} = -e\mathbf{E}/m_e (v_{ea} + v_{ei}). \quad (7.151)$$

С помощью (7.151) запишем плотность тока и проводимость плазмы

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{u}_{eE} = \sigma \mathbf{E}; \quad \sigma = \frac{ne^2}{m_e (v_{ea} + v_{ei})}. \quad (7.152)$$

Выражение (7.152) аналогично (7.16) для проводимости слабоионизованной плазмы. Различие состоит лишь в том, что в него входит суммарная частота столкновений  $v_{ea} + v_{ei}$ . Для сильноионизованной плазмы, в которой  $v_{ei} \gg v_{ea}$ , получим, учтя (7.145) и (7.148):

$$\sigma \approx 2ne^2/m_e \bar{v}_{ei} = (3/2\sqrt{2\pi}) T_e^{3/2}/e^2 m_e^{1/2} L_e. \quad (7.153)$$

Проводимость такой плазмы практически не зависит от концентрации заряженных частиц. Нетрудно понять причину этой особенности. С одной стороны, проводимость пропорциональна числу носителей тока, т. е. концентрации электронов. С другой стороны, она обратно пропорциональна концентрации ионов, столкновения с которыми препятствуют ускорению электронов. Поскольку концентрации электронов и ионов равны, эти зависимости компенсируют друг друга. То обстоятельство, что проводимость сильно-ионизованной плазмы зависит только от электронной температуры, позволяет использовать измерения проводимости для определения температуры.

Найдем теперь амбиполярную составляющую направленной скорости, полагая в уравнениях (7.142) (7.143)  $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_A$ . При этом сила трения, обусловленная столкновениями электронов с ионами, обращается в нуль и уравнения принимают вид, аналогичный уравнениям движения в слабоионизованной плазме [см. (7.6)]. Складывая уравнения движения электронов и ионов, получаем выражение для амбиполярной скорости, аналогичное (7.74):

$$\mathbf{u}_A = - \frac{\text{grad} [n (T_e + T_i)]}{\mu_{ia} \nu_{ia} n} = - \frac{1}{n} \text{grad} (D_A n). \quad (7.154)$$

(Здесь учтено, что  $m_e \nu_{ea} \ll \mu_{ia} \nu_{ia}$ .) Величину амбиполярного электрического поля найдем, составляя разность уравнений движения (7.142):

$$\begin{aligned} E_A &= - \frac{\text{grad} (n T_e)}{en} - \frac{g_T}{e} \text{grad} T_e = \\ &= - \frac{T_e}{e} \frac{\text{grad} n}{n} - \frac{(1 + g_T)}{e} \text{grad} T_e. \end{aligned} \quad (7.155)$$

Поскольку формулы (7.151), (7.154), определяющие направленную скорость заряженных частиц в сильноионизованной плазме, аналогичны соответствующим формулам для слабоионизованной плазмы, уравнения баланса частиц также аналогичны, и мы не будем их здесь рассматривать.

Полученные выражения для направленной скорости перестают быть справедливыми, когда длины свободного пробега заряженных частиц относительно их столкновений с нейтральными атомами сравнимы с характерными размерами плазмы или больше них. В таких условиях движение заряженных частиц под действием градиентов концентрации и температуры уже не носит диффузионного характера, их направленная скорость при наличии градиентов может быть сравнима с тепловой. Переходя в уравнениях движения (7.142) и (7.143) к пределам  $\nu_{ia} \rightarrow 0$ ,  $\nu_{ea} \rightarrow 0$  и складывая их, находим, что градиент полного давления при этом должен быть равен нулю:

$$\text{grad} [n (T_e + T_i)] = 0; \quad p = n (T_e + T_i) = \text{const.}$$

Постоянство полного давления плазмы является условием применимости уравнений (7.142) для описания направленного движения в полностью ионизованной плазме. При отсутствии градиентов ионного и электронного давления ( $\text{grad}(nT_e) = \text{grad}(nT_i) = 0$ )

$$e\mathbf{E} + 0,71 \text{ grad } T_e = 0,51 m_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (7.156)$$

в котором мы использовали соотношения (7.148) для  $v_{ei}$  и  $g_T$ . Как видно, (7.156) определяет лишь относительную скорость электронов и ионов. Для амбиполярного режима ( $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i$ ) равенство (7.156) дает напряженность электрического поля, обеспечивающего амбиполярность:

$$\mathbf{E}_A = -\frac{g_T}{e} \text{ grad } T_e = -\frac{0,71}{e} \text{ grad } T_e. \quad (7.157)$$

Представляя в общем случае поле в виде суммы амбиполярного поля и поля, создающего ток  $\mathbf{E}_j$ , находим с помощью (7.156) проводимость полностью ионизованной плазмы в поле  $\mathbf{E}_j$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} &= -ne(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \approx 2 \frac{ne^2}{m_e \bar{v}_{ei}} \mathbf{E}_j; \\ \sigma &\approx 2ne^2 / m_e \bar{v}_{ei}. \end{aligned} \right\} \quad (7.158)$$

Формула для проводимости совпадает с (7.153).

### § 7.10. Перенос энергии в сильноионизованной плазме

Найдем теперь выражения для теплового потока электронов в сильноионизованной плазме. Стационарное уравнение теплового потока для случая, когда частота электрон-атомных столкновений не зависит от скорости, можно получить, подставляя столкновительный член (6.86) в (6.80). Оно имеет вид

$$\frac{5}{2} \frac{nT_e}{m_0} \text{ grad } T_e = -(\nu_{ea} + 1,87\bar{v}_{ei})\mathbf{q}_e + \frac{3}{2} \bar{v}_{ei} nT_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (7.159)$$

где первое слагаемое правой части учитывает электрон-атомные, электрон-ионные и электрон-электронные столкновения. Уравнение (7.159) определяет тепловой поток электронов

$$\mathbf{q}_e = -\mathcal{K}_e \text{ grad } T_e + g_T nT_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (7.160)$$

где

$$\mathcal{K}_e = \frac{5}{2} \frac{nT_e}{m_e (\nu_{ea} + 1,87\bar{v}_{ei})}; \quad g_T = \frac{3}{2} \frac{\bar{v}_{ei}}{\nu_{ea} + 1,87\bar{v}_{ei}}$$

[в силу соотношений симметрии кинетических коэффициентов коэффициент  $g_T$  совпадает с коэффициентом, входящим в выражение термосилы (7.147)]. Полученное выражение отличается от соответствующей формулы для слабоионизованной плазмы [см. (7.24)] за-



меной частоты столкновений  $\nu_{ea}$  на суммарную частоту  $\nu_{ea} + 1,87\nu_{ei}$  в коэффициенте теплопроводности и появлением слагаемого пропорционального направленной скорости (оно связано с зависимостью частоты столкновений  $\nu_{ei}^t$  от скорости). При достаточно высокой степени ионизации, когда  $\nu_{ei} \gg \nu_{ea}$ , коэффициент теплопроводности приобретает вид

$$\mathcal{K}_e = \frac{5}{2} g_q \frac{nT_e}{m_e \bar{\nu}_{ei}} = \frac{15}{8 \sqrt{2\pi}} \frac{g_q T_e^{5/2}}{e^4 m_e^{1/2} L_e}, \quad (7.161)$$

где  $g_q = 0,54$ . Коэффициент теплопроводности при этом сильно зависит от электронной температуры ( $\sim T_e^{5/2}$ ) и практически не зависит от концентрации [как и в формуле (7.153) для проводимости отсутствие такой зависимости связано с тем, что частота электрон-ионных столкновений  $\nu_{ei}$  пропорциональна концентрации].

Более точное вычисление, соответствующее учету высших моментов функции распределения, приводит к значительному изменению численных коэффициентов, входящих в (7.160) и (7.161). Для полностью ионизованной плазмы оно дает коэффициент  $g_q = 1,22$ . Отметим, что это значение получается при учете как электрон-ионных, так и электрон-электронных столкновений. При учете одних электрон-ионных столкновений коэффициент  $g_q$  много больше ( $g_q = 5$ ). Большое значение электронной теплопроводности при этом связано с тем, что быстрые электроны, сталкиваясь с ионами реже медленных, осуществляют основной перенос энергии. Электрон-электронные столкновения существенно уменьшают различие между вкладом быстрых и медленных электронов в перенос, так как приводят к эффективному обмену энергией между ними.

Тепловой поток ионов и атомов определяется уравнениями (6.80) со столкновительными членами (6.87), (6.88). Приведем здесь выражение для теплового потока ионов в плазме с высокой степенью ионизации, в которой частота ион-ионных столкновений много больше частоты столкновений ионов с атомами  $\nu_{ii} \gg \nu_{ia}$ . При этом столкновительный член уравнения теплового потока ионов определяется практически одними ион-ионными столкновениями (взаимодействие ионов с электронами играет гораздо меньшую роль из-за малой массы электронов), соответственно тепловой поток равен

$$\begin{aligned} q_i &= -\mathcal{K}_i \text{grad } T_i, \quad \mathcal{K}_i = \frac{5}{2} g_{qi} \frac{nT_i}{m_i \bar{\nu}_{ii}} = \\ &= \frac{15 \sqrt{\pi}}{8} g_{qi} \frac{T_i}{\sqrt{m_i} e^4 L_i}. \end{aligned} \quad (7.162)$$

Использование столкновительного члена (6.85) в уравнении теплового потока (6.80) приводит к  $g_{qi} = 1,25$ . Более точное вычисление дает  $g_{qi} = 1,56$ . Заметим, что коэффициент ионной теплопровод-

ности (7.162) при близких температурах  $T_e$  и  $T_i$  много меньше электронного (7.161):

$$\mathcal{K}_i/\mathcal{K}_e \approx (T_i/T_e)^{5/2} (m_e/m_i)^{5/2}. \quad (7.163)$$

Полученные выражения для тепловых потоков позволяют конкретизировать уравнения баланса средних энергий заряженных частиц в сильноионизованной плазме. При достаточно высокой степени ионизации, когда  $v_{ei} \gg v_{ea}$  и  $v_{ii} \gg v_{ia}$ , эти уравнения получаются в результате подстановки (7.161), (7.162) в (6.79). В отсутствие внешнего электрического поля (при  $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i = 0$ ) они приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} n \frac{\partial T_e}{\partial t} &= \frac{5}{3} g_{qe} \operatorname{div} \left( \frac{n T_e}{m_e \bar{v}_{ei}} \operatorname{grad} T_e \right) - \\ &\quad - \kappa_{ei} \bar{v}_{ei} n (T_e - T_i); \\ n \frac{\partial T_i}{\partial t} &= \frac{5}{3} g_{qi} \operatorname{div} \left( \frac{n T_i}{m_i v_{ii}} \operatorname{grad} T_i \right) - \\ &\quad - \kappa_{ie} \bar{v}_{ei} n (T_i - T_e) - \frac{1}{2} v_{ia} n (T_i - T_a), \end{aligned} \right\} \quad (7.164)$$

где учтено, что коэффициент передачи энергии при столкновениях ионов и атомов  $\kappa_{ea} = 1/2$ , поскольку  $m_i = m_a$ ; коэффициент передачи энергии при упругих столкновениях электронов с ионами  $\kappa_{ei} = 2m_e/m_i$ ; в принципе коэффициент  $\kappa_{ei}$  может учитывать также и влияние неупругих потерь энергии электронов. Первое слагаемое в правой части уравнений описывает теплоперенос. Второе слагаемое определяет обмен энергией между электронами и ионами. Третье слагаемое в правой части ионного уравнения определяет потери энергии при столкновениях ионов с нейтральными частицами, они могут быть существенными даже в сильноионизованной плазме, поскольку  $\kappa_{ia} = 1/2$ , в то время как  $\kappa_{ia} = 2m_e/m_i \ll 1$ .

Для оценки относительной роли различных слагаемых можно ввести характерные времена, определяющие эффективность соответствующих процессов  $\tau_{\alpha q} = T_\alpha (\partial T_\alpha / \partial t)_q^{-1}$ : времена теплопереноса электронов и ионов

$$\tau_{eq} \approx \frac{n L_T^2}{\mathcal{K}_e} \approx \frac{m_e \bar{v}_{ei}}{T_e} L_T^2; \quad \tau_{iq} \approx \frac{n L_T^2}{\mathcal{K}_i} \approx \frac{m_i \bar{v}_{ii}}{T_i} L_T^2 \quad (7.165)$$

[здесь  $L_T \approx \left(\frac{1}{T} \operatorname{grad} T\right)^{-1}$ ] и времена обмена энергией

$$\tau_{ei}^T \approx 1/\kappa_{ei} \bar{v}_{ei}; \quad \tau_{ia}^T \approx 2/v_{ia}. \quad (7.166)$$

Для полностью ионизованной плазмы, складывая уравнения (7.164), можно определить суммарное уравнение теплопереноса. Пренебрегая в нем ионной теплопроводностью, поскольку  $\mathcal{K}_i \ll \ll \mathcal{K}_e$  (7.163), и полагая, что неупругие потери энергии элект-

ронов несущественны, т. е. что  $\kappa_{ei} = \kappa_{ie} = 2m_e/m_i$ , получаем

$$n \frac{\partial (T_e + T_i)}{\partial t} - \frac{5}{3} g_{qe} \operatorname{div} \left( \frac{n T_e}{m \bar{v}_{ei}} \operatorname{grad} T_e \right) = 0. \quad (7.167)$$

Соотношение между электронной и ионной температурой зависит при этом от эффективности обмена энергией между электронами и ионами. При относительно высокой эффективности, когда  $\tau_{ei}^T \ll \ll \tau_{eq}$ , можно считать, что  $T_e \doteq T_i$ . В противоположном случае соотношение зависит от начальных и граничных условий и может быть определено с помощью электронного уравнения баланса энергии.

### § 7.11. Эффект «убегания» электронов

В сильноионизованной плазме, в которой частота столкновений электронов с ионами много больше частоты их столкновений с нейтральными атомами ( $v_{ei} \gg v_{ea}$ ), длина свободного пробега электронов быстро растет при увеличении энергии. При этом в достаточно сильном электрическом поле, в котором электроны между столкновениями набирают энергию сравнимую с хаотической, они могут перейти в режим непрерывного ускорения. Такой переход называют *эффектом «убегания»*, или *«просвиста»*, электронов (они как бы убегают от столкновений).

Оценку условий перехода электронов в режим убегания можно сделать с помощью усредненного уравнения движения электронов в электрическом поле. В соответствии с ним стационарную величину направленной скорости можно найти, приравнявая электрическую силу и силу трения, обусловленную электрон-ионными столкновениями:

$$eE = \mathbf{R}_{ei} = -m_e \langle v_{ei} (v) \mathbf{v} \rangle, \quad (7.168)$$

где

$$v_{ei} = \frac{4\pi n e^4}{m_e^2 v^3} L_e \approx \beta \frac{n}{v^3} \quad (7.169)$$

(здесь  $\mathbf{v}$  — относительная скорость, практически равная скорости электронов; знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по скоростям). Для слабого электрического поля, в котором направленная скорость электронов много меньше хаотической ( $\mathbf{u} \ll \mathbf{w}$ ), усреднение приводит к формуле, соответствующей (7.146):

$$\mathbf{R}_{ei} = 0,51 m_e \bar{v}_{ei} \mathbf{u}_e \approx 0,14 \beta m_e n \left( \frac{m_e}{T_e} \right)^{3/2} \mathbf{u}_e; \quad (7.170)$$

при этом сила трения  $\mathbf{R}_{ei}$  линейно растет с увеличением  $\mathbf{u}_e$ .

Для сильного поля, в котором энергия, набираемая электронами между столкновениями, значительно больше тепловой ( $u_e \gg \gg \omega$ ),  $v \approx u_e$  и частота столкновений практически не зависит

от величины хаотической скорости. В этом случае сила трения

$$R_{ei} = -m_e u_e v_{ei} (\mathbf{u}_e) \approx -\beta m_e n u / u^3 \quad (7.171)$$

обратно пропорциональна квадрату направленной скорости. Таким образом, зависимость  $R_{ei}$  от  $u_e$  представляет кривую с максимумом при  $u \approx \omega$ . Для ее приближенных оценок можно пользоваться формулой, справедливой с точностью до численного множителя порядка единицы

$$R_{ei} = -\beta m_e n u / (u^2 + v_T^2)^{3/2}; \quad v_T^2 = 3T_e / m_e. \quad (7.172)$$

Более точное вычисление  $R_{ei}$  при  $u \approx \omega$  может быть проведено усреднением (7.168) по функции распределения. Результат усреднения, проведенного в предположении, что распределение по хаотическим скоростям — максвелловское, представлен на рис. 7.7. Из соотношения (7.172) видно, что максимальное значение силы трения при  $u \approx \omega$  равно

$$\begin{aligned} R_{\text{макс}} &\approx 0,2\beta \frac{m_e^2 n}{T_e} \approx \\ &\approx 0,2 \frac{4\pi n e^4}{T_e} L_e \approx \\ &\approx 0,75 m_e^{1/2} T_e^{1/2} \bar{v}_{ei}. \end{aligned} \quad (7.173)$$

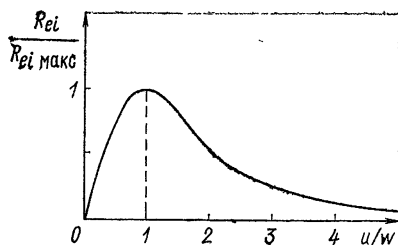


Рис. 7.7

При  $|eE| > R_{\text{макс}}$  сила трения не может уравновесить электрическую силу ни при каком значении направленной скорости. При этом под действием электрического поля электроны перейдут в режим непрерывного ускорения. Критическая напряженность поля, определяющая границу такого перехода, равна\*

$$E_c \approx 0,2 \frac{4\pi n e^3}{T_e} L_e \approx 0,2 \frac{e L_e}{r_D^2}. \quad (7.174)$$

Нетрудно убедиться, что средняя энергия, набираемая электронами в таком поле на длине свободного пробега порядка тепловой энергии

$$W_\lambda = e E_c \lambda_{ei} \approx (e E / \bar{v}_{ei}) \sqrt{T_e / m_e} \approx T_e.$$

Хотя критическое поле (7.174) при типичных параметрах плазмы невелико, такое поле обычно трудно создать в полностью ионизованной плазме, обладающей высокой проводимостью. Однако и при меньших напряженностях поля возможно «частичное убегание» электронов, т. е. переход в режим ускорения быстрых электронов, для которых частота столкновений, определяющая трение, меньше, чем для основной массы.

\* Условие (7.174) называют иногда критерием Дрейсера.

Рассмотрим, например, группу электронов, движущихся вдоль направления внешней электрической силы с близкими скоростями, существенно превышающими тепловые ( $v_p \gg v_{Te}$ ). Сила трения, действующая на эти электроны, обусловлена их столкновениями с ионами и с основной массой электронов. Ее нетрудно оценить, полагая, что относительная скорость при столкновениях равна скорости частиц выделенной группы:

$$R(v_p) = R_{ei}(v_p) + R_{ee}(v_p) \approx \mu_{ei} v_{ie}^t(v_p) v_p + \mu_{ee} v_{ee}^t(v_p) v_p. \quad (7.175)$$

В такой оценке не учитываются столкновения с электронами, имеющими скорость, большую, чем  $v_p$ , однако число таких электронов при  $v_p \gg v_{Te}$  невелико. Электроны выделенной группы перейдут в режим ускорения, если действующая на них электрическая сила больше силы трения. Используя выражения (2.69) для частот столкновений электронов, запишем это условие в виде

$$eE > m_e v_p \left[ \nu_{ei}(v_p) + \frac{1}{2} \nu_{ee}(v_p) \right] \approx \frac{12\pi e^4}{m_e v_p^2} L_e n,$$

где учтено, что  $\mu_{ei} \approx m_e$ ;  $\mu_{ee} = m_e/2$ . При заданном электрическом поле оно определяет скорость, начиная с которой электроны, движущиеся в направлении поля, переходят в режим ускорения

$$m_e v_p^2 / T_e > 12\pi n e^3 L_e / E T_e \approx 15 E_c / E \quad (7.176)$$

(здесь  $E_c$  — критическая напряженность [см. (7.174)]. Таким образом, при  $E < E_c$  основная масса электронов в электрическом поле движется с квазистационарной направленной скоростью, а в режим убегания попадают электроны из «хвоста» функции распределения. В этой области пространства скоростей функция распределения уже не является равновесной. Со временем электроны приобретают все большую энергию и функция распределения «вытягивается» вдоль оси в направлении действия электрической силы. Такой процесс приводит к уменьшению функции распределения по сравнению с равновесной вблизи границы убегания. В результате возникает избыточный диффузионный поток электронов к границе убегания, вызванный в основном электрон-электронными соударениями, из области малых (тепловых) скоростей. Если бы не было препятствий неограниченному ускорению, то постепенно в режим убегания попали бы все электроны плазмы. Однако в реальных условиях существует ряд ограничений, препятствующих ускорению. Прежде всего время ускорения ограничено из-за ухода быстрых электронов из объема плазмы. Далее, в неполностью ионизованной плазме ускорение ограничивается столкновениями электронов с нейтральными частицами. При наличии сложных ионов возникает ограничение, связанное с тем, что потенциал иона на малом расстоянии существенно отличается от кулоновского и частота столкновений при больших скоростях перестает уменьшаться. Еще од-

ной причиной, препятствующей ускорению, может быть излучение электронов при движении в плазме («радиационное трение»). Наконец, следует упомянуть о возможной расщепке кинетических неустойчивостей при прохождении быстрых электронов через плазму.

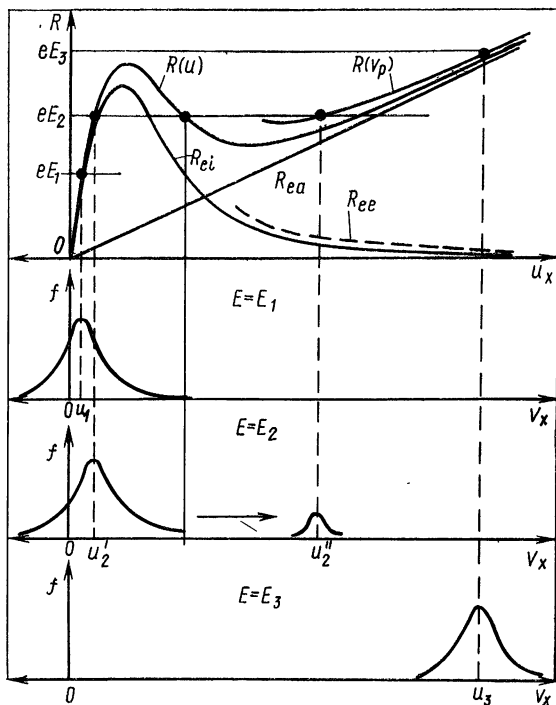


Рис. 7.8

Обсудим лишь ограничение ускорения, связанное со столкновениями электронов с нейтральными частицами. При их учете сила трения, действующая на электронный газ в целом, равна

$$R = R_{ei} + R_{ea} = m_e \langle v_{ei}^t(v) v \rangle + m_e v_{ea}^t u \approx \frac{4\pi n e^4 L_e}{m_e (u^2 + v_p^2)^{3/2}} u + m_e v_{ea} u, \quad (7.177)$$

где приняли, что  $v_{en}^t$  не зависит от скорости. Для группы быстрых электронов, движущихся в направлении  $E$  с выделенной скоростью  $v_p$ , получим силу трения, добавляя  $R_{ea}$  к (7.175):

$$R(v_p) = R_{ei} + R_{ee} + R_{ea} = 12\pi n e^4 L_e / m_e v_p^2 + m_e v_{en} v_p. \quad (7.178)$$

Зависимость величин  $R$  от  $u$  и  $v_p$  иллюстрируется рис. 7.8. Как видно, кривые  $R(u)$  при  $u > v_T$  и  $R(v_p)$  имеют минимум. Мини-

мум  $R(v_p)$  соответствует  $v_{ea} = 2(v_{ei} + v_{ee})$  и равен

$$R_{\text{мин}} = m_e v_{ea} v_{pm} = (g\sqrt{2\pi})^{1/3} \sqrt{m_e T_e} v_{ea}^{2/3} \bar{v}_{ei}^{-1/3}.$$

При электрических полях, при которых ускоряющая электроны сила меньше минимальной силы трения  $eE < R_{\text{мин}}(v_p)$ , убежание электронов, очевидно, невозможно. Величину порогового поля, характеризующего границу убежания при  $v_{ea} \ll v_{ei}$ , можно найти из соотношения

$$E_t/E_c = R_{\text{мин}}(v_p)/R_{\text{макс}} \approx 4(v_{ea}/\bar{v}_{ei})^{2/3}. \quad (7.179)$$

При полях меньших  $E_t$  стационарное распределение электронов по скоростям может быть близким к максвелловскому. При больших полях  $E_t < E < E_c$  имеется область скоростей, в пределах которой электроны должны увлекаться в режим ускорения (см. рис. 7.8). Эта область, однако, ограничена со стороны больших скоростей условием равенства электрической силе трения о нейтральные частицы

$$m_e v_{ea} \mathbf{u} = e\mathbf{E}.$$

Вблизи границы области ускорения, при  $\mathbf{v} \approx \mathbf{u}$ , должно происходить накопление электронов, при этом должен образовываться максимум функции распределения, ширина которого зависит от соотношения между ускорением электронов в электрическом поле и диффузией в пространстве скоростей, обусловленной электрон-электронными столкновениями. При  $E > E_c$ , когда основная масса электронов переходит в режим ускорения, все распределение должно сместиться в область скоростей, в которой электрическая сила уравновешивается трением электронов о нейтральный газ.

Остановимся еще на одной особенности поведения сильноионизованной плазмы в электрическом поле, называемой иногда «убежением энергии» электронов. Оно может происходить в условиях, когда основным механизмом потерь энергии электронов является их охлаждение при столкновениях с ионами. Стационарное уравнение баланса энергии электронов (6.79) в этом случае сводится к равенству энергии, приобретаемой электронами в электрическом поле  $P_E$ , и энергии, теряемой ими при столкновениях с ионами  $P_{ei}$ :

$$P_E = \sigma E^2 \approx 2 \frac{ne^2 E^2}{m_e \bar{v}_{ei}}, \quad P_{ei} = \frac{3}{2} \kappa_{ei} \bar{n} \bar{v}_{ei} (T_e - T_i). \quad (7.180)$$

Учитывая, что  $v_{ei}(T_e) \sim T_e^{-3/2}$ , приведем уравнение баланса энергии к виду

$$\frac{4}{3} \frac{e^2 E^2}{m_e} = \kappa_{ei} [\bar{v}_{ei}(T_i)]^2 T_i \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^3 \left( \frac{T_e}{T_i} - 1 \right). \quad (7.181)$$

Нетрудно убедиться, что зависимость правой части равенства от  $T_e$  при  $\kappa_{ei} = \text{const}$  имеет максимум при  $T_e = 1,5T_i$ . Очевидно, ста-

ционарное электрическое поле в рассматриваемом случае не может превосходить величину, соответствующую этому максимуму

$$E = 0,4 \frac{\sqrt{\kappa_{ei} m_e T_i}}{e} \bar{v}_{ei} T_i \approx 0,53 \sqrt{\kappa_{ei}} E_c(T_i),$$

где  $E_c(T_i)$  — критическое поле при  $T_e = T_i$  (см. (7.154)). Зависимость  $T_e(E)$ , определяемую равенством (7.181), иллюстрирует рис. 7.9. Как видно, постепенное увеличение напряженности поля  $E$  от нуля до  $E_c$  приводит к увеличению стационарной электронной температуры от  $T_i$  до  $1,5 T_i$ . При дальнейшем увеличении поля стационарное решение уравнения баланса энергий отсутствует. Это означает, что энергия, набираемая электронами в электрическом поле, превышает потери энергии при столкновениях и электронная температура нарастает со временем. Рост температуры приводит к дальнейшему падению частоты столкновений  $T_e$  и нарастанию «разбаланса». Таким образом поле  $E$  дает границу перехода в режим нарастающего нагрева (убегания энергии).

В реальных условиях эффект убегания энергии ограничен другими механизмами потерь. В не полностью ионизованной плазме могут быть существенными потери, связанные со столкновениями

электронов с нейтральными частицами. Их учет сводится к добавлению в правой части уравнения баланса (7.180) величины  $P_{ea} = (3/2) \kappa_{ea} n v_{ea} (T_e - T_a)$ . При  $\kappa_{ea} v_{ea}(T_i) \ll \kappa_{ei} v_{ei}(T_i)$  эти потери относительно невелики в области температур  $T_e \approx T_i$ . Однако с возрастанием температуры при  $T_e \gg T_i$  они становятся преобладающими, так как  $v_{ei} \sim 1/T_e^{3/2}$ , в то время как  $v_{ea} \approx \text{const}$ . Соответственно на кривой  $E(T_e)$  после максимума появляется растущая ветвь, определяемая электрон-атомными столкновениями (см. рис. 7.9). Ее положение можно найти из условия баланса

$$P_E \approx P_{ea}; T_e \approx e^2 E^2 / m_e \kappa_{ea} \bar{v}_{ea}^2. \quad (7.183)$$

В этом случае, как видно из рис. 7.9, увеличение электрического поля от нуля до  $E_k$ , приводящее к переходу в режим нестационарного нагрева, оканчивается «перескоком» в область  $T_e \gg T_i$ . Заметим, что обратный «перескок» при уменьшении поля происходит при меньшем значении поля, чем прямой, т. е. имеет место своеобразный гистерезис нагрева.

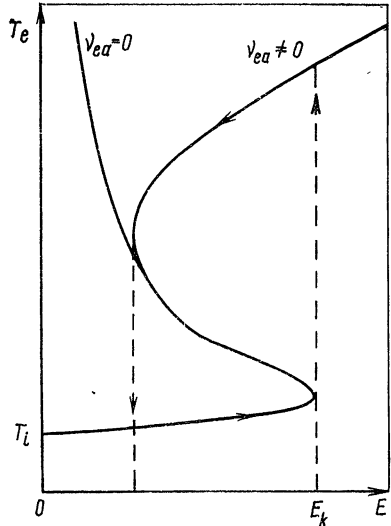


Рис. 7.9



Другое существенное ограничение эффекта убегания энергии может быть связано с теплопроводностью плазмы, так как коэффициент теплопроводности быстро растет при увеличении электронной температуры  $\mathcal{K}_e \sim T_e^{5/2}$ . Количественное рассмотрение этого ограничения требует решения нелинейного уравнения баланса, и мы ограничимся здесь лишь грубой оценкой. Ее можно получить, приравняв величину энергии, набираемой электронами в поле  $P_E$  (7.180), средним потерям энергии, связанным с теплопроводностью:

$$P_q = \text{div} (\mathcal{K}_T \text{grad } T_e) \sim \mathcal{K}_e T_e / L_T^2 \approx n T_e^2 / m_e \bar{v}_{ei} L_T^2,$$

где  $L_T = [(1/T_e) \text{grad } T_e]^{-1}$ . В результате оценки находим температуру в электрическом поле при условиях, когда теплопроводность является основным источником потерь:

$$T_{eq} \approx eEL_T. \quad (7.184)$$

ГЛАВА 8  
ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПЛАЗМЫ  
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 8.1. Некоторые сведения о статических магнитных полях

Влияние магнитного поля на движение заряженных частиц зависит от его пространственного распределения. Поэтому прежде всего рассмотрим некоторые величины, характеризующие пространственные свойства магнитного поля.

Как известно, распределение напряженности статического магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  описывается уравнениями

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (8.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (8.2)$$

При заданном распределении тока и граничных условиях эти уравнения однозначно определяют поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ . Изменение поля в пространстве можно характеризовать векторной производной  $\nabla \mathbf{H}$ , которая представляет собой тензор. В декартовой системе координат он имеет вид

$$\nabla \mathbf{H} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial H_x}{\partial x}, & \frac{\partial H_x}{\partial y}, & \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x}, & \frac{\partial H_y}{\partial y}, & \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x}, & \frac{\partial H_z}{\partial y}, & \frac{\partial H_z}{\partial z} \end{array} \right\|. \quad (8.3)$$

Компоненты тензора связаны между собой уравнениями (8.1), (8.2). В частности, сумма диагональных членов, равная  $\operatorname{div} \mathbf{H}$ , очевидно, равна нулю. В областях свободных от токов  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$  и

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial z}.$$

Для описания пространственного поведения  $\mathbf{H}$  часто пользуются понятием *силовой линии*. Магнитной силовой линией называется некоторая воображаемая пространственная кривая, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением  $\mathbf{H}$ . Уравнение силовой линии может быть записано, исходя из того, что каждый элемент линии  $d\mathbf{l}$  параллелен полю  $\mathbf{H}$ :

$$\frac{\partial l_x}{H_x} = \frac{dl_y}{H_y} = \frac{dl_z}{H_z}. \quad (8.4)$$

Число силовых линий, пересекающих единичную площадку, нормальную к вектору  $\mathbf{H}$ , выбирается пропорциональным величине

напряженности. Поскольку в соответствии с определением силовые линии могут быть проведены через любую точку пространства, то их «густота» является понятием условным.

Из уравнения (8.2) следует, что поток вектора  $\mathbf{H}$

$$\Phi = \int_{(S)} H_n dS \quad (8.5)$$

через любую замкнутую поверхность равен нулю. Действительно, используя теорему Гаусса, найдем

$$\int_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{H} dV = \int_{(S)} H_n dS = 0. \quad (8.6)$$

Условие (8.6) также означает, что в пространстве отсутствуют точки, в которых начинаются или оканчиваются силовые линии, т. е. количество входящих в любой объем и выходящих из него линий одинаково. Таким образом, силовая линия или замкнута, или имеет бесконечную протяженность. При анализе конфигураций магнитного поля в конечном объеме можно представить себе два типа силовых линий. Во-первых, линии, пересекающие поверхность рассматриваемого объема. Конфигурации, образованные такими линиями, часто называют *открытыми*. Длина линии в объеме может быть различной (в частности, она может стремиться к бесконечности). Во-вторых, силовые линии, не выходящие из объема. Так же как и в первом случае, их длина может быть значительно больше характерных размеров объема (и в пределе стремиться к бесконечности). Иными словами, силовая линия может представлять собой сложную, но не пересекающую саму себя замкнутую пространственную кривую. Если силовые линии, находящиеся внутри объема не пересекают его поверхность, то говорят о *замкнутых магнитных конфигурациях*.

Рассмотрим небольшую площадку, которую пересекает набор силовых линий. Будем перемещать ее вдоль силовых линий, деформируя ее таким образом, чтобы внутри контура, ограничивающего эту площадку, все время оставались одни и те же силовые линии. В результате такого перемещения получим пространственную фигуру, которую называют *магнитной силовой трубкой*. Очевидно, поверхность трубки образуется совокупностью граничных силовых линий, а полный поток внутри трубки сохраняется  $\delta\Phi = \int_{(\delta S)} H_n dS =$

$= \text{const.}$  Так же как и силовые линии, магнитные трубки могут быть замкнутыми и незамкнутыми. Из приведенных определений следует, что силовая линия является по существу пределом, к которому стремится силовая трубка при уменьшении площади ее поперечного сечения до нуля. Важная характеристика при анализе устойчивости плазмы в магнитном поле — *удельный объем магнитной силовой трубки* ( $V_\Phi$ ), под которым понимается отношение геометрического объема трубки  $\delta V$  к магнитному потоку  $\delta\Phi$ . Величи-

на  $\delta V$  определяется криволинейным интегралом  $\delta V = \int \delta S dl$ , взятым вдоль оси трубки. Так как

$$\delta\Phi = H\delta S = \text{const}, \text{ то } \delta V = \int (H\delta S/H)dl = \delta\Phi (dl/H)$$

и

$$V_\Phi = \int_{(l)} (dl/H). \quad (8.7)$$

Если силовые линии замкнуты, то интеграл берется вдоль всей длины трубки. В противоположном случае пределы интегрирования выбираются из конкретных условий задачи.

Если силовая линия не уходит в бесконечность и не замыкается сама на себя, то в некоторых условиях в пространстве могут иметь место участки поверхности, все множество точек которых образовано из элементов рассматриваемой силовой линии. Иными словами, в пределах этих участков любые две точки лежат на одной и той же силовой линии. Участки могут замыкаться между собой, и тогда силовая линия непрерывным образом заполняет поверхность некоторого замкнутого объема. В таких случаях говорят о *магнитных поверхностях*.

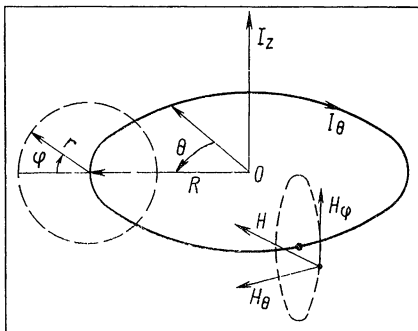


Рис. 8.1

Проследим образование магнитных поверхностей на примере полей тороидальной геометрии. Пусть магнитное поле в каждой точке имеет две составляющие:  $\mathbf{H}_\theta$  и  $\mathbf{H}_\varphi$  (рис. 8.1). Поле  $\mathbf{H}_\theta$  может быть создано или с помощью тороидальной катушки, или линейным током  $I_z$ . Компоненту  $H_\varphi$  легко создать, пропуская ток  $I_\theta$  по круговому контуру. Силовая линия поля  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\theta + \mathbf{H}_\varphi$  представляет собой винтовую линию, навивающуюся на тороидальную поверхность. Для описания таких силовых линий вводят понятие *угла вращательного преобразования*  $\psi$ , равного  $d\varphi/dl_\theta$ . Если  $d\varphi/dl_\theta$  не зависит от  $\theta$ , то эта величина по существу определяет шаг, с которым винтовая линия накручивается на тороидальную поверхность. Из уравнения силовой линии следует, что  $dl_\theta/H_\theta = dl_\varphi/H_\varphi = = rd\varphi/H_\varphi$ . Поэтому

$$\psi = d\varphi/dl_\theta = H_\varphi/rH_\theta. \quad (8.8)$$

При полном обходе по  $\theta$  след силовой линии сместится по сечению тора на некоторый угол  $\delta\varphi$  (рис. 8.2). Очевидно, что если  $\delta\varphi/2\pi$  — иррациональное число, то силовая линия за любое конечное число оборотов не вернется в исходную точку и при бесконечном числе обходов заполнит всю поверхность тора. Каждая силовая линия

образует свою магнитную поверхность. Полная магнитная конфигурация в рассмотренном примере представляет систему магнитных поверхностей в виде вложенных друг в друга торов (рис. 8.3). В том случае, когда  $\delta\varphi/2\pi$  равно рациональному числу  $m/n$ , то через  $n$  обходов силовая линия замкнется и магнитная поверхность не образуется.

Отметим, что такие характеристики магнитного поля, как силовая линия, силовая трубка, магнитная поверхность, в отличие от напряженности поля  $\mathbf{H}$ , не являются локальными. Их характер

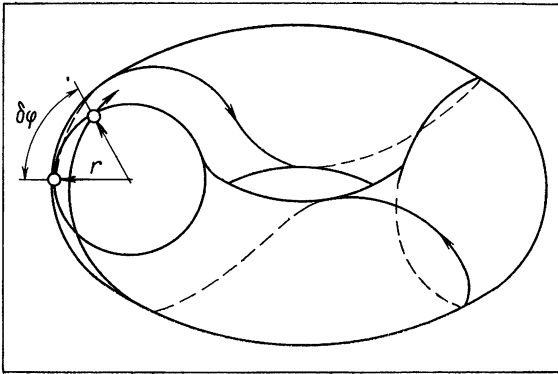


Рис. 8.2

может существенно меняться даже при малых возмущениях магнитного поля. В поле тороидальной геометрии, например, при  $H_\varphi = 0$  силовые линии представляют собой замкнутые концентрические окружности. Возникновение даже очень маленького поля  $H_\varphi$  приводит к тому, что силовая линия становится винтовой и ее длина может вырасти до бесконечности (образуется магнитная поверхность). Очевидно, магнитные поверхности являются еще менее устойчивыми по отношению к возмущениям.

Рассмотрим взаимосвязь между поведением силовых линий в окрестностях некоторой точки и компонентами тензора производной поля (8.3). Выберем систему координат таким образом, чтобы в рассматриваемой точке поле было направлено по оси  $z$  ( $\mathbf{H} = H_z \mathbf{e}_z$ ).

Пусть в тензоре (8.3) не равны нулю только производные  $\partial H_z/\partial x$ ,  $\partial H_z/\partial y$ . Из (8.1) следует, что это возможно лишь при наличии токов в объеме. Тогда силовые линии будут параллельными друг другу прямыми, плотность которых изменяется в направлениях  $x$ ,  $y$  (рис. 8.4). Компонента тензора  $\partial H_z/\partial z$  может быть отлична от нуля лишь одновременно с другими диагональными членами [см. (8.2)]. При этом силовые линии вблизи рассматриваемой точки не параллельны друг другу, так как по крайней мере одна из производных  $\partial H_x/\partial x$ ,  $\partial H_y/\partial y$  не должна быть равна нулю. На рис. 8.5 изображены силовые линии при  $\partial H_z/\partial z < 0$  и  $\partial H_x/\partial x > 0$ . Если  $\partial H_y/\partial y = 0$  и

$\partial H_x/\partial x = -\partial H_x/\partial z$ , то конфигурация магнитного поля не зависит от  $y$  (плоский случай). В случае цилиндрической симметрии, рис. 8.5 следует рассматривать как сечение пространственной конфигурации, симметричной относительно оси  $z$  (расходящийся пучок силовых линий).

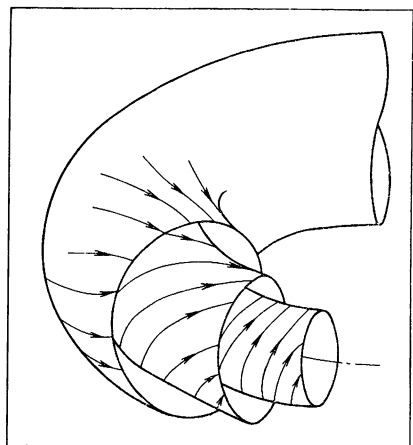


Рис. 8.3

При  $\partial H_z/\partial z = 0$  и  $\partial H_y/\partial y = -\partial H_x/\partial x \neq 0$  силовые линии вблизи рассматриваемой точки не только не параллельны, но

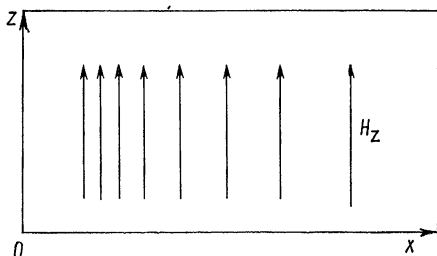


Рис. 8.4

и лежат в различных плоскостях. Сечения силовой трубки при разных значениях  $z$  и проекция силовых линий на плоскость  $xu$  для этого случая изображены на рис. 8.6.

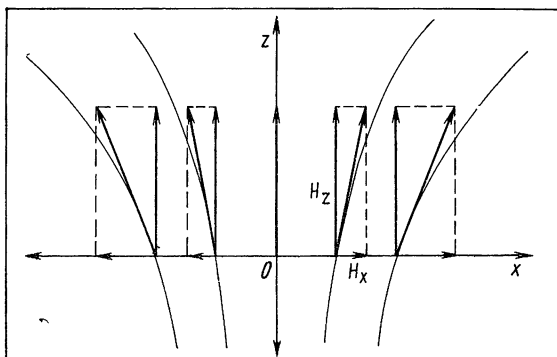


Рис. 8.5

Слагаемые  $\partial H_x/\partial z$ ,  $\partial H_y/\partial z$  описывают искривление силовых линий. Чтобы убедиться в этом, напомним прежде всего известные понятия, характеризующие пространственную конфигурацию кривой. Направление пространственной кривой в данной точке задается единичным вектором касательной. Для силовых линий магнитного поля он, очевидно, равен  $\mathbf{H}/H = \mathbf{h}$ . Соответственно изменение направления кривой в пространстве при переходе вдоль кривой от

точки 1 к точке 2 определится величиной  $\Delta h$  (рис. 8.7). Вектор  $\Delta h$  можно записать в виде  $\Delta h = \Delta l (dh/dl)$ . Отсюда следует, что искривление линии задается величиной  $dh/dl$ , которая называется кривизной и является производной вектора  $\mathbf{h}$  по направлению. Эту

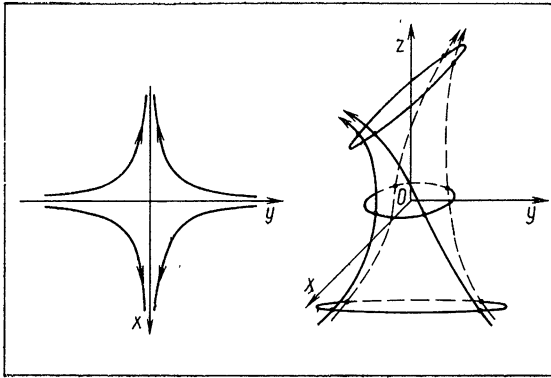


Рис. 8.6

производную можно записать в форме  $dh/dl = (\mathbf{h} \text{ grad}) \mathbf{h}$ , так как оператор  $(\mathbf{h} \text{ grad})$  определяет приращения вдоль касательной к кривой ( $l$ ).

Для характеристики искривления пространственной кривой вводят также понятие *радиуса кривизны R*. Направление вектора  $\mathbf{R}$  совпадает с направлением главной нормали, которая, в свою очередь, определяется направлением  $d\mathbf{h}$ . Его длина задается точкой пересечения (центром кривизны) двух главных нормалей, проведенных в точках 1, 2 при стремлении  $\Delta l_{12}$  к нулю. Геометрический смысл радиуса кривизны в том, что в пределе  $\Delta l \rightarrow 0$  отрезок любой кривой можно заменить отрезком окружности с радиусом равным  $R$  с центром, лежащим в центре кривизны. Из рис. 8.7 нетрудно установить связь между кривизной и радиусом кривизны

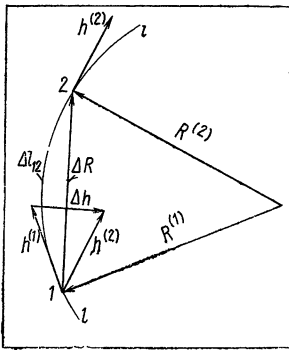


Рис. 8.7

$$|\Delta R|/R = |\Delta h|/h.$$

Разделив обе части равенства на  $\Delta l$ , получим

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{|\Delta R|}{\Delta l} \frac{1}{R} = \frac{1}{R} = \left| \frac{dh}{dl} \right|,$$

или в векторной форме

$$\frac{\mathbf{R}}{R^2} = -\left( \frac{\mathbf{H}}{H} \text{ grad} \right) \frac{\mathbf{H}}{H}. \quad (8.9)$$

Используя (8.9), вернемся к анализу характера силовых линий в локальной системе координат, где  $\mathbf{H} = H_z \mathbf{0}$ . В этой системе

$$\frac{\mathbf{R}}{R^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathbf{H}}{H} \right) = -\frac{1}{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} + \frac{\mathbf{H}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1}{H} \times \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} x_0 + \frac{\partial H_y}{\partial z} y_0 \right). \quad (8.10)$$

Таким образом, действительно, производные  $\partial H_x / \partial z$  и  $\partial H_y / \partial z$  однозначно определяют радиус кривизны линий в рассматриваемой точке.

Часто встречается случай, когда данная силовая линия есть плоская кривая, а токи в рассматриваемой точке отсутствуют. Тогда радиус кривизны обратно пропорционален производной от напряженности магнитного поля вдоль направления радиуса кривизны. Действительно, выберем систему координат так, чтобы ось  $x$  была направлена вдоль  $\mathbf{R}$ . Тогда (8.9) приобретает вид  $1/R = (1/H) \partial H_x / \partial z$ . Из условия  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$  имеем  $\partial H_z / \partial x - \partial H_x / \partial z = 0$  и, следовательно,

$$1/R = (1/H) \partial H_z / \partial x. \quad (8.11)$$

В заключение рассмотрим особенности магнитных конфигураций, связанные с компонентами  $\partial H_x / \partial y$ ,  $\partial H_y / \partial z$ . Предположим, что отлична от нуля, например, производная  $\partial H_x / \partial y$ . Тогда в каждой плоскости  $y = \text{const}$  силовые линии являются прямыми, причем их направление различно зависит от координаты  $y$  (рис. 8.8). Такая перекрещенность, скрученность силовых линий относительно близлежащих поверхностей называется *широм*. Количественной характеристикой шира в рассмотренном примере может быть величина, определяющая скорости изменения направления поля  $\mathbf{H}$  вдоль оси  $y$

$$d\alpha / dy = (1/H_z) dH_x / dy.$$

Понятие «шир» особенно часто употребляется для тороидальных магнитных конфигураций, в которых направление силовых линий характеризуется углом вращательного преобразования  $\psi$

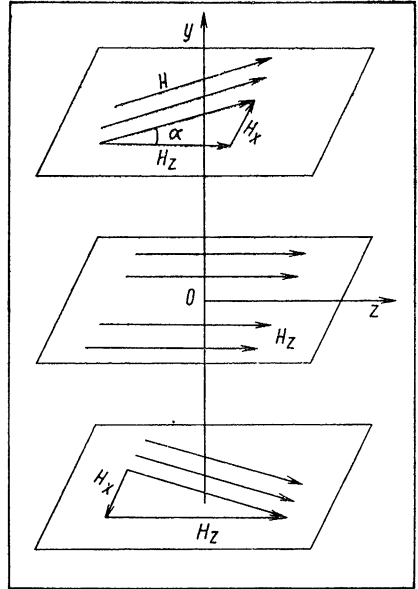


Рис. 8.8



(см. рис. 8.2). Наличие шира означает, что этот угол и соответственно шаг силовых линий неодинаков для разных  $r$  (различных магнитных поверхностей). Поэтому шир здесь задают величиной

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{H_\psi}{rH_\Theta} \right). \quad (8.12)$$

### § 8.2. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле

Прежде чем описывать поведение плазмы в магнитном поле, рассмотрим движение отдельных заряженных частиц в поле заданных сил. Начнем с простейшего случая движения частиц в однородном постоянном магнитном поле. В этом случае на частицы действует только сила Лоренца

$$\mathbf{F}_L = \frac{Ze}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \quad (8.13)$$

(зарядовое число  $Z$  будем, как и ранее, полагать равным  $+1$  для ионов и  $-1$  для электронов). Уравнение движения частицы под действием силы Лоренца имеет вид\*

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{Ze}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (8.14)$$

Оно определяет два независимых интеграла движения. Первый получается в результате проектирования уравнения на магнитном поле. Поскольку проекция  $\mathbf{F}_L$  на  $\mathbf{H}$  равна нулю, компонента скорости, параллельная магнитному полю ( $v_{\parallel}$ ), остается постоянной

$$dv_{\parallel}/dt = 0; \quad v_{\parallel} = \text{const}. \quad (8.15)$$

Далее, поскольку лоренцева сила перпендикулярна скорости ( $\mathbf{F}_L \perp \mathbf{v}$ ), она не приводит к изменению энергии частицы. Умножая (8.14) скалярно на  $\mathbf{v}$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = 0; \quad K = \frac{mv^2}{2} = \text{const}. \quad (8.16)$$

Таким образом, в процессе движения остаются постоянными полная скорость частицы  $v$ , ее проекция на направление магнитного поля  $v_{\parallel}$  и ее проекция на плоскость перпендикулярную полю  $v_{\perp} = \sqrt{v^2 - v_{\parallel}^2}$ .

Определяемая уравнением (8.14) траектория движения частицы в плоскости перпендикулярной полю есть, очевидно, окружность. Ее радиус  $\rho_H$  можно найти, приравнявая лоренцеву и центробежную силы:

$$(e/c)v_{\perp}H = mv_{\perp}^2/\rho_H.$$

\* Мы не рассматриваем здесь релятивистские эффекты, полагая, что скорость частицы много меньше скорости света ( $v \ll c$ ).

Отсюда

$$\rho_H = v_{\perp} / \omega_H; \quad (8.17)$$

$$\omega_H = eH/mc. \quad (8.18)$$

Величина  $\omega_H$  является, очевидно, угловой скоростью вращения частицы по окружности. Направление вращения определяется условием, чтобы лоренцева сила была центробежной. Оно зависит от знака заряда частицы: при положительном заряде частица вращается по часовой стрелке, при отрицательном — против (если смотреть в направлении поля). Окружность, представляющую

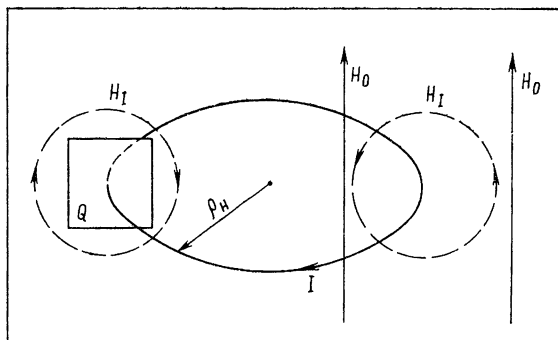


Рис. 8.9

собой проекцию траектории на плоскость перпендикулярную полю называют *ларморовской*, ее радиус  $\rho_H$  — *ларморовским радиусом*, угловую скорость  $\omega_H$  — *циклотронной*, или *ларморовской частотой*.

Приведем здесь численные выражения величин  $\omega_H$  и  $\rho_H$  для электронов

$$\omega_{He} \approx 1,7 \cdot 10^7 H, \quad \rho_{He} \approx 3,5 \sqrt{K_{\perp}} / H;$$

для ионов водорода (протонов)

$$\omega_{Hp} \approx 10^4 H, \quad \rho_{Hp} \approx 150 \sqrt{K_{\perp}} / H,$$

где  $\omega$  — в  $\text{сек}^{-1}$ ,  $\rho_H$  — в  $\text{см}$ ,  $H$  — в э,  $K_{\perp} = mv_{\perp}^2/2$  — в эв.

При анализе взаимодействия заряженных частиц с магнитным полем удобно рассматривать ларморовскую окружность, как виток с током (рис. 8.9). При этом предполагается усреднение за времена много большие периода обращения частицы ( $T_H = 2\pi/\omega_H$ ). Величина среднего тока по ларморовской окружности равна, очевидно, заряду, переносимому в единицу времени через площадку  $Q$ , перпендикулярную траектории, т. е. отношению заряда частицы к периоду обращения:

$$I = e/T_H = e\omega_H/2\pi. \quad (8.19)$$

Виток с током можно характеризовать магнитным моментом. Как известно, магнитный момент тока равен

$$\mu = \frac{1}{c} IS = \frac{1}{2c} e\omega_H \rho_H^2$$

(здесь  $S = \pi\rho_H^2$  — площадь ларморовского кружка). Подставляя сюда выражения для  $\rho_H$  и  $\omega_H$  [см. (8.17), (8.18)], получаем

$$\mu = m v_{\perp}^2 / 2H = K_{\perp} / H, \quad (8.20)$$

или в векторной форме  $\boldsymbol{\mu} = -(K_H/H)\mathbf{h}$ , так как для частицы любого знака направление магнитного момента противоположно направлению внешнего магнитного поля. Таким образом, внутри ларморовского кружка магнитное поле тока вычитается из внешнего поля  $H_0$ , вне кружка — складывается. Это означает, что ларморовский виток обладает диамагнитными свойствами.

Итак, траектория движения заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле представляет собой винтовую линию, складывающуюся из равномерного движения частицы вдоль поля и равномерного вращения в плоскости перпендикулярной полю (рис. 8.10). Радиус этой винтовой линии есть, очевидно, ларморовский радиус (8.17), шаг винтовой линии определяется продольной скоростью частицы и равен

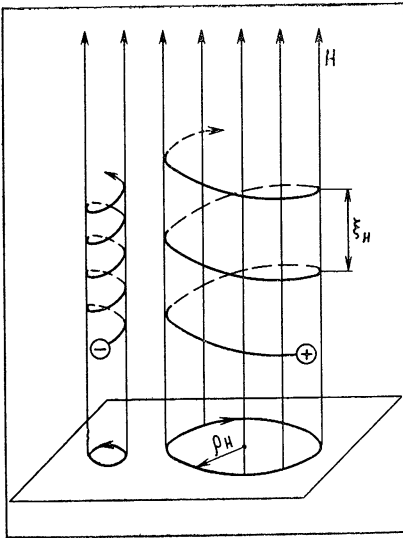


Рис. 8.10

$$\xi_H = v_{\parallel} / \omega_H, \quad (8.21)$$

В более сложных условиях, когда магнитное поле неоднородно в пространстве и непостоянно во времени, когда присутствует электрическое поле или имеются другие силы, точное интегрирование уравнения движения возможно лишь в некоторых специальных случаях. Однако существует простой приближенный метод решения задачи для условий, когда ларморовский радиус и шаг винтовой траектории много меньше характерных масштабов неоднородности

$$\rho_H \ll L, \quad \xi_H \ll L, \quad (8.22)$$

а период обращения заряженных частиц по ларморовской окружности много меньше характерного времени изменения полей

$$T_H \gg \tau, \quad \omega_H \tau \ll 1. \quad (8.23)$$

В таких условиях траекторию движения частицы в плоскости перпендикулярной полю можно представить в виде суперпозиции ларморовского вращения и дрейфа центра ларморовской окружности (его называют *ведущим*, или *ларморовским, центром*). При этом удастся получить сравнительно простые приближенные выражения для обеих компонент скорости — скорости дрейфа и скорости ларморовского вращения. Такое приближение называют *дрейфовым*. Оно широко используется для описания поведения плазмы в сильном магнитном поле.

### § 8.3. Дрейф заряженных частиц в однородном магнитном поле

Рассмотрим сначала движение заряженных частиц при наличии помимо магнитного поля постоянной и однородной в пространстве силы  $\mathbf{F}$ . При этом уравнение движения приобретает вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{Ze}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (8.24)$$

Движение частицы вдоль магнитного поля описывается проекцией уравнения (8.24) на  $\mathbf{H}$

$$m d\mathbf{v}_{\parallel}/dt = \mathbf{F}_{\parallel}.$$

Поскольку лоренцева сила не имеет продольной составляющей, магнитное поле не влияет на продольное движение и оно оказывается равноускоренным. Движение в плоскости, перпендикулярной полю, может быть представлено в виде суперпозиции ларморовского вращения и дрейфа с постоянной скоростью. Действительно, представим поперечную скорость в виде суммы

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_{\omega} + \mathbf{v}_d, \quad (8.25)$$

полагая, что  $\mathbf{v}_{\omega}$  есть скорость ларморовского вращения [т. е. описывается уравнением (8.14)], а  $\mathbf{v}_d$  — постоянная скорость дрейфа. Подставляя сумму (8.25) в уравнение (8.24), получаем векторное уравнение для  $\mathbf{v}_d$

$$\mathbf{F}_{\perp} + \frac{Ze}{c} [\mathbf{v}_d \times \mathbf{H}] = 0.$$

Умножая его векторно на  $\mathbf{H}$  и учитывая известную формулу для двойного векторного произведения  $[[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \times \mathbf{H}] = -H^2\mathbf{v}$ , находим

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{ZeH^2} [\mathbf{F} \times \mathbf{H}] = \frac{c}{ZeH} [\mathbf{F} \times \mathbf{h}], \quad (8.26)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$  — единичный вектор в направлении магнитного поля.

Таким образом, траектория движения в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, образуется наложением вращения по ларморовской окружности и движения (дрейфа) центра этой окруж-

ности со скоростью (8.26) в направлении, перпендикулярном действующей силе.

Происхождение дрейфа легко понять, рассмотрев качественно движение заряженной частицы в плоскости перпендикулярной магнитному полю. В отсутствие силы  $\mathbf{F}$  частица движется по окружности с радиусом  $\rho_H$  (рис. 8.11, а). Сила  $\mathbf{F}_\perp$  ускоряет частицу на участке траектории  $abc$  и тормозит на участке  $cda$ . Скорость максимальна в точке  $c$ . Поэтому участок  $bcd$  частица проходит со средней скоростью, большей, чем в отсутствие силы. Соответственно большим оказывается и средний радиус кривизны траектории ( $\rho_H \sim$

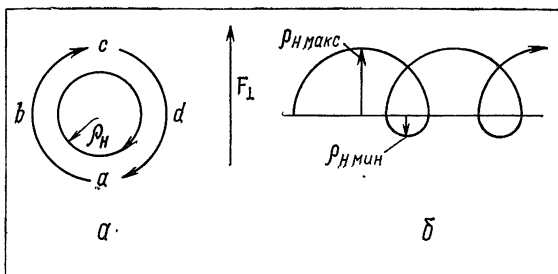


Рис. 8.11

$\sim v_\perp$ ). На нижнем участке ( $dab$ ) картина противоположна. В итоге траектория приобретает вид, показанный на рис. 8.11, б. Эта кривая называется трахоидой.

Для случая, когда сила, действующая на частицу, обусловлена электрическим полем, направление и величина скорости дрейфа не зависят от заряда и вообще от свойств частицы. Действительно, подставляя в (8.26)  $\mathbf{F} = Ze\mathbf{E}$ , получаем формулу для скорости электрического дрейфа в виде\*

$$\mathbf{v}_{dE} = \frac{c}{H} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}]. \quad (8.27)$$

Независимость скорости дрейфа от заряда частицы связана, очевидно, с тем, что обе силы (электрическая и лоренцева), баланс которых определяет дрейф, пропорциональны заряду.

То, что скорости дрейфа одинаковы для частиц различной природы, можно объяснить также, основываясь на преобразованиях Лоренца для электрического поля. При  $v \ll c$  они дают связь между полями в движущейся ( $\mathbf{E}'$ ) и неподвижной ( $\mathbf{E}$ ) системах отсчета:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]/c,$$

Видно, что в системе отсчета, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}_d$ ,  $\mathbf{E}' = 0$ . Поэтому в ней заряженные частицы не испытывают дрейфа. Отсюда

\* Следует помнить, что соотношения (8.26) и (8.27) получены в нерелятивистском приближении. Они справедливы поэтому лишь при  $v \ll c$ , т. е. при  $E \ll H$ .

следует, что в лабораторной системе отсчета скорость дрейфа заряженных частиц любого сорта одинакова.

Рассмотрим теперь движение заряженных частиц в поле медленно меняющихся сил, полагая, что выполняются неравенства (8.22), (8.23), т. е. что характерное время изменения силы много больше ларморовского периода, а характерный масштаб много больше ларморовского радиуса. В этом случае можно найти решение уравнения движения (8.24) для компоненты скорости, перпендикулярной магнитному полю

$$m \frac{dv_{\perp}}{dt} = \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}, t) + \frac{Ze}{c} [\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{H}] \quad (8.28)$$

методом последовательных приближений, пренебрегая в нулевом приближении изменениями силы.

В соответствии с таким подходом представим скорость частицы  $\mathbf{v}_{\perp}$  в виде суммы

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_{\omega} + \mathbf{v}_d^{(0)} + \mathbf{v}_d^{(1)} + \mathbf{v}_d^{(2)} + \dots, \quad (8.29)$$

где  $\mathbf{v}_{\omega}$  — по-прежнему скорость ларморовского вращения описываемая уравнением (8.14);  $\mathbf{v}_d^{(0)}$  — скорость дрейфа в нулевом приближении, определяемая равенством (8.26);  $\mathbf{v}_d^{(1)}$ ,  $\mathbf{v}_d^{(2)}$  — поправки к скорости дрейфа, соответствующие первому, второму приближению и т. д. Подставляя (8.29) в (8.28), получаем в первом приближении

$$m \frac{dv_d^{(0)}}{dt} + \dots = \frac{Ze}{c} [(\mathbf{v}_d^{(1)} + \dots) \times \mathbf{H}],$$

где справа и слева оставлены только первые не исчезающие члены, поскольку  $\mathbf{v}_d^{(0)} \gg \mathbf{v}_d^{(1)} \gg \mathbf{v}_d^{(2)}$ . Умножая это уравнение векторно на  $\mathbf{H}$ , находим соотношение между  $\mathbf{v}_d^{(1)}$  и  $\mathbf{v}_d^{(0)}$

$$\mathbf{v}_d^{(1)} = \frac{mc}{ZeH} \left[ \frac{d\mathbf{v}_d^{(0)}}{dt} \times \mathbf{h} \right]. \quad (8.30)$$

Аналогичным образом можно найти и поправки более высокого порядка. Естественно, что отношение  $\mathbf{v}_d^{(1)}$  к  $\mathbf{v}_d^{(0)}$  (как и отношение поправок более высокого порядка к  $\mathbf{v}_d^{(1)}$ ) в рассматриваемом случае мало. По порядку оно равно  $v_d^{(1)}/v_d^{(0)} \approx 1/\omega_H \tau_F \ll 1$ , где  $\tau_F$  — характерное время изменения скорости  $\mathbf{v}_d^{(0)}$  или силы  $\mathbf{F}$  вдоль траектории. Следует, однако иметь в виду, что направление  $\mathbf{v}_d^{(1)}$ , как видно из (8.30), отличается от  $\mathbf{v}_d^{(0)}$ . Поэтому во многих случаях поправку  $\mathbf{v}_d^{(1)}$  необходимо учитывать. В то же время поправки более высоких приближений менее существенны, так как они лишь слегка изменяют компоненты скорости.

Подставляя в (8.30) выражение (8.26), получаем формулу для  $\mathbf{v}_d^{(1)}$ :

$$\mathbf{v}_d^{(1)} = \frac{mc^2}{Z^2 e^2 H^2} \frac{d\mathbf{F}_{\perp}}{dt} = \frac{1}{m\omega_{II}^2} \frac{d\mathbf{F}_{\perp}}{dt}. \quad (8.31)$$

Входящая в (8.31) производная  $dF_{\perp}/dt$  дает изменение силы  $F_{\perp}$  вдоль траектории, соответствующей нулевому приближению. Она может быть представлена в виде

$$\frac{dF_{\perp}}{dt} = \frac{\partial F_{\perp}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) F \approx \frac{\partial F_{\perp}}{\partial t} + (v_{\parallel} \text{ grad}) F_{\perp} + (\mathbf{v}_d^{(0)} \text{ grad}) F_{\perp}. \quad (8.32)$$

Здесь опущено быстро осциллирующее слагаемое  $(\mathbf{v}_{\omega} \text{ grad}) F_{\perp}$ . Соответствующая ему осцилляция силы может повлиять лишь на скорость ларморовского вращения. Ее отношение к лоренцевой силе имеет порядок

$$\frac{\rho_H F_{\perp}}{L} \left/ \frac{e}{c} H v_{\omega} \right. \approx \frac{v_d^{(0)}}{v_{\omega}} \frac{\rho_H}{L},$$

и обычно ее можно не учитывать.

Формула (8.31) показывает, что скорость  $\mathbf{v}_d^{(1)}$  пропорциональна полной производной от силы  $F_{\perp}$  по времени, определяющей изменение силы вдоль траектории частицы. При неизменном направлении  $F_{\perp}$  скорость  $\mathbf{v}_d^{(1)}$  параллельна силе, в отличие от скорости основного дрейфа  $\mathbf{v}_d^{(0)}$ , которая перпендикулярна силе  $F_{\perp}$ . В соответствии с (8.30) компоненту движения, определяемую скоростью  $\mathbf{v}_d^{(1)}$ , можно рассматривать как дрейф под действием силы инерции  $m d\mathbf{v}_d^{(0)}/dt$  [ср. (8.26) и (8.30)]. Поэтому эта компонента получила название *инерциального дрейфа*.

Для случая, когда на заряженную частицу действует электрическая сила  $F_{\perp} = ZeE_{\perp}$ , формула (8.31) приобретает вид

$$\mathbf{v}_{dE}^{(1)} = \frac{mc^2}{ZeH^2} \frac{dE}{dt}. \quad (8.33)$$

Она описывает инерциальный дрейф электронов и ионов в медленно изменяющемся электрическом поле. Существенно отметить, что в отличие от основной компоненты скорости электрического дрейфа  $\mathbf{v}_{dE}^{(0)}$  скорости инерциального дрейфа ионов и электронов имеют различный знак и намного различаются по величине; скорость инерциального дрейфа электронов пренебрежимо мала по сравнению с ионной (так как  $v_{dE}^{(1)} \sim m$ ).

Нетрудно установить физическую картину инерциального дрейфа. Изменение силы  $F_{\perp}$  приводит к искажению траектории движения. Пусть, например, сила увеличивается либо со временем, либо в пространстве в направлении дрейфа  $\mathbf{v}_d^{(0)}$  (рис. 8.12). Тогда частица, набравшая энергию в области  $I$ , потеряет ее в области  $II$  на меньшем участке траектории, так как  $F_I < F_{II}$ . Точка поворота  $3$  окажется смещенной в направлении силы относительно точки  $1$ . Точка  $4$  смещена относительно точки  $2$  в том же направлении, так как  $F_{III} > F_{II}$ . Поскольку  $F_{IV} > F_{III}$  и т. д., процесс повторяется, и траектория оказывается наклонной по отношению к эквипотенциали. Легко сообразить, что с увеличением массы и соответственно перио-

да обращения частицы по ларморовскому кружку наклон траектории увеличивается.

Таким образом, в процессе дрейфа происходит постепенное смещение ведущего центра в сторону возрастающей силы. Частица постепенно увеличивает свою поперечную энергию, так как при смещении вдоль силы совершается работа. Особенностью этого процесса является то, что при постоянном  $\text{grad } F$  или постоянной  $\partial F/\partial t$

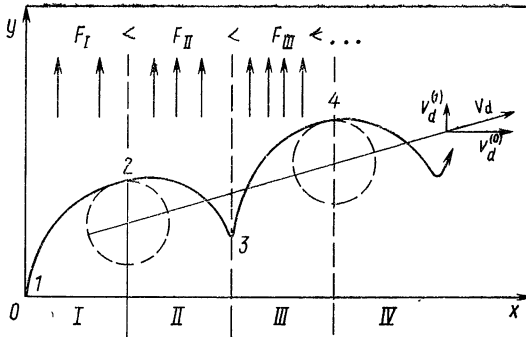


Рис. 8.12

энергия дрейфового движения частицы изменяется со временем линейно. Приращение энергии за время  $\delta U$  определяется смещением вдоль силы  $\delta r_F$ . Оно равно

$$\delta r_F = v_d^{(1)} \delta t = (1/m\omega_H^2) \delta F_{\perp},$$

где  $\delta F_{\perp}$  — полное изменение силы  $F_{\perp}$  при смещении ведущего центра по траектории за время  $\delta t$ . Соответственно

$$\delta U = F_{\perp} \cdot \delta r_F = \frac{1}{m\omega_H^2} F_{\perp} \cdot \delta F_{\perp} = \frac{1}{2\omega_H^2} \delta \left( \frac{F_{\perp}^2}{2} \right) = \delta \left[ \frac{1}{2} (m(v_d^{(0)})^2) \right]. \quad (8.34)$$

Заметим, что кинетическая энергия, связанная с вращательным движением, в рассмотренном приближении зависит только от начальных условий и поэтому в поле меняющихся сил остается неизменной. Соответственно неизменным остается магнитный момент  $\mu = = K_{\perp}/H$ .

#### § 8.4. Движение заряженных частиц в медленно изменяющемся магнитном поле

Рассмотрим движение заряженных частиц в медленно изменяющемся магнитном поле, предполагая, что характерное время его изменения много больше периода обращения по ларморовской орбите, а характерный масштаб много больше ларморовского радиуса (8.22), (8.23). Прежде всего определим, как изменяется при таком



движении скорость вращения частицы по ларморовской окружности. Предположим сначала, что магнитное поле однородно в пространстве, но изменяется со временем. Изменение магнитного поля приводит, как известно, к появлению вихревого электрического поля, определяемого одним из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{H}/\partial t.$$

Под действием этого поля частица изменяет свою поперечную энергию. Изменение энергии за один оборот по ларморовской окружности равно, очевидно,

$$\delta K_{\perp} = Ze \oint_{(l)} E_{\perp} dt = - Ze \int_{(S)} (\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{E}) dS = - \frac{Ze}{c} \int_{(S)} \frac{\partial H}{\partial t} dS, \quad (8.35)$$

где криволинейный интеграл  $\oint$  берется по ларморовской окружности,  $E_{\perp}$  — компонента электрического поля, параллельная вращательной скорости (здесь использована формула Стокса для перехода к интегралу по площади и учтено, что направление нормали противоположно направлению магнитного поля). Так как зависимость напряженности магнитного поля от времени является слабой, то на интервале, равном одному периоду обращения частицы по ларморовской окружности, ее можно аппроксимировать линейной функцией, т. е. считать  $\partial H/\partial t = \text{const}$ . Полагая также, что за период  $\rho_H$  меняется незначительно, находим

$$\delta K_{\perp} = \frac{Ze}{c} \int_{(S)} \frac{\partial H}{\partial t} dS \approx \frac{Ze}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \pi \rho_H^2 = \frac{2\pi K_{\perp}}{\omega_H} \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (8.36)$$

Изменение кинетической энергии в единицу времени получаем, умножая  $\delta K_{\perp}$  на число оборотов в единицу времени  $\omega_H/2\pi$ . Тогда

$$\partial K_{\perp}/\partial t = (K_{\perp}/H)\partial H/\partial t. \quad (8.37)$$

Уравнение (8.37) показывает, что энергия вращения частицы  $K_{\perp} = mv_{\perp}^2/2$  изменяется пропорционально магнитному полю. Поскольку в соответствии с определением магнитного момента  $\mu$  (8.20)  $K_{\perp} = \mu H$ , уравнение (8.37) свидетельствует о постоянстве магнитного момента в процессе движения:

$$d\mu/dt = 0, \quad \mu = \text{const}. \quad (8.38)$$

Полученный результат распространяется и на случай, когда магнитное поле неоднородно в пространстве. Действительно в системе координат, движущейся вместе с ведущим центром, неоднородность магнитного поля в пространстве переходит в зависимость  $H$  от времени. Следовательно, в слабонеоднородных полях магнитный момент частицы также есть инвариант движения. Его называют

*адиабатическим инвариантом.* Разумеется вывод о постоянстве магнитного момента  $\mu$  является приближенным. Однако точность сохранения  $\mu$  при выполнении условий (8.22), (8.23) весьма велика. Как показывает более детальный анализ, его изменение оказывается экспоненциально малой функцией  $1/\omega_{Hr}$  или  $\rho_H/L$ .

Постоянство магнитного момента позволяет определить изменение поперечной энергии при движении заряженной частицы в медленно изменяющемся магнитном поле  $K_{\perp} = \mu H$ . Как уже отмечалось, при изменении  $H$  во времени соответствующее изменение  $K_{\perp}$  обусловлено получением энергии от внешнего электрического поля. В случае, когда магнитное поле постоянно во времени, но неоднородно в пространстве, полная энергия частицы в лабораторной системе координат остается неизменной, так как вихревое электрическое поле отсутствует, а единственная действующая на частицу сила (сила Лоренца) направлена перпендикулярно скорости. Изменение поперечной энергии происходит за счет изменения продольной при условии  $K = K_{\perp} + K_{\parallel} = \text{const}$ .

В магнитном поле частица всегда движется так, что плоскость ларморовской окружности нормальна к силовой линии, проходящей через центр этой окружности. Если имеется продольная неоднородность магнитного поля (см., например, рис. 8.5), то силовые линии на ларморовской окружности конечного радиуса не перпендикулярны к рассматриваемой плоскости. Соответственно сила Лоренца кроме радиальной составляющей имеет компоненту, параллельную оси  $z$  (рис. 8.13):

$$|F_{Lz}| = -(ze/c)v_{\phi}H_r.$$

Эта сила направлена в сторону более слабого магнитного поля. Она приводит к изменению продольной компоненты скорости  $v_z$  за счет поворота полной скорости  $v$ . Если частица движется в сторону нарастающего поля, то продольная компонента скорости уменьшается и в некоторой точке  $v_z$  становится равной нулю. Так как при этом  $F_{Lz}$  не обращается в нуль, частица начинает двигаться в противоположном направлении (имеет место отражение частицы от нарастающего магнитного поля). В связи с этим такую конфигурацию называют *магнитным зеркалом* или *пробкой*. Если есть только поперечный градиент магнитного поля (см. рис. 8.4), то компонента скорости  $v_z$  в отсутствие внешних сил остается неизменной. Так как  $K = \text{const}$ , то должна быть постоянна и поперечная энергия частицы. Тогда из условия  $|\mu| = \text{const}$  следует, что траектория ведущего центра должна лежать на поверхности  $H = \text{const}$ . Он может двигаться только нормально к градиенту напряженности магнитного поля.

Рассмотрим дрейф заряженных частиц в медленно изменяющемся магнитном поле. Для случая, когда однородное магнитное поле меняется со временем, дрейф обусловлен возникающим при таком изменении вихревым электрическим полем. Так, в цилиндрически-симметричной области, в которой силовые линии вихревого поля

являются окружностями, дрейф направлен по радиусу (рис. 8.14). Напряженность электрического поля при этом определяется законом индукции

$$2\pi r E_{\varphi} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \pi r^2 \frac{dH}{dt}$$

( $r$  — расстояние от оси симметрии;  $\Phi = \pi r^2 H$  — магнитный поток). Отсюда

$$E_{\varphi} = -\frac{1}{2c} r \frac{dH}{dt}. \quad (8.39)$$

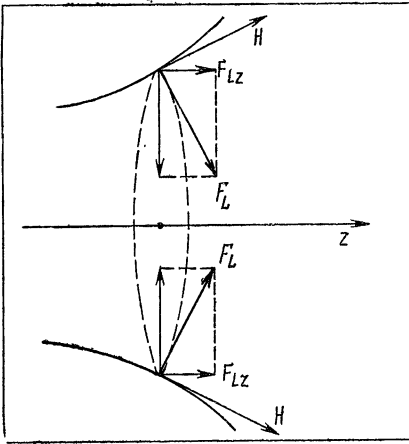


Рис. 8.13

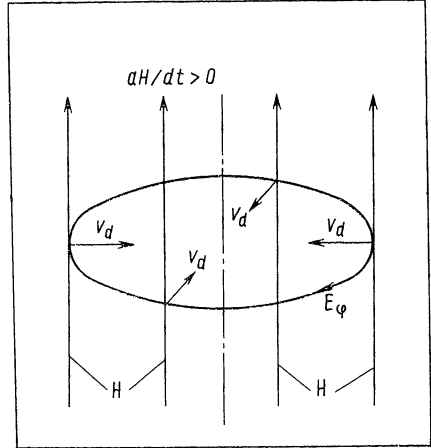


Рис. 8.14

Это поле определяет скорости дрейфа [см. (8.27)]

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{H} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}], \quad v_{dr} = -\frac{r}{2H} \frac{dH}{dt}.$$

Уравнение для дрейфовой траектории приобретает вид

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2H} \frac{dH}{dt}. \quad (8.40)$$

Интегрирование уравнения приводит к соотношениям

$$r^2 H = \text{const}, \quad \frac{r}{r_0} = \left( \frac{H_0}{H} \right)^{1/2}. \quad (8.41)$$

Они показывают, что при увеличении магнитного поля заряженная частица дрейфует по радиусу к оси симметрии, при уменьшении поля — в противоположном направлении. В обоих случаях дрейф происходит так, что магнитный поток  $\Phi = \pi r^2 H$  остается постоянным.

Обсудим теперь дрейф для неоднородного, но постоянного во времени поля. Этот дрейф может рассматриваться, как результат воздействия двух средних сил, действующих на частицу, вращающуюся по ларморовской окружности. Одна из них связана с поперечной, другая с продольной компонентами скорости. Силу, связанную с поперечными компонентами, можно определить с помощью магнитного момента. Она эквивалентна силе, действующей на магнитный диполь, которая равна

$$\mathbf{F}_\mu = \text{grad} (\mu H).$$

Учитывая, что  $\mu$  антипараллельно  $\mathbf{H}$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\mu &= -\text{grad} (\mu H) = \\ &= -\mu \text{grad} H, \end{aligned} \quad (8.42)$$

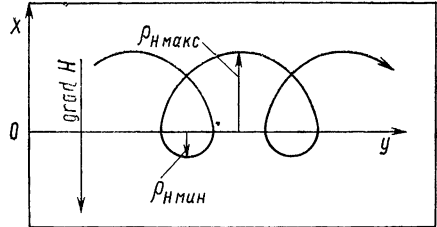


Рис. 8.15

поскольку  $\mu = \text{const}$ . Поперечная компонента этой силы приводит к дрейфу, скорость которого найдем с помощью (8.26):

$$\mathbf{v}_d^\mu = \frac{c [\mathbf{F}_\mu \times \mathbf{h}]}{ZeH} = \frac{\mu c [\mathbf{h} \times \text{grad} H]}{ZeH}.$$

Используя соотношение (8.20) для  $\mu$ , получаем

$$\mathbf{v}_d^\mu = \frac{cK_\perp}{ZeH^2} [\mathbf{h} \times \text{grad} H]. \quad (8.43)$$

Значение скорости  $v_d^\mu$  равно

$$v_d^\mu = \frac{cmv_\perp^2}{2eH} \frac{\text{grad}_\perp H}{H} \approx \frac{1}{2} v_\perp \rho_\perp \frac{\text{grad}_\perp H}{H}. \quad (8.44)$$

Как видно, при выполнении неравенства (8.22) скорость дрейфа гораздо меньше скорости ларморовского вращения  $v_d^\mu/v_\perp \approx \rho_H/L \ll \ll 1$ . Заметим, что дрейф, связанный с ларморовским вращением в неоднородном магнитном поле, можно рассматривать и без введения диамагнитной силы; он определяется непрерывным медленным изменением радиуса кривизны траектории в плоскости перпендикулярной полю. Поскольку с ростом магнитного поля радиус кривизны  $\rho_H \sim v_\perp/\omega_H$  уменьшается, в процессе ларморовского вращения частицы попеременно проходят участки с большим и меньшим радиусами (рис. 8.15). Такое изменение приводит к дрейфу в направлении перпендикулярном градиенту поля, аналогично тому, как это происходит при наличии силы (см. рис. 8.11).

Дрейф, связанный с движением вдоль магнитного поля, возникает, когда силовые линии криволинейны. При этом на частицу, движущуюся вдоль силовой линии, действует центробежная сила

$F_R = mv_{\parallel}^2 \mathbf{R}/R^2$ , под действием которой возникает дрейф со скоростью

$$\mathbf{v}_d^R = mv_{\parallel}^2 \frac{c [\mathbf{R} \times \mathbf{H}]}{ZeR^2 H^2}. \quad (8.45)$$

Радиус кривизны связан с градиентом магнитного поля соотношением (8.9). Отсюда  $\mathbf{v}^R/d$  можно записать в форме

$$\mathbf{v}_d^R = \frac{cmv_{\parallel}^2}{ZeH^2} \left[ \mathbf{H} \times \left( \frac{\mathbf{H}}{H} \text{grad} \right) \frac{\mathbf{H}}{H} \right]. \quad (8.46)$$

Значение этой компоненты скорости дрейфа равно

$$v_d^R = cmv_{\parallel}^2 / eHL_{\parallel} \approx (v_{\parallel}^2 / v_{\perp}) \rho_H / L_{\parallel},$$

где  $L_{\parallel} = |(\mathbf{h} \text{grad}_{\parallel}) \mathbf{h}|^{-1}$ . Как и в предыдущем случае, при выполнении неравенства (8.22) скорость  $v_d^R$  значительно меньше скорости ларморовского вращения.

Если силовые линии представляют собой плоские кривые, и токи в объеме отсутствуют, то (8.46) можно упростить, используя (8.11):

$$\mathbf{v}_d^R = \frac{cmv_{\parallel}^2}{Ze} \left[ \frac{\mathbf{H}}{H^3} \times \text{grad} H \right]. \quad (8.47)$$

При такой конфигурации магнитного поля полная дрейфовая скорость частицы, связанная с градиентом магнитного поля, определяется суммой (8.43) и (8.47)

$$\mathbf{v}_d^H = \frac{c}{ZeH^2} (K_{\perp} + 2K_{\parallel}) [\mathbf{h} \times \text{grad}_{\perp} H]. \quad (8.48)$$

### § 8.5. Удержание заряженных частиц некоторыми магнитными конфигурациями

При анализе возможности использования тех или иных конфигураций магнитного поля в качестве магнитных ловушек для удержания плазмы первой задачей является изучение движения отдельных заряженных частиц. Траектории заряженных частиц в магнитном поле зависят, очевидно, не только от локальных, но и от интегральных характеристик поля: структуры силовых линий, их замкнутости или незамкнутости, наличия магнитных поверхностей и т. п. Здесь будут кратко рассмотрены условия удержания заряженных частиц для двух конфигураций, используемых в качестве магнитных ловушек (открытых и замкнутых).

Простейшая открытая магнитная ловушка имеет аксиально-симметричную конфигурацию с продольным полем, усиливающимся к обоим концам. Такая конфигурация может быть создана с помощью двух витков или двух соленоидов. Распределение силовых линий иллюстрирует рис. 8.16. Области магнитного поля вблизи соленоидов представляют собой *магнитные пробки*. Траектория движения заряженной частицы в открытой магнитной ловушке является

суперпозицией движения вдоль силовой линии, ларморовского вращения и дрейфа ларморовского центра. Поскольку дрейф перпендикулярен  $\mathbf{H}$  и  $\text{grad } H$ , он направлен по азимуту. При движении частиц из центральной области в сторону нарастающего магнитного поля продольная компонента лоренцевой силы приводит к уменьшению продольной компоненты скорости и соответственно к увеличению ее поперечной компоненты. В результате частицы с достаточно большой поперечной скоростью не могут дойти до плоскости максимального магнитного поля и отражаются от магнитных пробок. В то же время частицы с малым отношением  $v_{\perp}/v_{\parallel}$  проходят

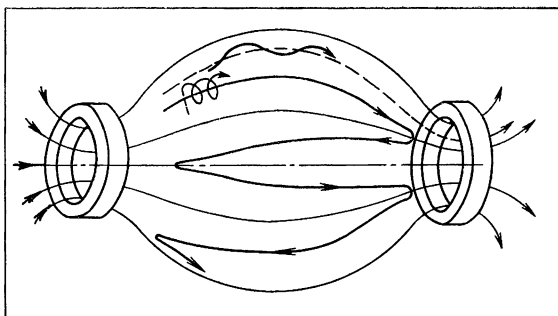


Рис. 8.16

через магнитные пробки и уходят из ловушки. Типичные траектории движения ларморовских центров запертой (сплошная линия) и пролетной (пунктир) частиц представлены на рис. 8.16.

Количественные характеристики условий отражения заряженной частицы от магнитной пробки можно получить, исходя из закона сохранения полной кинетической энергии и из сохранения магнитного момента при движении частицы в магнитном поле:

$$K = K_{\perp} + K_{\parallel} = \text{const}; \quad \mu = K_{\perp}/H = \text{const}.$$

Пусть в центре системы, где напряженность магнитного поля минимальна ( $H_0$ ), частица имеет компоненты полной скорости  $v_{\parallel 0}$ ,  $v_{\perp 0}$ , т. е. вектор скорости  $\mathbf{v}$  образует с направлением силовой линии некоторый угол  $\vartheta_0$  ( $\sin^2 \vartheta_0 = v_{\perp 0}^2/v^2 = K_{\perp 0}/K$ ). При движении частицы в сторону пробки в силу условия  $|\mu| = K_{\perp}/H = \text{const}$  величина  $K_{\perp}$  растет, так как постепенно меняется угол между  $\mathbf{v}$  и силовой линией. В точке поворота вся кинетическая энергия частицы переходит в энергию поперечного движения и угол  $\vartheta$  оказывается равным  $\pi/2$ . Напряженность поля в точке поворота определяется равенством

$$H = H_0 \frac{K}{K_{\perp 0}} = \frac{H_0}{\sin^2 \vartheta_0}. \quad (8.49)$$

Рассматриваемая частица не выйдет за пределы пробок, если напряженность поля в каждой из пробок  $H_1$  больше, чем  $H_0/\sin^2 \vartheta_0$ .

Таким образом, при заданном значении  $H_0/H_1$  запертыми будут только те частицы, для которых угол  $\vartheta_0$  удовлетворяет неравенству

$$\sin^2 \vartheta_0 > H_0/H_1. \quad (8.50)$$

Величина  $H_0/H_1$  называется «пробочным» отношением.

Из (8.49), (8.50) видно, что условие удержания частицы не зависит от абсолютной величины скорости, а определяется только соотношением между  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  в центральном сечении ловушки. Все частицы, для которых не удовлетворяется соотношение (8.50), свободно пролетают через пробки системы. Иными словами, финитное дви-

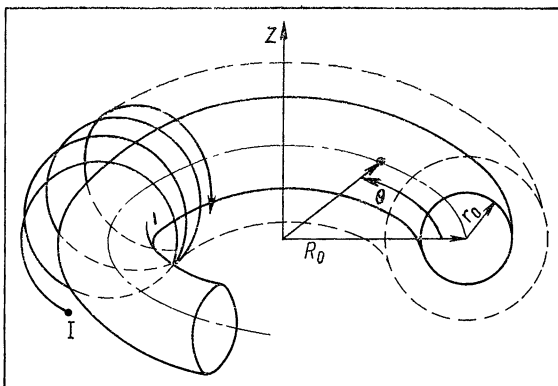


Рис. 8.17

жение в ловушке совершают только те частицы, векторы скорости которых лежат в интервале углов  $\vartheta_0$  от  $\vartheta_{0m}$  до  $\pi - \vartheta_{0m}$ , где  $\vartheta_{0m}$  равно  $\vartheta_{0m} = \arcsin \sqrt{H_0/H_1}$ . Конус в пространстве скоростей, соответствующий углам  $\vartheta_{0m}$ , называется конусом потерь.

Обсудим теперь движение заряженных частиц в замкнутой магнитной ловушке. Наиболее простая замкнутая конфигурация образуется концентрическими круговыми силовыми линиями в отсутствие объемных токов. Такая конфигурация может быть получена, например, с помощью соленоида, ось которого свернута в кольцо (тороидальный соленоид, рис. 8.17). Эта кольцевая ось обычно называется малой осью тора (ось  $\Theta$ ), в отличие от большой оси  $Z$ , которая представляет собой ось симметрии всей системы. Обозначенные на рис. 8.17 величины  $R_0$  и  $r_0$  называются соответственно большим и малым радиусами тороидальной поверхности. Легко сообразить, что такая конфигурация магнитного поля не является ловушкой. Действительно, как кривизна силовых линий, так и связанная с ней неоднородность магнитного поля [см. (8.11)] приводят к дрейфу перпендикулярно плоскости, в которой лежит силовая линия. Этот дрейф ничем не ограничен.

Ситуация существенно меняется, если в системе имеется вращательное преобразование (см. § 8.1). Рассмотрим, например, движе-

ние частиц в некоторой тороидальной системе, магнитное поле в которой имеет конфигурацию, изображенную на рис. 8.2\*. Это поле образуется благодаря суперпозиции двух компонент  $H_\theta$ ,  $H_\varphi$ . Как следует из (8.11), компонента поля  $H_\theta$  уменьшается с увеличением  $R$ . Компонента  $H_\varphi$ , вообще говоря, тоже непостоянна в пространстве. Однако пренебрежем зависимостью  $H_\varphi$  от координат, полагая угол вращательного преобразования малым, т. е. будем считать, что  $H_\varphi \ll H_\theta$ . Соответственно основной вклад в дрейф частиц будет вносить неоднородность  $H_\theta$ . Очевидно, что винтовые силовые линии, характеризующие рассматриваемую конфигурацию, сгущаются на внутренних участках тороидальной поверхности (рис. 8.18,

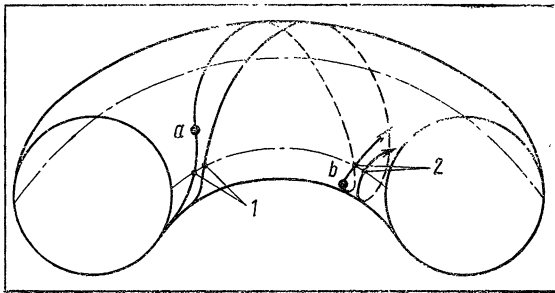


Рис. 8.18

точки 1, 2). Поэтому характер движения частиц вдоль силовых линий аналогичен движению в ловушках с магнитными пробками. При движении частиц от внешней поверхности тора к внутренней (т. е. в область большого поля) их продольная скорость уменьшается, частицы с достаточно большим отношением  $v_{\perp 0}/v_{\parallel 0}$  испытывают отражение, т. е. оказываются запертыми на малом участке силовой линии, например между точками  $a$  и  $b$  (см. рис. 8.18). Поэтому в зависимости от отношения  $v_{\perp 0}/v_{\parallel 0}$  частицы можно разбить на две группы. Одни могут совершать неограниченное число оборотов внутри тора вокруг оси  $Z$  (так называемые *пролетные частицы*). Ко второй группе относятся *запертые частицы*.

Рассмотрим траекторию пролетной частицы. Поскольку тороидальная конфигурация симметрична относительно большой оси тора, то любые движения вдоль малой оси не влияют на удержание частиц в замкнутом объеме. Поэтому будем интересоваться «проекцией» траектории частиц на плоскость перпендикулярную малой оси тора, т. е. рассмотрим изменение координат  $r$  и  $\varphi$  ведущего центра\*\* (рис. 8.19). Проекция винтовых силовых линий на эту пло-

\* Такая конфигурация магнитного поля характерна, в частности, для магнитных ловушек типа «Токамак» широко используемых в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу.

\*\* Будем условно называть проекцией кривую, образованную координатами  $r$  и  $\varphi$  независимо от тороидальной координаты  $\theta$ .



скость определяются величиной и направлением компоненты  $H_\phi$  поля и при сделанных предположениях о независимости  $H_\phi$  от координат представляют собой концентрические окружности, изображенные на рис. 8.19 пунктирными линиями. Если бы дрейф, связанный с  $\text{grad } H$ , отсутствовал, то и проекции траекторий совпадали бы с проекциями силовых линий. Для пояснения влияния дрейфа выберем знак заряда частицы и направление магнитного поля такими, чтобы скорость  $v_d^H$  была направлена кверху (см. рис. 8.19). Предположим также, что частица начинает движение из точки 1 и направление  $v_{\parallel}$  обуславливает перемещение ведущего центра в

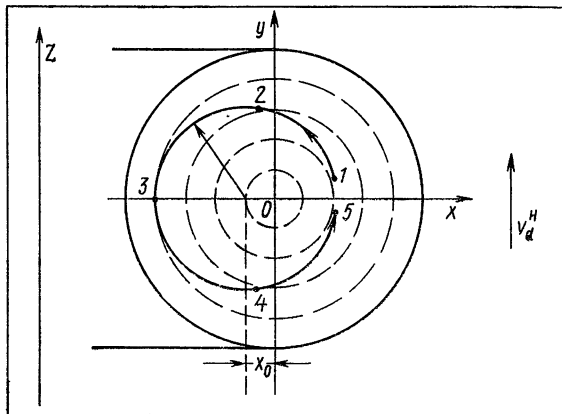


Рис. 8.19

рассматриваемой проекции против часовой стрелки. Дрейф приводит к непрерывному перемещению траектории вверх. На участке траектории 1, 2, 3, как видно из рисунка, смещение вверх означает переход на внешние по отношению к исходной силовые линии. В нижней половине (участок траектории 3, 4, 5) частица продолжает дрейфовать вверх. Но теперь это соответствует возвращению на внутренние силовые линии. Из условия симметрии относительно плоскости, в которой лежит малая ось тора, следует, что дрейфовые смещения в верхней и нижней части взаимно компенсируются, т. е. проекция траектории должна представлять собой замкнутую кривую.

Найдем уравнение проекции траектории. Для этого введем локальную прямоугольную систему координат (см. рис. 8.19). Движение ведущего центра частицы складывается из перемещения вдоль силовой линии со скоростью  $v_{\parallel}$  и дрейфа вдоль оси  $y$ . Проекция первой составляющей скорости на рассматриваемую плоскость равна  $v_{\parallel} H_\phi / H = v_\phi$ . Она направлена по касательной к проекции силовой линии. Соответственно скорости ведущего центра вдоль

осей  $x$  и  $y$  определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -v_\varphi \sin \varphi = -v_{\parallel} \frac{H_\varphi}{H} \frac{y}{r}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = v_\varphi \cos \varphi + v_d^H = v_{\parallel} \frac{H_\varphi}{H} \frac{x}{r} + v_d^H. \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

Здесь  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Исключая время из (8.51), получаем

$$x dx + y dy = \frac{1}{2} d(r^2) = - \frac{H v_d^H}{H_\varphi v_{\parallel}} r dx$$

и далее

$$dr/dx = -v_d^H H / H_\varphi v_{\parallel}. \quad (8.52)$$

Для условий, когда  $H$ ,  $H_\varphi$  и  $v_{\parallel}$  относительно мало изменяются в области движения, правую часть уравнения можно приближенно считать постоянной. При этом решение уравнения приобретает вид  $r = -\alpha x + r_0$ , где  $\alpha = (H/H_\varphi) v_d^H / v_{\parallel} = \text{const}$ . Нетрудно убедиться, что при  $\alpha < 1$  проекция траектории, определяемая этим равенством, представляет собой замкнутую кривую. Ее легко найти; в частности, при  $\alpha \ll 1$ . В этом случае из соотношения  $r^2 = x^2 + y^2$ , пренебрегая величинами пропорциональными  $\alpha^2$ , получаем

$$(x + \alpha r_0)^2 + y^2 = r_0^2. \quad (8.53)$$

Это уравнение окружности, смещенное относительно центра на расстояние  $x_0 = \alpha r_0$ . Поскольку  $x_0$  много меньше  $r_0$ , можно говорить о малом искажении траектории тороидальным дрейфом.

Перейдем к анализу траекторий запертых частиц. Так же как и для пролетных частиц, будем рассматривать проекцию траектории на плоскость  $xy$  (рис. 8.20). Пусть частица движется из точки  $I$ , как это показано на рисунке. Предположим, что соотношение продольных и поперечных скоростей таково, что при отсутствии дрейфа частица испытывала бы отражение в точках  $a$  и  $b$ . Наличие дрейфа так же, как и для пролетной частицы, приводит к тому, что одновременно с продольным перемещением частица непрерывно дрейфует вверх относительно исходной силовой линии. Так как дрейф не изменяет отношения  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$ , то частица теперь отражается в точке  $a'$ , в которой напряженность поля равна напряженности в точке  $a$ . После поворота направление продольной скорости оказывается противоположным, а направление дрейфа не изменяется. Поэтому, возвращаясь в исходную плоскость  $xy$ , частица продолжает смещаться в сторону внешних силовых линий. На нижнем участке траектории дрейф «прижимает» частицу к оси  $x$ , т. е. приводит к ее смещению в сторону внутренних силовых линий. В результате образуется замкнутая кривая, получившая название «банановой» траектории.

Найти ширину «банана»  $\Delta r(x)$  можно, используя уравнение (8.52), в котором следует учесть изменение  $v_{\parallel}$  вдоль траектории. Пусть в точке отражения напряженность поля равна  $H_a$ . Тогда из условия  $\mu = \text{const}$  имеем

$$K_{\perp}/H = K/H_a = (K - K_{\parallel})/H, \quad v_{\parallel} = \pm v \sqrt{1 - H/H_a}.$$

Зависимость магнитного поля от координат определяется при  $H_{\phi} \ll \ll H_{\Theta}$  компонентой  $H_{\Theta}$ . В поле, создаваемом внешним тороидальным соленоидом:

$$H_{\Theta} = H_0 \frac{R_0}{R_0 + x} \approx H_0 \left( 1 - \frac{x}{R_0} \right)$$

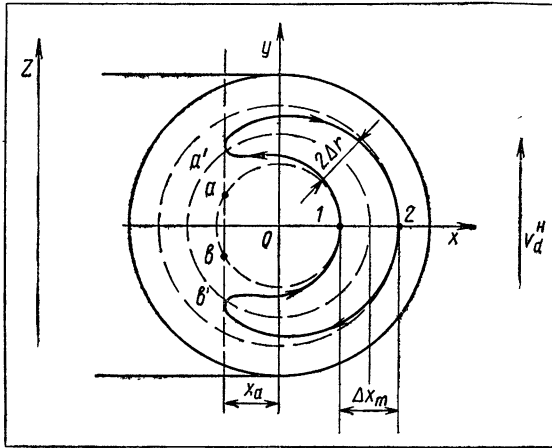


Рис. 8.20

при  $x \ll R_0$ . Используя эту зависимость, получаем

$$v_{\parallel} \approx \pm v \sqrt{1 - \frac{1 - x/R_0}{1 - x_a/R_0}} \approx \pm v \frac{\sqrt{x - x_a}}{\sqrt{R_0}},$$

где  $x_a$  — координата точки поворота  $a$ . Так как  $v_{\parallel} \ll v_{\perp}$  для запертых частиц, то  $v_{\perp} \sim v$  и  $v_d^H$  можно считать постоянной. Подставляя  $v_{\parallel}$  в (8.52) и интегрируя, находим

$$r - r_1 = \Delta r(x) = \pm \frac{2v_d^H H}{vH_{\phi}} \sqrt{R_0(x - x_a)}. \quad (8.54)$$

Полная ширина «банана» равна  $2\Delta r$ . Обозначая радиус проекции силовой линии, на которой лежат точки поворота  $a'$  и  $b'$ ,  $r_1$ , можно координаты  $x$  и  $x_a$  выразить через полярный угол  $\varphi$ , полагая  $x =$

$= r_1 \cos \varphi$ . Тогда в наиболее широкой части величина  $2\Delta r_m = \Delta x_m$  будет удовлетворять соотношению

$$\Delta x_m = \frac{4v_d^H H}{vH_\varphi} \sqrt{r_1 R_0 (1 - \cos \varphi_a)}. \quad (8.55)$$

Сравним  $\Delta x_m$  и  $x_0$  — смещение центра траектории пролетных частиц. При одинаковых кинетических энергиях, считая, что для пролетной частицы  $v_{\parallel} \sim v$ , получаем

$$\Delta x_m/x_0 \approx 4 \sqrt{R_0/r_1},$$

т. е. ширина банана заметно больше смещения траектории пролетной частицы  $x_0$ .

Для того чтобы траектория заряженной частицы не пересекала поверхности радиуса  $r_0$ , т. е. чтобы частица удерживалась ловушкой, должно выполняться условие

$$\frac{2v_d^H H}{vH_\varphi} \sqrt{r_1 R_0} \ll r_0. \quad (8.56)$$

### § 8.6. Диамагнитный эффект в плазме

На основании данных о движении отдельных заряженных частиц в магнитном поле можно получить информацию о поведении плазмы в целом. Такое обобщение является наиболее простым в так называемом бесстолкновительном режиме, т. е. когда можно пренебречь влиянием столкновений заряженных частиц на их движение. В таких условиях для анализа поведения плазмы необходимо провести усреднение движения отдельных частиц. Мы рассмотрим результаты такого усреднения по отношению к движению заряженных частиц в плоскости перпендикулярной магнитному полю для случая, когда силовые линии параллельны друг другу, т. е.  $\text{grad } H \perp \mathbf{H}$ . При наличии постоянных во времени магнитных и электрических полей движение заряженных частиц в плоскости перпендикулярной  $\mathbf{H}$  сводится, как было показано, к суперпозиции ларморовского вращения и дрейфа ларморовского центра. Скорость дрейфа, связанного с электрическим полем, определяется равенством (8.27). Она одинакова для всех частиц и не приводит к возникновению электрического тока. Скорость дрейфа, связанного с неоднородностью магнитного поля, дается равенством (8.48). Ее усреднение по скоростям для частиц  $\alpha$  (электронов или ионов) приводит к соотношению

$$\mathbf{u}_{d\alpha} = \langle \mathbf{v}_d^H \rangle = \frac{cT_\alpha}{Z_\alpha eH^2} [\mathbf{h} \times \text{grad } H], \quad (8.57)$$

где принято  $\langle K_{\perp} \rangle = 2 \langle K_{\parallel} \rangle = T_\alpha$ , т. е. распределение скоростей полагается изотропным.

Несколько более сложно усреднение ларморовского вращения частиц. Как отмечалось, каждый ларморовский кружок эквивалентен току, создающему диамагнитный момент. Очевидно, что внутри однородной плазмы диамагнитные токи отдельных частиц компенсируются. На рис. 8.21 условно изображено ларморовское вращение частиц одного знака. Видно, что в каждой точке внутри плазмы

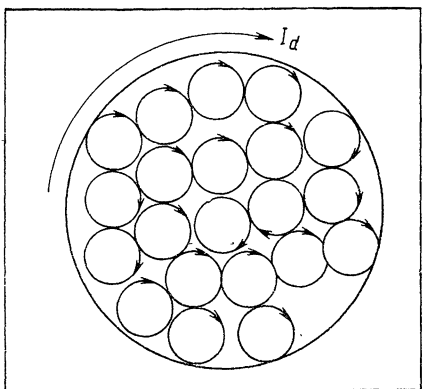


Рис. 8.21

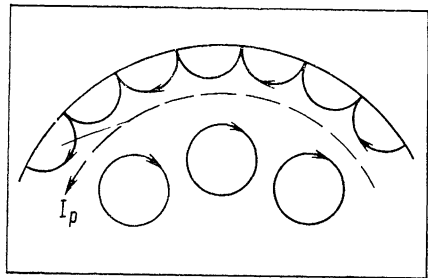


Рис. 8.22

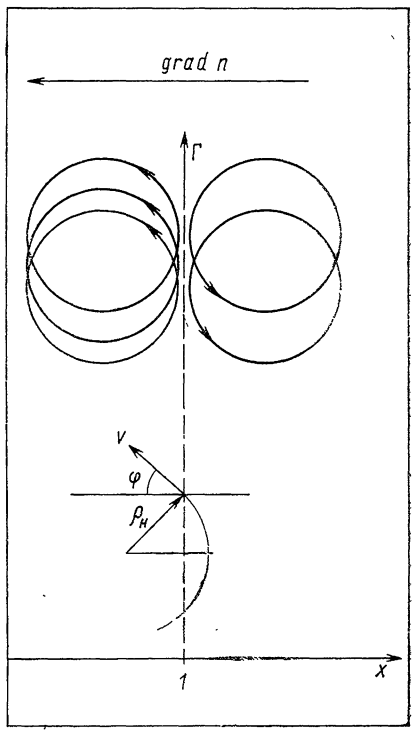


Рис. 8.23

в среднем число движущихся в разные стороны частиц одинаково. На границе такой компенсации нет. По поверхности плазмы все частицы движутся в одну сторону. Это приводит к появлению *диамагнитного тока*  $I_\alpha$ , текущего по поверхности (легко видеть, что диамагнитные токи электронов и ионов складываются). Заметим, что в случае, когда плазма касается стенок и имеется отражение частиц, на поверхности также возникает ток  $I_p$ , направленный противоположно диамагнитному (его называют *парамагнитным*). Происхождение этого тока легко понять из рис. 8.22. Видно, что при последовательных отражениях от стенки ларморовский центр перемещается в сторону, противоположную направлению вращения частиц. Если упругое отражение испытывают все заряженные частицы, то в одно-

родной плазме диамагнитный и парамагнитный токи полностью компенсируются.

В неоднородной плазме диамагнитные токи существуют и в объеме плазмы. Рассмотрим, например, формирование диамагнитного потока при наличии градиента концентрации. Оно иллюстрируется рис. 8.23. Для определения плотности потока необходимо рассмотреть движение частиц по обе стороны плоскости, перпендикулярной градиенту концентрации (плоскость  $l$  на рис. 8.23). Поток возникает из-за того, что число частиц справа и слева от этой плоскости не одинаково. Очевидно, что вклад в поток вносят только частицы, ларморовские центры которых отстоят от плоскости  $l$  меньше, чем на ларморовский радиус. Плотность потока частиц с заданным ларморовским радиусом и заданным расстоянием от ларморовского центра до плоскости  $l$  в направлении перпендикулярном градиенту концентрации определяется равенством

$$\Gamma = v \sin \varphi n(x - \rho_H \sin \varphi) \approx nv \sin \varphi - n v \rho_H \sin^2 \varphi \frac{dn}{dx},$$

где  $\varphi$  — угол между вектором скорости в момент прохождения частицей плоскости  $l$  и градиентом концентрации (см. рис. 8.23);  $v \sin \varphi$  — проекция скорости на направление перпендикулярное градиенту концентрации;  $\rho_H \sin \varphi$  — расстояние от плоскости  $l$  до ларморовского центра; концентрация определяется в точке  $x$  —  $\rho_H \sin \varphi$ . Усредняя этот поток по углам  $\varphi$  и по скоростям  $v$ , получаем

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2} \langle v_{\perp} \rho \rangle \frac{dn}{dx} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{c m v_{\perp}^2}{e H} \right\rangle \frac{dn}{dx} = \frac{c T}{e H} \frac{dn}{dx}. \quad (8.58)$$

Поскольку поток перпендикулярен  $\mathbf{H}$  и  $\text{grad } n$ , то в векторной форме для частиц  $\alpha$  имеем

$$\mathbf{\Gamma}_{\alpha} = n \mathbf{u}_{\alpha} = \frac{c T_{\alpha}}{Z_{\alpha} e H} [\mathbf{h} \times \text{grad } n]. \quad (8.59)$$

Аналогично можно получить выражение для потоков, связанных с градиентами температуры и магнитного поля.

Проще, однако, найти общее выражение для средней скорости заряженных частиц, используя усредненные уравнения движения, приведенные в § 6.3. Для условий, когда столкновениями можно пренебречь, они могут быть записаны в виде

$$m_{\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} = Z_{\alpha} e \mathbf{E} + \frac{Z_{\alpha} e}{c} [\mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{H}] - \frac{1}{n} \text{grad } p_{\alpha}. \quad (8.60)$$

При постоянных электрическом и магнитном полях левая часть уравнения обращается в нуль, и оно представляет собой уравнение равновесия усредненных сил

$$Z_{\alpha} e \mathbf{E} + \frac{Z_{\alpha} e}{c} [\mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{H}] - \frac{1}{n} \text{grad } p_{\alpha} = 0. \quad (8.61)$$

Умножая (8.61) векторно на  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ , аналогично тому, как делалось в § 8.3, получаем следующее выражение для направленной скорости:

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{c}{H} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}] + \frac{c}{Z_\alpha e H n} [\mathbf{h} \times \text{grad } p_\alpha]. \quad (8.62)$$

Первое слагаемое обусловлено дрейфом заряженных частиц в электрическом поле. Второе слагаемое можно формально рассматривать как скорость дрейфа в поле силы равной  $-(\text{grad } p_\alpha)/n$ . Эта скорость дает усредненный поток, связанный с ларморовским вращением частиц, а также с их дрейфом в неоднородном магнитном поле (как будет видно из дальнейшего,  $\text{grad } H$  однозначно связан с  $\text{grad } p$ ). В частности, если единственным источником потока является градиент концентрации, направленная скорость, определяемая (8.62), соответствует формуле (8.59).

Нетрудно с помощью (8.62) определить плотность диамагнитного тока в плазме, состоящей из электронов и однозарядных ионов:

$$\mathbf{j} = ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = \frac{c}{H} [\mathbf{h} \times \text{grad } p], \quad (8.63)$$

где  $p = p_e + p_i$  — суммарное давление заряженных частиц. Как видно, этот ток направлен перпендикулярно градиенту давления. Для цилиндрически-симметричной плазмы в продольном магнитном поле, например, он направлен по азимуту. Направление тока таково, что создаваемое им магнитное поле противоположно внешнему полю. Величина диамагнитного эффекта, обусловленного током (8.63), может быть определена с помощью уравнения магнитостатики  $\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$ . Подставляя в него (8.63) и умножая векторно на  $\mathbf{H}$ , получаем

$$\text{grad } p = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}]. \quad (8.64)$$

Стоящее в правой части векторное произведение преобразуется к виду

$$[\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}] = \frac{1}{2} \text{grad } H^2 - (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{H}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае  $\mathbf{H} \perp \text{grad } H$ , соотношение, определяющее  $\text{grad } p$ , можно записать следующим образом:

$$\text{grad } p = -\text{grad } H^2/8\pi. \quad (8.65)$$

Отсюда найдем связь между давлением и магнитным полем в плазме

$$p + H^2/8\pi = \text{const}. \quad (8.66)$$

Величину  $H^2/8\pi$  называют *магнитным давлением*. Равенство (8.66) показывает, что по мере увеличения давления заряженных частиц от периферии к центральным областям плазмы магнитное давление и соответственно магнитное поле уменьшаются (рис. 8.24). Максимальное уменьшение поля зависит от максимальной величины давления. Это уменьшение обычно характеризуют коэффициентом  $\beta$ , равным отношению кинетического давления к магнитному:

$$\beta = 8\pi p/H^2. \quad (8.67)$$

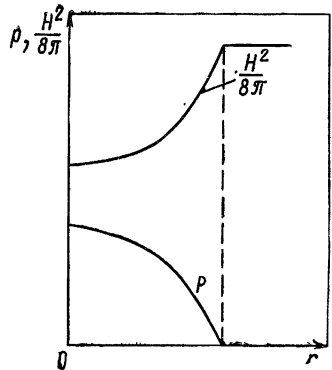


Рис. 8.24

Напомним еще раз, что приведенные в этом параграфе результаты получены для случая, когда силовые линии магнитного поля параллельны другу другу и  $\text{grad } H \perp H$ . При криволинейных силовых линиях соотношение (8.66) перестает быть справедливым и распределение магнитного поля в плазме определяется не только градиентом давления.

### § 8.7. Поляризация плазмы в электрическом поле, перпендикулярном магнитному

Как было показано, при наличии постоянного электрического поля заряженные частицы дрейфуют в направлении перпендикулярном электрическому и магнитному полям со скоростью  $\mathbf{v}_d = c[\mathbf{E} \times \mathbf{h}]/H$ .

Этот дрейф не приводит к возникновению тока. Таким образом, в отсутствие столкновений в однородной плазме постоянное электрическое поле не вызывает тока, т. е. плазма ведет себя, как диэлектрик. В случае, если электрическое поле не постоянно, дополнительно возникает инерциальный дрейф, скорость которого определяется формулой (8.33), справедливой для условий, когда характерное время изменения поля много больше ларморовского периода. Направление этого дрейфа для ионов и электронов противоположно, а величина его скорости для ионов много больше, чем для электронов. Поэтому в плазме он приводит к появлению тока, практически равного ионному:

$$\mathbf{j} = ne(\mathbf{v}_{di}^{(1)} - \mathbf{v}_{de}^{(1)}) \approx \frac{nm_i c^2}{H^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (8.68)$$

Этот ток, очевидно, добавляется к вакуумному току смещения  $\mathbf{j}_v = (1/4\pi)\partial\mathbf{E}/\partial t$ . Их сумма дает полный ток в плазме под действием переменного электрического поля

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{j} + \mathbf{j}_v = \frac{1}{4\pi} \left( 1 + \frac{4\pi m_i c^2 n}{H^2} \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (8.69)$$



Его можно, очевидно, характеризовать эффективной электрической проницаемостью плазмы

$$\epsilon = 1 + 4\pi n m_i c^2 / H^2. \quad (8.70)$$

Таким образом, плазма реагирует на медленно изменяющееся электрическое поле, перпендикулярное магнитному, как диэлектрик с диэлектрической постоянной (8.70). В частности, «включение» электрического поля приводит к поляризации плазменного слоя (рис. 8.25, а).

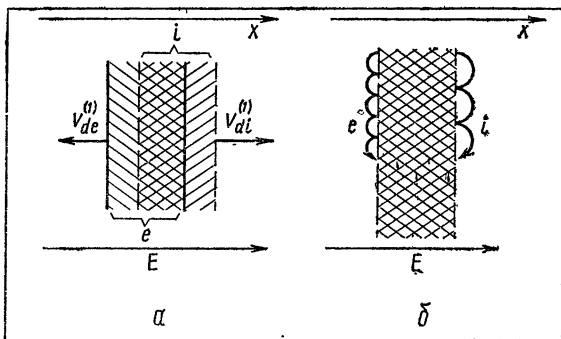


Рис. 8.25

Пусть, например, в некотором объеме, внутри которого имеется плазменный слой, внешнее электрическое поле постепенно увеличивается от нуля до  $E_0$ . Используя формулу (8.33) для скорости дрейфа, находим величину смещения ионов и электронов при нарастании поля

$$\Delta x_{e,i} = \int_0^t \frac{m_{e,i} c^2}{Z_{e,i} e H^2} \frac{\partial E}{\partial t} dt = \frac{m_{e,i} c^2 E_0}{Z_{e,i} e H^2}. \quad (8.71)$$

Так как электроны и ионы дрейфуют в противоположных направлениях (см. рис. 8.25, а), их смещение друг относительно друга равно  $\Delta x = \Delta x_i + \Delta x_e \approx \Delta x_i$  ( $\Delta x_i \gg \Delta x_e$ , так как  $m_i \gg m_e$ ).

В однородном плазменном слое смещение приводит к выделению заряда на его границах. Поверхностная плотность выделяющегося заряда равна

$$P \approx n Z_i e \Delta x_i = \frac{n m_i c^2}{H^2} E_p, \quad (8.72)$$

где  $E_p$  — напряженность электрического поля в плазме. Создаваемое этим зарядом поле противоположно внешнему и, очевидно, равно  $\delta E = -4\pi P$ .

Прибавляя это поле к внешнему, получаем

$$E_p = E_0 - 4\pi P = E_0 - (4\pi n m_i c^2 / H^2) E_p. \quad (8.73)$$

Таким образом, связь поля в плазме с внешним полем определяется соотношением

$$E_p = \frac{E_0}{1 + 4\pi n m_i c^2 / H^2} = \frac{E_0}{\epsilon}, \quad (8.74)$$

где  $\epsilon$  — электрическая проницаемость, даваемая равенством (8.70). Полученное соотношение (8.74) оказывается таким же, как для диэлектрического слоя, помещенного в однородное электрическое поле.

Заметим, что использованное при выводе (8.71) предположение о медленном нарастании поля является вовсе не обязательным. Если электрическое поле включается, например, мгновенно, то первоначально покоившиеся частицы начинают двигаться по циклоидам (рис. 8.25, б). Это приводит к смещению ларморовских центров на величину ларморовского радиуса при скорости  $v_{\perp} = v_d = cE_0/H$ , т. е. на величину  $\Delta x = c^2 m E_0 / Ze H^2$ . Таким образом, смещение частиц не зависит от характера нарастания поля до конечного значения.

### § 8.8. Движение плазмы поперек магнитного поля

При наличии внешней неэлектрической силы, перпендикулярной магнитному полю, электроны и ионы дрейфуют в противоположных направлениях. Такой дрейф приводит к поляризации плазмы и появлению электрического поля. Как нетрудно показать, в этом электрическом поле дрейф частиц обоих знаков происходит в сторону внешней силы. Поскольку дрейфы неограничены, поляризация и соответственно электрическое поле нарастают со временем. В результате плазма, как целое, двигается в направлении силы с ускорением.

Рассмотрим поляризацию плазмы и ее движение, когда на заряженные частицы действуют постоянные силы: на ионы сила  $F_i$ , на электроны —  $F_e$ . Анализ наиболее прост для однородного ограниченного плазменного слоя. Пусть магнитное поле параллельно оси  $Oz$ , а направление сил совпадает с осью  $Ox$ . Эти силы вызывают дрейф электронов и ионов в направлении  $Oy$ . Компоненты скорости их дрейфа в соответствии с (8.26) равны

$$u_{di} = cF_i/eH, \quad u_{de} = cF_e/eH.$$

Дрейф приводит к появлению на поверхностях плазмы, перпендикулярных  $Oy$ , зарядов, поверхностная плотность которых линейно нарастает со временем по закону  $\partial P / \partial t = en(u_{de} + u_{di})$ .

Электрическое поле в плазме, возникающее под действием поверхностных зарядов, удовлетворяет известной формуле электростатики  $E = 4\pi P / \epsilon$ . Используя ее и учитывая (8.70) для  $\epsilon$ , получаем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi en(u_{de} + u_{di})}{\epsilon} = \frac{4\pi cn(F_e + F_i)}{H(1 + 4\pi n m_i c^2 / H^2)}. \quad (8.75)$$

Под действием поля поляризации электроны и ионы плазмы дрейфуют в направлении действия силы со скоростью  $u = cE/H$ . Равенство (8.75) позволит найти закон изменения этой скорости

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{F_e + F_i}{m_i (1 + H^2/4\pi n m_i c^2)}. \quad (8.76)$$

Отсюда следует, что движение заряженных частиц плазмы в направлении действующей силы оказывается равноускоренным. В достаточно плотной плазме, в которой  $\epsilon \approx 4\pi n m_i c^2/H^2 \gg 1$ , можно пренебречь вторым слагаемым в знаменателе (8.76). При этом ускорение заряженных частиц получается таким, как при отсутствии магнитного поля, оно равно отношению суммы действующих сил к массе

$$g = (F_e + F_i)/m_i = n (F_e + F_i)/\rho \quad (8.77)$$

( $\rho = n m_i$  — массовая плотность плазмы). В частности, для случая, когда рассматривается движение плазмы под действием гравитационной силы, ускорение равно гравитационному.

Полученный результат остается в силе и для случая плазмы с неоднородной концентрацией. Пусть, например, в рассматриваемой задаче концентрация заряженных частиц зависит от координаты  $y$ . При этом дрейф электронов и ионов приводит к изменению их плотности по сравнению с квазинейтральной ( $n_0$ ) по закону

$$\partial n_e/\partial t = -\text{div} (n_0 \mathbf{u}_{de}), \quad \partial n_i/\partial t = -\text{div} (n_0 \mathbf{u}_{di}).$$

Соответственно, изменение плотности пространственного заряда равно

$$\partial \rho_e/\partial t = -e \text{div} [n_0 (\mathbf{u}_{di} - \mathbf{u}_{de})]. \quad (8.78)$$

Нетрудно убедиться, что пространственный заряд, определяемый этим уравнением, приводит к появлению электрического поля (8.75). Действительно, распределение поля для среды с электрической проницаемостью  $\epsilon$  описывается уравнением  $\text{div} \epsilon \mathbf{E} = -4\pi \rho_e$ . Дифференцируя его по времени и подставляя выражения (8.78) для  $\partial \rho_e/\partial t$ , получаем формулу (8.75). Поэтому выражение для скорости нарастания поля, а значит, и для ускорения дрейфа в электрическом поле (8.76) остается справедливым и в неоднородной плазме.

Движение плазмы в магнитном поле может быть вызвано не только внешними неэлектрическими силами, но и силами, обусловленными неоднородностью магнитного поля. Это — центробежная сила, связанная с движением частиц вдоль силовых линий, и диамагнитная сила, связанная с ларморовским вращением частиц. Сумма этих сил для случая, когда магнитные силовые линии плоские, равна [см. (8.48)]

$$F_H = -\left(mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m\omega_{\perp}^2\right) \frac{|\text{grad}_{\perp} H|}{H}. \quad (8.79)$$

Усредняя ее по скоростям заряженных частиц каждого сорта, получаем для изотропного распределения

$$\langle F_{H\alpha} \rangle = T_{\alpha} |\text{grad}_{\perp} H|/H = T_{\alpha}/R. \quad (8.80)$$

Под действием этой силы заряженные частицы плазмы должны двигаться в направлении уменьшения магнитного поля. Их ускорение при  $\epsilon \gg 1$  в соответствии с (8.77) равно

$$g_H = (F_e + F_i)/m_i = (T_e + T_i)/m_i R. \quad (8.81)$$

В частности, в тороидальном магнитном поле дрейф заряженных частиц в направлении перпендикулярном  $\text{grad } H$  приводит к поляризации плазмы (рис. 8.26). Под действием электрического поля поляризации заряженные частицы ускоряются в направлении наружной стороны тора. Время смещения плазмы в этом направлении на величину радиуса  $a$  равно

$$\begin{aligned} \tau_a &= \sqrt{2a/g_H} = \\ &= \sqrt{2aRm_i/(T_e + T_i)}. \end{aligned} \quad (8.82)$$

Формула (8.81) позволяет обсудить движение плазменных сгустков поперек магнитного поля. Из формулы прежде всего следует, что в однородном магнитном поле  $g_H = 0$  и сгусток плазмы, имеющий первоначально направленную скорость поперек силовых линий поля, беспрепятственно движется в заданном направлении. Причина сохранения направления движения заключается в том, что разделение зарядов и связанное с ним электрическое поле, возникшее в процессе ускорения сгустка, остаются постоянными, т. к. отсутствуют источники энергии, способные изменить поляризацию плазмы. Разумеется, это справедливо в отсутствие столкновений, которые приводят к диссипации энергии. Таким образом, после ускорения каждая частица плазмы совершает дрейфовое движение в электрическом поле, которое сгусток плазмы «переносит» вместе с собой.

Сгусток, «влетающий» в магнитную конфигурацию поперек силовых линий поля, тормозится в области нарастающего поля. В зависимости от соотношения между начальной поперечной скоростью и максимальным магнитным полем возможно либо прохождение сгустка через область магнитного поля, либо его отражение. Это происходит в любом случае, даже если конфигурация магнитного поля в принципе способна удерживать плазму. Для «захвата» сгустка необходим дополнительный механизм диссипации энергии направленного движения внутри конфигурации. Он возникает, например, если «выстреливаются» два сгустка навстречу друг другу. Так как направления их поляризаций противоположны, то при взаимном проникновении сгустков поляризация плазмы исчезает и сгустки останавливаются.

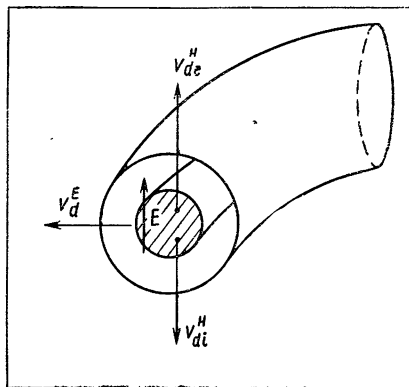


Рис. 8.26

ГЛАВА 9  
ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

**§ 9.1. Направленная скорость и тепловой поток  
заряженных частиц слабоионизованной плазмы  
в магнитном поле**

В предыдущей главе было рассмотрено движение заряженных частиц плазмы поперек магнитного поля для условий, когда столкновения несущественны. В большинстве случаев, однако, необходимо учитывать влияние столкновений на процессы переноса в плазме. Как будет видно из дальнейшего, это влияние значительно даже при частотах столкновений, много меньших циклотронных частот. Начнем рассмотрение процессов переноса со случая слабоионизованной плазмы, в которой частота столкновений заряженных частиц с нейтральными много больше частоты их столкновений друг с другом [см. неравенство (7.1) и рис. 7.1].

Направленное движение заряженных частиц описывается уравнением первого момента (6.62). Для стационарных или квазистационарных условий оно представляет собой уравнение равновесия сил и может быть записано в виде

$$Z_{\alpha} e \mathbf{E} + \frac{Z_{\alpha} e}{c} [\mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{H}] - \frac{\text{grad}(nT_{\alpha})}{n} + m \frac{\delta \mathbf{u}_{\alpha}}{\delta t} = 0, \quad (9.1)$$

где предполагается, что плазма состоит из электронов, однозарядных ионов и нейтральных атомов (для электронов  $\alpha = e$ ,  $Z_{\alpha} = -1$ ; для ионов  $\alpha = i$ ,  $Z_i = 1$ ,  $n_e = n_i = n$ ). Первый член этого уравнения представляет собой электрическую силу; второй — лоренцеву силу, третий — градиент давления, рассчитанный на одну частицу; четвертый — силу, обусловленную столкновениями. Как было показано в гл. 7, уравнение (9.1) справедливо при условии, когда характерное время изменения параметров плазмы много больше времени между столкновениями. Столкновительный член уравнения (9.1) в слабоионизованной плазме определяется соударениями заряженных частиц с нейтральными. Для случая, когда частота столкновений не зависит от скорости, он определяется силой трения [см. (6.59)]

$$m_{\alpha} \delta \mathbf{u}_{\alpha} / \delta t = -\mu_{\alpha a} \nu_{\alpha a} \mathbf{u}_{\alpha},$$

где  $\nu_{\alpha a}$  — транспортная частота столкновений частиц  $\alpha$  с атомами;  $\mu_{\alpha a}$  — приведенная масса; предполагается, что направленная скорость заряженных частиц  $\mathbf{u}_{\alpha}$  много больше направленной скорости

нейтральных частиц. Подстановка столкновительного члена приводит уравнение (9.1) к виду

$$Ze \mathbf{E} + \frac{Ze}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{\text{grad}(nT)}{n} - \mu\nu\mathbf{u} = 0, \quad (9.2)$$

где для сокращения записи опущены индексы, обозначающие сорт частиц. Выражение (9.2) есть векторное алгебраическое уравнение для скорости  $\mathbf{u}$ . Проекция этого уравнения на направление магнитного поля приводит к равенству

$$ZeE_{\parallel} - \text{grad}_{\parallel}(nT)/n - \mu\nu u_{\parallel} = 0. \quad (9.3)$$

В данной проекции отсутствует лоренцева сила. Поэтому решение уравнения для продольной компоненты скорости оказывается таким же, как и в отсутствие магнитного поля:

$$u_{\parallel} = \frac{ZeE_{\parallel}}{\mu\nu} - \frac{\text{grad}_{\parallel}(nT)}{n\mu\nu} = \frac{Ze}{\mu\nu} E_{\parallel} - \frac{T}{\mu\nu} \left( \frac{\text{grad}_{\parallel} n}{n} + \frac{\text{grad}_{\parallel} T}{T} \right) \quad (9.4)$$

[ср. с (7.7)]. Исходя из этого, введем коэффициенты подвижности и диффузии, характеризующие движение в направлении поля:

$$b_{\parallel} = e/\mu\nu, \quad D_{\parallel} = D_{\parallel}^T = T/\mu\nu. \quad (9.5)$$

Выражения для них, естественно, совпадают с аналогичными выражениями (7.9), (7.10).

Проекция уравнения (9.2) на плоскость перпендикулярную полю определяет проекцию вектора скорости  $\mathbf{u}_{\perp}$  на эту плоскость. Получающееся уравнение можно записать в виде

$$\mu\nu\mathbf{u}_{\perp} - Zm\omega_H [\mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{h}] = Ze\mathbf{E}_{\perp} - \frac{\text{grad}_{\perp}(nT)}{n}, \quad (9.6)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$  — единичный вектор в направлении поля;  $\omega_H = eH/mc$  — циклотронная частота. Чтобы найти решение уравнения (9.6) относительно  $\mathbf{u}_{\perp}$ , умножим его векторно на  $\mathbf{h}$ . В результате получим

$$-Zm\omega_H \mathbf{u}_{\perp} + \mu\nu [\mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{h}] = Ze [\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b}] + \frac{[\mathbf{h} \times \text{grad}(nT)]}{n}. \quad (9.7)$$

Исключая из (9.6) и (9.7) векторное произведение  $[\mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{h}]$ , находим поперечную компоненту направленной скорости

$$\mathbf{u}_{\perp} = \frac{e [\mathbf{E} \times \mathbf{h}]}{m\omega_H (1 + \mu^2 v^2/m^2 \omega_H^2)} + \frac{[\mathbf{h} \times \text{grad}(nT)]}{Zm\omega_H (1 + \mu^2 v^2/m^2 \omega_H^2)} + \frac{Ze \mu\nu \mathbf{E}_{\perp}}{m^2 \omega_H^2 + \mu^2 v^2} + \frac{\mu\nu \text{grad}_{\perp}(nT)}{m^2 \omega_H^2 + \mu^2 v^2}. \quad (9.8)$$

Выражение (9.8) является суммой четырех членов:

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u}_{dE} + \mathbf{u}_{dp} + \mathbf{u}_{tE} + \mathbf{u}_{tp}. \quad (9.9)$$

Первые два слагаемых этой суммы представляют собой скорость дрейфа в направлении перпендикулярном электрическому полю и градиенту давления. Их можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{dE} &= \frac{c [\mathbf{E} \times \mathbf{h}]}{H \left( 1 + \frac{\mu^2}{m^2} \frac{v^2}{\omega_H^2} \right)} = b_d [\mathbf{E} \times \mathbf{h}]; \\ \mathbf{u}_{dp} &= \frac{c [\mathbf{h} \times \text{grad}(nT)]}{Zen H \left( 1 + \frac{\mu^2}{m^2} \frac{v^2}{\omega_H^2} \right)} = D_d \left[ \mathbf{h} \times \frac{\text{grad } p}{\rho} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (9.10)$$

При частоте столкновений, много меньшей циклотронной ( $v \ll \omega_H$ ), формулы (9.10) переходят в соотношения (8.27), (8.62) для скорости дрейфа в бесстолкновительном режиме. Видно, что столкновения уменьшают скорость дрейфа, связанную с электрическим полем и градиентом давления, и при  $v \gg \omega_H$  этот дрейф становится несущественным. Последние два слагаемых (9.8) могут быть записаны в виде аналогичном (7.9), (7.10), если ввести поперечные коэффициенты подвижности и диффузии:

$$\mathbf{u}_{tE} = Zb_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}; \quad \mathbf{u}_{tp} = -D_{\perp} \text{grad } n/n - D_{\perp}^T \text{grad } T/T, \quad (9.11)$$

где

$$b_{\perp} = e\mu v / (m^2 \omega_H^2 + \mu^2 v^2), \quad D_{\perp} = D_{\perp}^T = \nu \mu T / (m^2 \omega_H^2 + \mu^2 v^2). \quad (9.12)$$

Соотношения между коэффициентами диффузии и подвижности оказываются такими же, как и без магнитного поля

$$b_{\perp} / D_{\perp} = e/T, \quad D_{\perp} = D_{\perp}^T. \quad (9.13)$$

Как видно из (9.5), (9.12), коэффициенты подвижности диффузии  $b_{\perp}$ ,  $D_{\perp}$  отличаются от соответствующих коэффициентов в отсутствие магнитного поля и от продольных коэффициентов  $b_{\parallel}$ ,  $D_{\parallel}$  множителем  $(1 + m^2 \omega_H^2 / \mu^2 v^2)^{-1}$ . В слабых магнитных полях (или при больших частотах столкновений), когда  $\omega_H / v \ll 1$ , коэффициенты переноса практически такие же, как и без магнитного поля. Это естественно, так как неравенство  $v \gg \omega_H$  означает, что за время между столкновениями частица успевает совершить лишь малую долю оборота по ларморовской окружности, т. е. траектория частиц близка к прямой линии. Иными словами, влияние магнитного поля на характер движения частиц мало. Напротив, при  $\omega_H \gg v$  частица между столкновениями успевает совершить много оборотов. Поэтому природа проводимости и диффузии резко меняется. Механизм явлений переноса поперек сильного магнитного поля будет

рассмотрен в § 9.2. При  $\omega_H \gg v$  коэффициенты  $b_{\perp}, D_{\perp}$  принимают вид:

$$b_{\perp} = e\mu v/m^2\omega_H^2 = c^2\mu v/eH^2; \quad (9.14)$$

$$D_{\perp} = T\nu\mu/m^2\omega_H^2 = c^2\mu T\nu/e^2H^2; \quad (9.15)$$

$$D_{\perp}^T = T\nu\mu/m^2\omega_H^2 = c^2\mu T\nu/e^2H^2. \quad (9.16)$$

Отношение этих величин к соответствующим продольным коэффициентам равно

$$b_{\perp}/b_{\parallel} = D_{\perp}/D_{\parallel} = D_{\perp}^T/D_{\parallel}^T = \mu^2 v^2/m^2 \omega_H^2. \quad (9.17)$$

При больших магнитных полях оно может быть много меньше единицы. Величину  $(\omega_H/v)^2$ , определяющую уменьшение коэффициентов поперечного переноса, называют иногда *замагниченностью* заряженных частиц. Как видно, в сильном магнитном поле коэффициенты переноса пропорциональны массе частиц и частоте соударений. Это означает, в частности, что для тяжелых ионов они значительно больше, чем для легких электронов. Напомним, что в отсутствие магнитного поля ситуация обратная — коэффициенты переноса имеют для электронов значительно большие величины, чем для ионов, и с уменьшением частоты столкновений растут.

Полученные формулы (9.4), (9.10), (9.11) полностью определяют величину направленной скорости. С учетом выражений для  $b$  и  $D$  ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & Zb_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + Zb_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + b_d [\mathbf{E} \times \mathbf{h}] - D_{\parallel} \frac{\text{grad}_{\parallel} p}{p} - \\ & - D_{\perp} \frac{\text{grad}_{\perp} p}{p} + D_d \frac{[\mathbf{h} \times \text{grad } p]}{p}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Эту сумму часто записывают более коротко, используя тензорное представление для подвижности и коэффициенты диффузии:

$$\mathbf{u} = \check{\mathbf{b}}\mathbf{E} - \check{\mathbf{D}} \text{grad } p/p. \quad (9.19)$$

В системе отсчета, в которой  $\mathbf{H} \parallel Oz$ , введенные тензоры имеют вид:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{b}} = & \begin{vmatrix} b_{\perp} & b_d & 0 \\ -b_d & b_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & b_{\parallel} \end{vmatrix} = \\ = & \begin{vmatrix} \frac{e\mu v}{m^2 \omega_H^2 + \mu^2 v^2} & \frac{c}{H(1 + \mu^2 v^2/m^2 \omega_H^2)} & 0 \\ -\frac{c}{H(1 + \mu^2 v^2/m^2 \omega_H^2)} & \frac{e\mu v}{m\omega_H^2 + \mu^2 v^2} & 0 \\ 0 & 0 & e/\mu v \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (9.20)$$



$$\check{D} = \begin{vmatrix} D_{\perp} & D_d & 0 \\ -D_d & D_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\parallel} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\nu\mu T}{m^2\omega_H^2 + \mu^2\nu^2} & \frac{cT}{ZeH(1 + \mu^2\nu^2/m^2\omega_H^2)} & 0 \\ -\frac{cT}{ZeH(1 + \mu^2\nu^2/m^2\omega_H^2)} & \frac{\nu\mu T}{m^2\omega_H^2 + \mu^2\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & T/\mu\nu \end{vmatrix}. \quad (9.21)$$

Полученные выражения для направленной скорости позволяют определить плотность электрического тока в плазме. В общей форме для плазмы, состоящей из электронов и однозарядных ионов, с помощью (9.19) найдем

$$\mathbf{j} = ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = ne(\check{\mathbf{b}}_e + \check{\mathbf{b}}_i)\mathbf{E} -$$

$$- ne(\check{D}_i \text{grad } p_i/p_i - \check{D}_e \text{grad } p_e/p_e). \quad (9.22)$$

Первое слагаемое определяет движение под действием электрического поля. Его можно выразить через тензор проводимости

$$\check{\sigma} = ne(\check{\mathbf{b}}_e + \check{\mathbf{b}}_i). \quad (9.23)$$

Для сильных магнитных полей, в которых  $\omega_{He} \gg v_{ea}$ ,  $\omega_{Hi} \gg v_{ia}$ , поперечную компоненту проводимости найдем с помощью (9.14):

$$\mathbf{j}_{\perp} = \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp};$$

$$\sigma_{\perp} = ne^2 (\mu_{ia} v_{ia}/m_i^2 \omega_{Hi}^2 + \mu_{ea} v_{ea}/m_e^2 \omega_{He}^2) \approx ne^2 v_{ia}/2m_i \omega_{Hi}^2 \quad (9.24)$$

(при  $m_i = m_a \mu_{ia} = m_i/2$ ). Заметим, что ток в направлении перпендикулярном  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  при этом отсутствует, так как скорости дрейфа электронов и ионов равны.

Приведенные выражения для направленной скорости получены для случая, когда частота столкновений заряженных частиц с нейтральными не зависит от скорости. Общие выражения могут быть записаны в форме, аналогичной (9.10) — (9.12). В них войдут некоторые усредненные частоты столкновений и численные множители порядка единицы. При распределениях скоростей, близких к максвелловскому, направленные скорости можно определить, подставив в уравнение (9.1) выражения (6.58) для столкновительного члена, включающего как силу трения, так и термосилу:

$$m_{\alpha} \delta \mathbf{u}_{\alpha} / \delta t = \mathbf{R}_{\alpha\alpha} + \mathbf{R}_{\alpha\alpha}^T. \quad (9.25)$$

В силу трения

$$\mathbf{R}_{\alpha\alpha} = -\mu_{\alpha\alpha} \bar{v}_{\alpha\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \quad (9.26)$$

входит усредненная частота столкновений [см. (7.18)]

$$\bar{v}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^4 v_{\alpha\alpha}^t \left( x \sqrt{\frac{T_{\alpha\alpha}}{\mu_{\alpha\alpha}}} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad (9.27)$$

где  $T_{\alpha\alpha} = (m_a T_\alpha + m_\alpha T_a)/(m_a + m_\alpha)$ . Закон усреднения (7.18) является приближенным (см. § 6.2). Однако, как можно показать, точность его возрастает с ростом  $\omega_H/\bar{v}$ . Применимость его при  $\omega_H \gg \bar{v}$  для электронов продемонстрирована в § 9.2. Выражение для термосилы при  $\omega_H \gg \bar{v}$  имеет вид

$$\mathbf{R}^T = g_T (\bar{v}/\omega_H) [\mathbf{h} \times \text{grad } T], \quad (9.28)$$

где  $g_T \approx (T/v)(\partial\bar{v}/\partial T)$  [формула (9.28) будет качественно получена в § 9.3].

Подставив столкновительный член (9.25) с силой трения (9.26) и термосилой (9.28) в уравнение движения (9.1), получим прежнюю формулу для составляющих направленной скорости, связанных с электрическим полем и градиентом концентрации. В частности, поперечная подвижность  $b_\perp$ , коэффициент диффузии  $D_\perp$  по-прежнему определяются формулами (9.12) с частотой столкновений (9.27). Термосила приводит к некоторому изменению направленной скорости, связанной с градиентом температуры. Скорость дрейфа, вызываемого термосилой при  $\omega_H \gg \bar{v}$ , равна

$$\mathbf{u}_\perp^{T*} = \frac{c}{ZeH} [\mathbf{R}^T \times \mathbf{h}] = g_T \frac{\bar{v}}{m\omega_H^2} \left( \frac{\mu}{m} \right) \text{grad } T. \quad (9.29)$$

Добавляя ее к компоненте скорости  $u_{iD}$  [см. (9.11)], пропорциональной  $\text{grad } T$ :

$$\mathbf{u}_{iD}^T = -\frac{\mu T \bar{v}}{m^2 \omega_H^2} \frac{\text{grad } T}{T},$$

получаем скорость термодиффузии в виде

$$\mathbf{u}_\perp^T = -D_\perp^T \frac{\text{grad } T}{T}, \quad (9.30)$$

где  $D_\perp^T = \frac{\mu v T}{m^2 \omega_H^2} (1 - g_T)$ .

Чтобы найти тепловой поток заряженных частиц, воспользуемся уравнением (6.68). В стационарном случае оно имеет вид

$$\frac{5}{2} \frac{nT}{m} \text{grad } T - \frac{Ze}{mc} [\mathbf{q} \times \mathbf{H}] = \frac{\delta \mathbf{q}}{\delta t}. \quad (9.31)$$

Для электронов при частоте столкновений, не зависящей от скорости, подставляя в (9.30) столкновительный член (6.82), получаем

$$\frac{5}{2} \frac{nT_e}{m_e} \text{grad } T_e + \frac{e}{m_e c} [\mathbf{q}_e \times \mathbf{H}] = -\nu_{ea} \mathbf{q}_e.$$

Это векторное уравнение относительно  $\mathbf{q}$  аналогично по форме векторному уравнению (9.2). Решая его так же, как это было сделано на с. 269, находим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_e &= \mathbf{q}_{e\parallel} + \mathbf{q}_{et} + \mathbf{q}_{ed}; \\ \mathbf{q}_{e\parallel} &= -\frac{5}{2} \frac{nT_e}{m_e \nu_{ea}} \text{grad}_{\parallel} T_e; \\ \mathbf{q}_{et} &= -\frac{5}{2} \frac{nT_e \nu_{ea}}{m_e (\omega_{He}^2 + \nu_{ea}^2)} \text{grad}_{\perp} T_e; \\ \mathbf{q}_{ed} &= -\frac{5}{2} \frac{nT_e [\mathbf{h} \times \text{grad } T_e]}{eH (1 + \nu_{ea}^2 / \omega_{He}^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

Первое слагаемое есть продольный поток тепла. Он такой же, как в отсутствие магнитного поля. Компонента  $\mathbf{q}_{ed}$  представляет собой тепловой поток, связанный с диамагнитным потоком, направленным перпендикулярно  $\text{grad } T$ . При  $\omega_H \gg \nu$  он не зависит от столкновений. Наконец, компонента  $\mathbf{q}_{et}$  определяет поток тепла в направлении поперечной составляющей градиента температуры. При  $\omega_H \gg \nu$  он пропорционален частоте столкновений

$$\mathbf{q}_{et} = -\frac{5}{2} \frac{nT_e \nu_{ea}}{m_e \omega_H^2} \text{grad}_{\perp} T_e. \quad (9.33)$$

Выражения (9.32) и (9.33) позволяют, как и ранее, ввести коэффициенты тепло- и температуропроводности. Продольная теплопроводность оказывается такой же, как и в отсутствие магнитного поля:

$$\mathcal{K}_{\parallel} = n\chi_{\parallel} = (5/2) nT_e / m_e \nu_{ea}. \quad (9.34)$$

Поперечные коэффициенты тепло- и температуропроводности, как видно из (9.33), можно записать следующим образом:

$$\mathcal{K}_{\perp} = n\chi_{\perp} = (5/2) nT_e \nu_{ea} / m_e (\omega_{He}^2 + \nu_{ea}^2); \quad (9.35)$$

при  $\omega_H \gg \nu$

$$\mathcal{K}_{\perp} = n\chi_{\perp} = (5/2) nT_e \nu_{ea} / m_e \omega_{He}^2. \quad (9.36)$$

Они связаны с соответствующими компонентами тензора диффузии соотношениями, аналогичными (7.23):

$$\chi_{\perp} = \mathcal{K}_{\perp} / n = (5/2) D_{\perp}. \quad (9.37)$$

Выражение для теплового потока ионов в слабоионизованной плазме получается более сложным, так как он обычно связан с тепловым потоком нейтральных частиц. Мы не будем его здесь рассматривать.

## § 9.2. Поперечные коэффициенты подвижности, диффузии и теплопроводности электронов

Как было показано в § 7.2, для определения коэффициентов переноса электронов при произвольной зависимости частоты их столкновений от скорости можно использовать разложение функции распределения по степеням анизотропии. Поскольку для электронов в слабоионизованной плазме направленная составляющая скорости много меньше хаотической, в таком разложении можно ограничиться двумя слагаемыми [см. (5.20)]:

$$f(\mathbf{v}) = f_0(v) + (v/v)\mathbf{f}_1(v)$$

( $f_0$  — изотропная, а  $\mathbf{f}_1$  — направленная составляющая функции распределения). При этом направленная скорость оказывается связанной с векторной функцией  $\mathbf{f}_1$  соотношением [см. (5.21)]

$$\mathbf{u} = \int \mathbf{v} f(\mathbf{v}) d^3 v = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^3 \mathbf{f}_1 dv. \quad (9.38)$$

В магнитном поле уравнение, определяющее связь направленной составляющей функции распределения с изотропной, можно записать в виде [см. (5.22), (5.47)]:

$$-\frac{e\mathbf{E}}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v \frac{\text{grad}(nf_0)}{n} - \frac{e}{m_e c} [\mathbf{H} \times \mathbf{f}_1] = -\mathbf{f}_1 \nu_{ea}(v), \quad (9.39)$$

где  $\nu_{ea}(v)$  — суммарная частота столкновений электронов с атомами. Продольная компонента  $\mathbf{f}_1$  получается из проекции уравнения на направление магнитного поля

$$f_{1\parallel} = \frac{eE_{\parallel}}{m_e \nu_{ea}} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{v}{\nu_{ea}} \frac{\text{grad}_{\parallel}(nf_0)}{n}. \quad (9.40)$$

Как и следовало ожидать, это выражение совпадает с формулой (7.31) для направленной компоненты функции распределения в отсутствие магнитного поля. Соответственно совпадают и выражения для направленной скорости коэффициентов переноса. Проекцию уравнения (9.39) на плоскость перпендикулярную магнитному полю можно записать в виде

$$\nu_{ea} \mathbf{f}_{1\perp} - \omega_{He} [\mathbf{h} \times \mathbf{f}_1] = \frac{d\mathbf{E}_{\perp}}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} - v \frac{\text{grad}_{\perp}(nf_0)}{n}. \quad (9.41)$$

Решение этого уравнения относительно  $\mathbf{f}_{1\perp}$  аналогично полученному в § 9.1 решению уравнения (9.2). Чтобы найти его, можно использовать наряду с (9.41) уравнение, получающееся из него векторным умножением на  $\mathbf{h}$ . В результате будут найдены две поперечные компоненты вектора  $\mathbf{f}_{1\perp}$  — параллельная вектору, стоящему

в правой части уравнения ( $\mathbf{f}_{1t}$ ), и перпендикулярная этому вектору ( $\mathbf{f}_{1d}$ )

$$\mathbf{f}_{1t} = \frac{e\mathbf{E}_\perp}{m_e} \frac{v_{ea}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{v v_{ea}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} \frac{\text{grad}_\perp (n f_0)}{n}; \quad (9.42)$$

$$\mathbf{f}_{1d} = \frac{e}{m} \frac{\omega_{He}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} [\mathbf{h} \times \mathbf{E}] + \frac{v \omega_{He}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} \frac{[\mathbf{h} \times \text{grad}(n f_0)]}{n}. \quad (9.43)$$

Составляющая  $f_{1d}$  определяет, как легко видеть, компоненту направленной скорости  $\mathbf{u}_d$ , описывающую дрейф электронов, перпендикулярный электрическому полю, градиентам концентрации и температуры. При  $\omega_H \gg v$  равенство (9.43) перестает зависеть от частоты столкновений и выражение (9.38) приводит к формуле (8.62) для направленной скорости дрейфа. При  $v \gg \omega_H$  выражение (9.43) позволяет определить уменьшение скорости дрейфа, обусловленное столкновениями.

Движение в направлении поперечной компоненты электрического поля и поперечных компонент градиентов концентрации и температуры описывается выражением (9.42). Подставляя его в (9.38), получаем для соответствующей компоненты направленной скорости

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{et} = & \frac{4\pi}{3} \frac{e\mathbf{E}_\perp}{m_e} \int \frac{v^3 v_{ea}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv - \\ & - \frac{4\pi}{3n} \text{grad} \left[ n \int \frac{v^4 v_{ea}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} f_0 dv \right]. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Выразим  $\mathbf{u}_{et}$  через коэффициенты подвижности и диффузии:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{et} = & -b_{e\perp} \mathbf{E}_\perp - \frac{1}{n} \text{grad}_\perp (D_{e\perp} n) = \\ = & -b_{e\perp} \mathbf{E}_\perp - D_{e\perp} \frac{\text{grad}_\perp n}{n} - D_{e\perp}^T \frac{\text{grad} T_e}{T_e}, \end{aligned} \quad (9.45)$$

где

$$b_{e\perp} = -\frac{4\pi}{3} \frac{e\mathbf{E}_\perp}{m_e} \int \frac{v^3 v_{ea}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv; \quad (9.46)$$

$$D_{e\perp} = \frac{4\pi}{3} \int \frac{v^4 v_{ea}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} f_0 dv; \quad (9.47)$$

$$D_{e\perp}^T = T_e \frac{\partial D_{e\perp}}{\partial T_e}. \quad (9.48)$$

В случае, когда частота столкновений не зависит от скорости, формулы (9.46) — (9.48) переходят в (9.12). При произвольной зависимости  $v_{ea}(v)$  и произвольной функции распределения  $f_0(v)$  они отличаются от (9.12) численными коэффициентами.

Конкретизируем (9.46)—(9.48) для условий, когда распределение электронов по скоростям максвелловское:

$$f_0(v) = \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_e v^2}{2T_e} \right) \quad (9.49)$$

и циклотронная частота много больше частоты столкновений. В этом случае формулы для коэффициентов подвижности и диффузии могут быть представлены в виде

$$b_{e\perp} = \frac{e\bar{v}_{ea}}{m_e \omega_{He}^2}; \quad (9.50)$$

$$D_{e\perp} = \frac{T_e \bar{v}_{ea}}{m_e \omega_{He}^2}, \quad (9.51)$$

если ввести усредненную частоту столкновений  $\bar{v}_{ea}$  ( $T_e$ ) [см. (9.27)]. При этом коэффициент термодиффузии равен

$$D_{e\perp}^T = T_e \frac{\partial}{\partial T_e} \left( \frac{T_e \bar{v}_{ea}}{m_e \omega_{He}^2} \right) = \frac{T_e \bar{v}_{ea}}{m_e \omega_{He}^2} (1 + g_{T_e}), \quad (9.52)$$

где  $g_{T_e} = \frac{T_e}{\bar{v}_{ea}} \frac{\partial \bar{v}_{ea}}{\partial T_e}$  [ср. (9.29)].

Тепловой поток электронов в магнитном поле можно определить с помощью направленной составляющей функции распределения аналогично тому, как это было сделано в § 7.2. Общее выражение для теплового потока имеет вид

$$\mathbf{q} = \frac{4\pi}{6} n m_e \int \left( v^5 - \frac{5T_e}{m_e} v^3 \right) \mathbf{f}_1 dv. \quad (9.53)$$

Подставляя в это выражение  $\mathbf{f}_1$ , нетрудно найти компоненты вектора  $\mathbf{q}$ . Подстановка  $\mathbf{f}_{1\parallel}$  [см. (9.40)] приводит к выражению для продольного теплового потока  $q_{\parallel}$ , совпадающему с выражением (7.45), полученным для случая отсутствия магнитного поля. Компонента  $\mathbf{f}_{1d}$  определяет составляющую вектора теплового потока, связанную с диамагнитным движением  $\mathbf{q}_{ed}$ . Для сильного магнитного поля  $\omega_H \gg \nu$  она не зависит от частоты столкновений. Составляющая теплового потока, параллельная поперечной компоненте действующих сил  $\mathbf{q}_{et}$ , может быть найдена подстановкой компоненты  $\mathbf{f}_{1t}$  в (9.53):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{et} = & -\frac{4\pi}{6} n e \mathbf{E}_{\perp} \int_0^{\infty} \left( v^5 - \frac{5T_e}{m_e} v^3 \right) \frac{v_{ea}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} \frac{df_0}{dv} dv - \\ & - \frac{4\pi}{6} m_e \text{grad} \left[ n \int_0^{\infty} \left( v^6 - \frac{5T_e}{m_e} v^4 \right) \frac{v_{ea}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} f_0 dv \right] - \\ & - \frac{10\pi}{3} n \text{grad} T_e \int_0^{\infty} v^4 \frac{v_{ea}}{\omega_{He}^2 + v_{ea}^2} f_0 dv. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Преобразуем это выражение для случая, когда  $\omega_{He} \gg v_{ea}$  и распределение скоростей электронов максвелловское. В этом слу-

чае интегралы, входящие в первые два слагаемых, оказываются эквивалентными:

$$J = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e}{T_e} \int_0^{\infty} \left( v^5 - 5 \frac{T_e}{m_e} v^3 \right) v_{ea} \frac{df_0}{dv} dv = -\frac{4\pi}{6} \left( \frac{m_e}{T_e} \right)^2 \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left( v^6 - 5 \frac{T_e}{m_e} v^4 \right) v_{ea} f_0 dv = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (x^6 - 5x^4) v_{ea} \left( x \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \quad (9.55)$$

Интегрируя по частям и учитывая формулу (9.27) для средней частоты столкновений, преобразуем (9.55) к виду

$$J = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \int_0^{\infty} v x^5 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = T_e \frac{\partial \bar{v}_{ea}}{\partial T_e}. \quad (9.56)$$

Подставляя (9.56) в (9.54), получаем при  $\omega_{He} \gg v_{ea}$

$$\mathbf{q}_{et} = -g_{Te} \left[ nT_e \frac{e\bar{v}_{ea}}{m_e \omega_{He}^2} \mathbf{E} + \text{grad} \left( \frac{nT_e^2 \bar{v}_{ea}}{m_e \omega_{He}^2} \right) \right] -$$

$$- \frac{5}{2} \frac{n \bar{v}_{ea} T_e}{m_e \omega_{He}^2} \text{grad} T_e, \quad (9.57)$$

или с учетом (9.45), (9.50)–(9.52)

$$\mathbf{q}_{et} = -g_{Te} nT_e \mathbf{u}_{et} - \left( \frac{5}{2} + g_{Te} \right) \frac{nT_e}{m_e \omega_{He}^2} \bar{v}_{ea} \text{grad}_{\perp} T_e, \quad (9.58)$$

где  $g_{Te} = (T_e/\bar{v}_{ea})(\partial \bar{v}_{ea}/\partial T_e)$  — коэффициент, определяющий термодиффузию. Первое слагаемое в (9.58) дает перенос тепла, связанный с направленным движением, второе позволяет найти коэффициент поперечной теплопроводности. Для произвольной зависимости  $v_{ea}$  от  $v$  он равен

$$\mathcal{K}_{\perp e} = n\chi_{\perp e} = \left( \frac{5}{2} + g_{Te} \right) \frac{nT_e}{m_e \omega_{He}^2} \bar{v}_{ea}. \quad (9.59)$$

При  $v_{ea} = \text{const}$  формула (9.59) переходит в (9.36).

### § 9.3. Механизм переноса заряженных частиц и их энергии поперек сильного магнитного поля

Рассмотрим механизм поперечного переноса в сильном магнитном поле, в котором циклотронная частота заряженных частиц много больше частоты их столкновений  $\omega_H \gg \nu$ . Как было показано в гл.8, в отсутствие столкновений траектория движения заряженных частиц в плоскости перпендикулярной магнитному полю представляет собой суперпозицию вращения по ларморовской окружности и

дрейфа в направлении перпендикулярном электрическому полю и градиенту магнитного поля. Смещение ларморовских центров в направлении сил, действующих в плоскости перпендикулярной магнитному полю и хаотическое их перемещение происходят лишь в результате столкновений, которые приводят к резкому изменению скоростей заряженных частиц и соответственно к скачкообразному перемещению ларморовских центров. Поэтому обсуждая механизм процессов переноса, следует прежде всего определить изменение положения ларморовского центра в результате столкновения.

Чтобы установить связь между изменением скорости частицы при столкновении и смещением ларморовского центра, введем вектор  $\rho_H$ , направленный из центра ларморовской окружности, к точке в которой находится частица. Очевидно, он связан с мгновенной скоростью вращения частицы  $v$  векторным соотношением

$$\rho_H = [\mathbf{h} \times \mathbf{v}] / Z\omega_H \quad (9.60)$$

(направление вектора  $\rho_H$  перпендикулярно  $v$ , а его длина равна ларморовскому радиусу).

Будем полагать, что столкновение происходит в фиксированной точке пространства; это справедливо при радиусе взаимодействия частиц, много меньшем ларморовского радиуса. Тогда смещение ларморовского центра  $\Delta r_0$  при столкновении будет равно изменению вектора  $\rho_H$  (рис. 9.1):

$$\Delta r_0 = -\Delta \rho_H = -[\mathbf{h} \times \Delta v] / Z\omega_H. \quad (9.61)$$

Видно, что вектор смещения перпендикулярен изменению скорости частицы в результате столкновения и  $\Delta r_0$  в каждом конкретном столкновении зависит от изменения  $v$  и угла рассеяния. Нетрудно убедиться с помощью (9.61), что независимо от знака заряда частицы смещение происходит преимущественно в ту сторону, в которой произошло столкновение: например, если столкновение произошло справа от ларморовского центра, то он смещается вправо (рис. 9.2), если слева — то влево. Максимальная величина смещения соответствует лобовому столкновению. При лобовом столкновении, например, электрона с атомом  $|\Delta v| = 2v$  и  $\Delta r_0 = 2v/\omega_H = 2\rho_H$ .

Переходя к рассмотрению процессов переноса, начнем с движения под действием поперечного электрического поля. В промежутке между столкновениями траектория движения частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях представляет собой трохиду — суперпозицию ларморовского вращения и электрического дрейфа

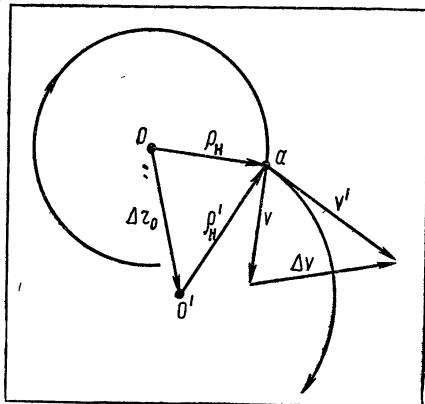


Рис. 9.1



(рис. 9.3). В результате такого наложения радиус кривизны не остается постоянным — он максимален в точках, соответствующих максимальной энергии частицы (точки 1 на рис. 9.3), и минимален в точках, соответствующих минимальной энергии (точки 2). Смещение ларморовского центра в результате столкновений в точках с

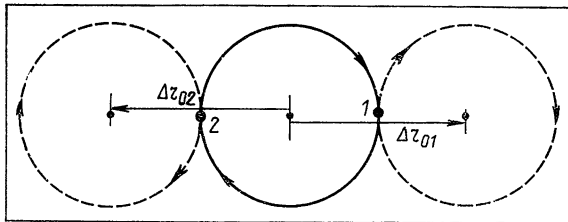


Рис. 9.2

большим радиусом кривизны, как легко видеть, больше, чем при столкновениях в точках с меньшим радиусом кривизны. Поэтому, несмотря на одинаковую вероятность столкновения в различных точках, возникает среднее смещение в сторону действия силы.

Оценим такое смещение, рассматривая лобовые столкновения электронов с атомами. Пусть электрическое поле направлено вдоль оси  $Ox$  (рис. 9.3). При этом в точке 1  $y$  — компоненту скорости электрона можно представить как сумму скоростей вращения и дрейфа в электрическом поле, а в точке 2 — как разность этих скоростей:

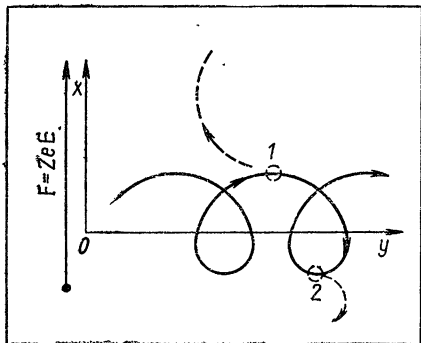


Рис. 9.3

$$v_{y1} = v_{\omega} + v_{dE};$$

$$v_{y2} = -(v_{\omega} - v_{dE}).$$

Лобовое столкновение приводит к замене этих скоростей на противоположные. Поэтому получаем

$$\Delta v_{y1} = -2(v_{\omega} + v_{dE}); \quad \Delta v_{y2} = 2(v_{\omega} - v_{dE}).$$

Поскольку скорость дрейфа в электрическом поле и после столкновения остается прежней, то все изменения скорости оказываются связанными с вращательной компонентой. Следовательно оценка среднего изменения скорости вращения при лобовом ударе имеет вид

$$\overline{\Delta v_{\omega}} = \frac{1}{2} (\Delta v_{y1} + \Delta v_{y2}) = -2v_{dE}.$$

Лобовой удар соответствует максимальному изменению скорости. Считая, что среднее изменение равно половине максимального, находим оценку среднего смещения электрона в направлении силы при столкновении

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{1}{2} \frac{\overline{\langle \Delta v_{\omega} \rangle}}{\omega_{He}} = -\frac{v_{dE}}{\omega_{He}} = -\frac{m_e c^2 E}{e H^2}. \quad (9.62)$$

Суммируя по столкновениям, происходящим в единицу времени, получаем оценку средней скорости электронов в направлении электрического поля

$$u_{tE} = \langle \Delta x \rangle \nu_{ea} = -\frac{m_e c^2 \nu_{ea}}{e H^2} E, \quad (9.63)$$

которая соответствует формуле (9.14). Для более точного определения направленной скорости следует провести аккуратное усреднение смещений ларморовских центров при столкновениях. Полагая по-прежнему, что электрическое поле направлено вдоль оси  $Ox$ , находим с помощью (9.61) формулу для средней скорости перемещения частиц в этом направлении

$$u_{tE} = \langle \Delta x \rangle / \Delta t = \langle \Delta x \rangle_1 = \langle \Delta v_y \rangle_1 / \omega_H. \quad (9.64)$$

Знаком  $\langle \rangle_1$  обозначены здесь усредненные по столкновениям изменения соответствующих величин в единицу времени. Усредненное по упругим столкновениям изменение скорости было определено в гл. 2. В соответствии с (2.16) и (2.55) имеем

$$\langle \Delta v_{ya} \rangle_1 = -\frac{\mu_{\alpha a}}{m_{\alpha}} \nu_{\alpha a} v_y. \quad (9.65)$$

При усреднении по скоростям будем иметь в виду, что средняя скорость частиц в направлении  $Oy$  равна скорости дрейфа  $\langle v_y \rangle u_{dE} = cE/H$ . Поэтому в случае не зависящей от скорости частоты столкновений выполняется равенство

$$\langle \Delta v_y \rangle_1 = -\nu_{\alpha a} u_{dE} \mu_{\alpha a} / m_{\alpha}. \quad (9.66)$$

При частоте столкновений, зависящей от скорости, оно сохраняется, однако, как было показано в § 6.2, в этом случае следует использовать формулу для средней частоты столкновений (6.56). Подставляя (9.66) в (9.64), получаем выражение для средней скорости движения в направлении электрического поля, совпадающего с (9.50):

$$u_{tE} = (\mu_{\alpha a} / m_{\alpha}) \bar{\nu}_{\alpha a} u_{dE} / \omega_{H\alpha} = \mu_{\alpha a} Z_{\alpha} e E \bar{\nu}_{\alpha a} / m_{\alpha} \omega_{H\alpha}^2. \quad (9.67)$$

Рассмотрим теперь механизм диффузии заряженных частиц поперек магнитного поля. Диффузия возникает в результате хаотических скачков ларморовских центров под действием столкновений. При таких скачках в отсутствие электрического поля среднее смещение равно нулю. Однако градиент концентрации приводит к тому,

что поток частиц из области большей концентрации оказывается большим, чем противоположный. Такое различие потоков является, как всегда, причиной диффузии. Другой причиной различия потоков может служить градиент температуры, приводящий, с одной стороны, к асимметрии амплитуд смещений при столкновениях (связанной с зависимостью ларморовского радиуса от температуры), а с другой — к различию значений частоты столкновений в случае, когда она зависит от скорости. Суммарный поток заряженных частиц, связанный с этими причинами, есть, очевидно, термодиффузия.

Нетрудно показать, что диффузионное движение заряженных частиц слабоионизованной плазмы определяется средним квадратом смещения ларморовских центров. Пусть, например, градиент концентрации и температуры заряженных частиц направлен вдоль оси  $Ox$ . Найдем поток через плоскость с координатой  $x_0$ . Смещения частиц при столкновениях зависят от их скорости и типа соударения. Обозначим  $g(x, \xi) d\xi$  (здесь  $x$  — начальная координата частицы) долю частиц, смещение которых вдоль  $Ox$  в единицу времени имеет величину, лежащую в пределах от  $\xi$  до  $\xi + d\xi$ . Тогда плотность потока, обусловленного этой группой частиц, равна

$$d\Gamma_x(\xi) = d\xi \int_{x_0 - \xi}^{x_0} n(x) g(x, \xi) dx. \quad (9.68)$$

Интеграл берется в пределах от  $x_0 - \xi$  до  $x_0$ , поскольку все частицы, координаты которых лежат в этом интервале, пройдут в единицу времени через площадку  $x_0$ . Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора и ограничимся первыми двумя членами разложения:

$$n(x) g(x, \xi) = n(x_0) g(x_0, \xi) + (x - x_0) \partial (ng) / \partial x.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем

$$d\Gamma_x(\xi) = n(x_0) \xi g(x_0, \xi) d\xi - \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial (ng)}{\partial x} d\xi. \quad (9.69)$$

Суммируя теперь поток по всем возможным смещениям  $\xi$  и учитывая, что

$$\int \xi g(x_0, \xi) d\xi = \langle \xi \rangle_1 = \langle \Delta x \rangle_1; \quad \int \xi^2 g(x_0, \xi) d\xi = \langle \xi^2 \rangle_1 = \\ = \langle (\Delta x)^2 \rangle_1,$$

получаем

$$\Gamma_x = n \langle \Delta x \rangle_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [n \langle (\Delta x)^2 \rangle_1]. \quad (9.70)$$

В отсутствие электрического поля первое слагаемое обращается в нуль, так как смещения заряженных частиц при столкновениях носят хаотический характер, и поток определяется вторым слагаемым, которое можно записать в виде

$$\Gamma_x = - \frac{\partial}{\partial x} (D_{\perp} n), \quad (9.71)$$

где коэффициент

$$D_{\perp} = (1/2) \langle (\Delta x)^2 \rangle_1 \quad (9.72)$$

в соответствии с определением является поперечным коэффициентом диффузии. Основываясь на связи коэффициента диффузии со средним квадратом смещения, нетрудно оценить его. Порядок смещения заряженных частиц при столкновениях с нейтральными, как отмечено выше, равен их ларморовскому радиусу. Поэтому коэффициент диффузии, определяемый средним квадратом смещения в единицу времени, имеет порядок

$$D_{\perp} \approx \rho_H^2 \nu \approx (v_{\perp}^2 / \omega_H^2) \nu \approx T \nu / m \omega_H^2. \quad (9.73)$$

Более точно определить коэффициент поперечной диффузии можно, проводя аккуратное усреднение в формуле (9.72). Учитывая (9.61) (связь смещения ларморовских центров с изменением скорости при столкновениях), получаем

$$D_{\perp} = \frac{1}{2} \langle (\Delta x)^2 \rangle_1 = \frac{1}{2} \frac{\langle (\Delta v_y)^2 \rangle_1}{\omega_H^2}. \quad (9.74)$$

Изменение скорости  $\Delta v$  за одно столкновение дается формулой (2.15). Находя с ее помощью величину  $(\Delta v_y)^2$ , суммируя ее по столкновениям, происходящим в единицу времени, и усредняя по скоростям, получаем

$$\langle (\Delta v_{y\alpha})^2 \rangle_1 = \frac{2}{3} \left( \frac{\mu_{\alpha\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^2 \int (1 - \cos \vartheta) n_{\alpha} \langle s_{\alpha\alpha}^t \bar{v}^3 \rangle d\Omega = \frac{2}{3} \left( \frac{\mu_{\alpha\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^2 \overline{v_{\alpha\alpha}^t(v) v^2},$$

где  $v = |\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\alpha}|$  — относительная скорость при столкновениях, величину  $v^t \bar{v}^2$  следует усреднять по относительным скоростям. Для случая, когда  $v = \text{const}$  и распределение скоростей частиц максвелловское, усреднение приводит к соотношению

$$\langle (\Delta v_{y\alpha})^2 \rangle_1 = 2 \frac{\mu_{\alpha\alpha}}{m_{\alpha}^2} v_{\alpha\alpha}^t T_{\alpha}, \quad (9.75)$$

поскольку  $\bar{v}^2 = 3T_{\alpha\alpha} / \mu_{\alpha\alpha} \approx 3T_{\alpha} / \mu_{\alpha\alpha}$ , где  $T_{\alpha\alpha} = (m_{\alpha} T_{\alpha} + m_{\alpha} T_{\alpha}) / (m_{\alpha} + m_{\alpha})$  — эффективная температура, определяющая распределение по относительным скоростям. При зависящей от скорости частоте столкновений в соотношении (9.75) войдет, очевидно, величина  $\bar{v}^t$ , усредненная по распределению скоростей с весом  $v^2$ , определяемая формулой (9.27). Учитывая это и подставляя (9.75) в (9.74), находим выражение для коэффициента поперечной диффузии

$$D_{\alpha\perp} = \frac{1}{2} \langle (\overline{\Delta x})_{\alpha}^2 \rangle_1 = \frac{\mu_{\alpha\alpha}}{m_{\alpha}^2} \frac{\bar{v}_{\alpha\alpha} T_{\alpha}}{\omega_{H\alpha}^2}, \quad (9.76)$$

аналогичное (9.16). Полученный коэффициент определяет диффузию, связанную с градиентом концентрации.

Термодиффузия обусловлена изменением в пространстве среднего квадрата смещения  $\langle(\Delta x)^2\rangle \sim \rho^2 v$  из-за его зависимости от температуры:  $\rho_\alpha^2 v_{\alpha\alpha} \sim T_\alpha v_{\alpha\alpha} (T_\alpha)$ .

Термодиффузионный поток можно найти из равенства (9.70) при  $n = \text{const}$

$$\Gamma_{\alpha x}^T = -D_{\alpha\perp}^T \frac{n}{T_\alpha} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} = -\frac{\partial D_{\alpha\perp}}{\partial T_\alpha} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x}. \quad (9.77)$$

Отсюда получим соотношение для коэффициента термодиффузии, совпадающее с (9.51):

$$D_{\alpha\perp}^T = T_\alpha \frac{\partial D_{\alpha\perp}}{\partial T_\alpha} = \frac{1}{2} T_\alpha \frac{\partial \langle(\Delta x)^2\rangle_1}{\partial T_\alpha}. \quad (9.78)$$

Аналогично можно найти тепловой поток поперек магнитного поля. В соответствии с определением (см. § 6.1) он является потоком энергии в системе отсчета, в которой направленная скорость равна нулю. В этой системе перенос энергии обусловлен тем, что частицы, перемещающиеся из области с более высокой температурой в более холодную область, переносят большую энергию, чем частицы, перемещающиеся в противоположном направлении. Нетрудно оценить результирующий поток энергии. Будем по-прежнему считать, что градиент температуры направлен параллельно оси  $Ox$ . Выбор системы отсчета, в которой направленная скорость равна нулю, означает, что через любую площадку, в том числе и перпендикулярную градиенту температуры, встречные потоки частиц взаимно компенсируются. Плотность каждого из этих потоков определяется числом частиц, ларморовские центры которых в результате столкновений пересекают единичную площадку в одном из направлений в единицу времени. По порядку

$$\Gamma_{x+} = \Gamma_{x-} \approx nv |\overline{\Delta x}| \approx nv \rho_H. \quad (9.79)$$

В то же время энергия, переносимая каждой частицей в направлении противоположном градиенту температуры, больше, чем энергия, переносимая частицей в противоположном направлении, на величину порядка  $(\partial T/\partial x) |\Delta x| \approx \rho_H \partial T/\partial x$ . В результате образуется нескомпенсированный поток энергии

$$q_x \approx -nv \rho_H^2 \partial T/\partial x. \quad (9.80)$$

Из (9.80) следует оценка для коэффициента поперечной теплопроводности:

$$\mathcal{K}_\perp \approx nv \rho_H^2 \approx nT\nu/m\omega_H^2, \quad (9.81)$$

которая соответствует (9.36).

Нетрудно понять и происхождение других компонент теплового потока. Поток  $\mathbf{q}_d$ , пропорциональный  $(\mathbf{h} \times \text{grad } T_e)$  [см. (9.32)], как уже отмечалось, связан с диамагнитным потоком электронов, он возникает в результате суммирования ларморовских траекторий в неоднородной плазме. В движущейся системе отсчета, в которой

определяется тепловой поток, направленные скорости должны быть равны нулю, т. е. диамагнитный поток скомпенсирован. Однако при наличии градиента температуры возникает нескомпенсированный поток тепла, поскольку энергия частиц, движущихся в различных направлениях, различна (см. компоненты  $v_y$  на рис. 9.4). Он направлен перпендикулярно градиенту температуры и имеет порядок

$$q_d \approx n \langle v_{\perp} \rho_H \rangle \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{n \langle v_{\perp}^2 \rangle}{\omega_H} \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{nT}{m\omega_H} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (9.83)$$

что соответствует полученному выше результату [см. (9.32)].

При частотах столкновений, зависящих от скорости, возможна еще одна компонента теплового потока ( $q_u$ ), зависящая от направленного движения заряженных частиц и пропорциональная  $[\mathbf{h} \times \mathbf{u}_d]$  [см. (9.58)]. Эта составляющая возникает только в присутствии внешних сил, приводящих к появлению направленной скорости. Чтобы понять ее происхождение, учтем, что в системе, в которой поперечная направленная скорость электронов равна нулю, лоренцева сила также обращается в нуль. Внешние поперечные силы, действующие на заряженные частицы, компенсируются их силой трения о нейтральный газ, который в рассматриваемой системе координат имеет скорость  $-\mathbf{u}_{\perp d}$ . Однако при зависящей от скорости частоте столкновений такая компенсация имеет место только в среднем — она не означает

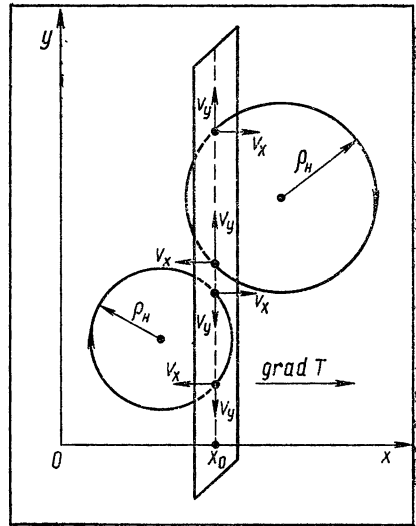


Рис. 9.4

компенсацию сил для групп частиц, обладающих различной тепловой скоростью. Поэтому можно сказать, что эффективная сила, действующая на быстрые («горячие») частицы, отличается от эффективной силы, действующей на медленные («холодные») частицы. При сильной зависимости частоты столкновений от скорости, когда  $\Delta F = (dR/dv) \Delta v \approx R$ , это отличие имеет порядок  $\Delta F \approx R \approx mv (u_d - u_{\alpha})$ .

Соответственно различаются и скорости  $u_d = (c/eH)[\mathbf{F} \times \mathbf{h}]$ . Различие скоростей дрейфа быстрых и медленных частиц приводит к переносу энергии в системе координат, в которой перенос электро-

нов отсутствует. Оценка плотности теплового потока дает

$$q_u = nT_\alpha \Delta u_F \approx \frac{cm_\alpha nT_\alpha \bar{v}_{\alpha\alpha}}{eH} [\mathbf{h} \times (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha)]. \quad (9.83)$$

Ограничимся здесь порядковыми оценками теплового потока заряженных частиц. Его строгое определение нетрудно провести на основании рассмотрения смещения заряженных частиц при столкновениях подобно тому, как это было сделано в § 7.3.

Из приведенного рассмотрения следует, что механизмы переноса заряженных частиц и энергии поперек сильного магнитного поля существенно отличаются от механизмов продольного переноса или переноса в отсутствие магнитного поля. Действительно, продольный перенос, как и перенос в отсутствие магнитного поля, обусловлен свободным движением заряженных частиц в промежутках между столкновениями, поэтому коэффициенты переноса уменьшаются с ростом массы частиц (уменьшаются скорость частиц в периоды между столкновениями, их ускорение в электрическом поле) и с ростом частоты столкновений (уменьшается длина свободного пробега). Напротив, перенос поперек магнитного поля определяется не перемещением частиц в период между столкновениями, а скачками ларморовских центров в моменты столкновений. Соответственно, коэффициенты поперечного переноса пропорциональны частоте столкновений. Они также пропорциональны массе и обратно пропорциональны квадрату напряженности магнитного поля, поскольку скачки имеют порядок ларморовского радиуса, который растет с массой и уменьшается с увеличением магнитного поля.

Найдем теперь термосилу, вызываемую поперечным градиентом температуры. Как и в отсутствие магнитного поля, термосила возникает из-за того, что при частоте столкновений, зависящей от скорости, встречные потоки частиц испытывают различное трение о нейтральный газ. Чтобы оценить это различие, выделим плоскость перпендикулярную градиенту температуры и сравним импульсы, переносимые заряженными частицами в эту плоскость из областей с разной температурой. Каждая частица в процессе ларморовского вращения дважды пересекает рассматриваемую плоскость (см. рис. 9.4). Проекция скорости вращения на направление  $\text{grad } T$  при этих двух пересечениях противоположны. Поскольку столкновения в обеих фазах равновероятны, среднее значение проекции передаваемого импульса, параллельной градиенту температуры, очевидно, равно нулю. Соответственно равна нулю и проекция термосилы на это направление. Проекцию термосилы на направление перпендикулярное магнитному полю и градиенту температуры можно оценить, суммируя результаты столкновений частиц, ларморовские центры которых находятся справа и слева от выделенной плоскости. Скорость первой группы направлена параллельно  $[\mathbf{h} \times \text{grad } T]$ , скорость второй — в противоположную сторону. В системе координат, движущейся так, чтобы суммарный импульс был равен нулю, суммарный импульс, передаваемый при столкновениях, от-

личен от нуля из-за неравенства частот столкновений для этих двух групп частиц. Поскольку расстояние между их ларморовскими центрами порядка ларморовского радиуса, различие частот столкновений оценивается формулой  $\delta\nu \approx \rho_H \partial\nu/\partial x$ . Это различие определяет средний передаваемый в единицу времени импульс, т. е. термосилу

$$R^T \sim \mu v \bar{v} \approx \mu \bar{v} \rho_H \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \approx \frac{\mu v^2}{\omega_H} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \approx \frac{T}{\omega_H} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}. \quad (9.84)$$

Учитывая направление передаваемого при столкновениях импульса, можно записать (9.84) в векторной форме:

$$\mathbf{R}^T = \frac{T}{\omega_H} [\mathbf{h} \times \text{grad } \bar{v}] = \frac{\bar{v}}{\omega_H} g_T [\mathbf{h} \times \text{grad } T]; \quad g_T = \frac{T}{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial T}. \quad (9.85)$$

Проведенная оценка дает выражение для термосилы с точностью до численного коэффициента порядка единицы. Более точное усреднение по столкновениям и по скоростям также приводит к (9.85), причем входящая в нее усредненная частота столкновений определяется формулой (9.27).

#### § 9.4. Амбиполярная диффузия и баланс заряженных частиц слабоионизованной плазмы в магнитном поле

В магнитном поле, как и в его отсутствие, раздельная диффузия электронов и ионов в плазме невозможна в силу условия квазинейтральности. Возникающее в результате относительно небольшого разделения зарядов электрическое поле приводит к выравниванию потоков заряженных частиц. В трехкомпонентной плазме, состоящей из электронов, ионов и нейтральных частиц, уравнения баланса электронной и ионной компонент

$$\left. \begin{aligned} \partial n/\partial t + \text{div}(\mathbf{n}\mathbf{u}_i) &= \delta n/\delta t, \\ \partial n/\partial t + \text{div}(\mathbf{n}\mathbf{u}_e) &= \delta n/\delta t \end{aligned} \right\} \quad (9.86)$$

могут одновременно удовлетворяться лишь при равенстве дивергенций направленных потоков

$$\text{div}(\mathbf{n}\mathbf{u}_i) = \text{div}(\mathbf{n}\mathbf{u}_e). \quad (9.87)$$

Решение системы (9.86) в магнитном поле в общем случае гораздо сложнее, чем в его отсутствие, из-за анизотропии коэффициентов подвижности и диффузии. Эти решения совпадают лишь для одномерной задачи, когда параметры плазмы зависят от одной координаты. Например, когда однородное магнитное поле направлено вдоль оси системы, а параметры плазмы зависят только от радиуса, условие (9.87) принимает вид

$$\frac{d}{dr}(r n u_{er}) = \frac{d}{dr}(r n u_{ir}). \quad (9.88)$$



Поскольку величины  $n$  и  $u$  конечны при  $r \rightarrow 0$ , из (9.88) следует равенство радиальных компонент направленных скоростей

$$u_{er} = u_{ir}. \quad (9.89)$$

Это равенство определяет амбиполярную диффузию. Подставляя в него общую формулу для поперечной направленной скорости, получаем так же, как и в отсутствие магнитного поля, выражения для напряженности электрического поля, обеспечивающего амбиполярность, и для амбиполярной направленной скорости. Если градиент температуры отсутствует, то они имеют вид, аналогичный (7.65), (7.69):

$$E_{A\perp} = \frac{D_{i\perp} - D_{e\perp}}{b_{i\perp} + b_{e\perp}} \frac{\text{grad}_{\perp} n}{n}; \quad (9.90)$$

$$u_{A\perp} = -D_{A\perp} \frac{\text{grad}_{\perp} n}{n}; \quad D_{A\perp} = \frac{D_{e\perp} b_{i\perp} + D_{i\perp} b_{e\perp}}{b_{i\perp} + b_{e\perp}}. \quad (9.91)$$

Используя формулы (9.12) и пренебрегая величиной  $m_e v_{ea} / m_i v_{ia}$  по сравнению с единицей и с  $T_i / T_e$ , получаем

$$E_{A\perp} = -\frac{T_e}{e} \frac{1 - \frac{m_i}{\mu_{ia}} \frac{T_i}{T_e} \frac{\omega_{He} \omega_{Hi}}{v_{ia} v_{ea}}}{1 + \frac{m_i}{\mu_{ia}} \frac{\omega_{Hi} \omega_{He}}{v_{ia} v_{ea}}} \frac{\text{grad}_{\perp} n}{n}; \quad (9.92)$$

$$D_{A\perp} = \frac{T_e + T_i}{\mu_{ia} v_{ia} \left( 1 + \frac{m_i}{\mu_{ia}} \frac{\omega_{Hi} \omega_{He}}{v_{ia} v_{ea}} \right)}. \quad (9.93)$$

Эти соотношения позволяют проследить переход от слабых магнитных полей к сильным. В слабых магнитных полях, в которых  $\omega_{He} \omega_{Hi} \ll v_{ea} v_{ia}$ , формулы для  $E_{A\perp}$  и  $D_{A\perp}$  оказываются такими же, как и в отсутствие магнитного поля [ср. (7.66), (7.70)]. Благодаря более быстрому уходу электронов плазма при этом заряжается положительно, а стенки отрицательно и амбиполярное электрическое поле имеет порядок  $E_{\perp} \approx T_e / e L_{\perp}$ . С ростом магнитного поля коэффициенты диффузии и подвижности электронов уменьшаются значительно быстрее, чем ионные. В магнитном поле, имеющем напряженность, при которой  $\omega_{He} \omega_{Hi} / v_{ea} v_{ia} = (T_e / T_i) \mu_{ia} / m_i$ , коэффициенты диффузии электронов и ионов равны. При этом условие амбиполярности движения выполняется в отсутствие электрического поля. Дальнейший рост магнитного поля приводит к изменению соотношения между коэффициентами диффузии электронов и ионов — ионы начинают двигаться поперек поля быстрее электронов. В результате заряд плазмы становится отрицательным. В сильном маг-

нитном поле, в котором  $\omega_{He}\omega_{Hi} \gg v_{ea}v_{ia}$ , формулы (9.92), (9.93) принимают вид

$$E_{A\perp} = \frac{T_i}{e} \frac{\text{grad}_{\perp} n}{n}; \quad (9.94)$$

$$D_{A\perp} = (T_e + T_i)v_{ea}/m_e\omega_{He}^2. \quad (9.95)$$

Условие  $\omega_{He}\omega_{Hi} \gg v_{ea}v_{ia}$  называют иногда условием *замагниченности* плазмы. При его выполнении коэффициент диффузии пропорционален частоте столкновений электронов и обратно пропорционален квадрату напряженности магнитного поля. Он отличается от электронного лишь множителем  $(1 + T_i/T_e)$ . Влияние градиента температуры на амбиполярную диффузию может быть учтено так же, как и при отсутствии магнитного поля. В частности, для случая, когда частота столкновений не зависит от скорости, его учет приводит к выражению для направленной скорости, аналогичному (7.74):

$$u_{A\perp} = -(1/n)\text{grad}(D_{A\perp}n), \quad (9.96)$$

где  $D_{A\perp}$  определяется формулами (9.93), (9.95).

Подстановка формул для амбиполярной направленной скорости в уравнения баланса заряженных частиц дает уравнение диффузии, аналогичное (7.77). При  $T_e, T_i = \text{const}$ , подставляя (9.96) в (9.86), получаем

$$\partial n/\partial t + D_{A\perp}\Delta n = \delta n/\delta t. \quad (9.97)$$

Решение уравнения диффузии требует определения граничных условий для концентрации. Как было показано в § 7.5, в отсутствие магнитного поля отношение граничной концентрации к концентрации в центральной части объема имеет порядок

$$n_g/n_0 \sim \lambda_i/L\sqrt{T_e/T_i}. \quad (9.98)$$

Поскольку обычно  $\lambda_i \ll L$ , граничная концентрация оказывается много меньше, чем концентрация в центре, и с достаточной точностью могут быть использованы нулевые граничные условия. Этот вывод сохраняет свою силу и для поперечной диффузии заряженных частиц в магнитном поле. В слабом магнитном поле, при  $\omega_{Hi}\omega_{He} \ll v_{ea}v_{ia}$ , по-прежнему справедливо рассмотрение, проведенное в § 7.5, так как магнитное поле практически не влияет на движение ионов ( $\omega_{Hi} \ll v_{ia}$ ), а знак заряда стенок отрицателен, как и в отсутствие магнитного поля (см. (9.92)).

Нетрудно оценить граничную концентрацию и в случае сильного магнитного поля, когда  $\omega_{Hi}\omega_{He} \gg v_{ia}v_{ea}$ . В таком поле, как было показано, коэффициент поперечной диффузии для ионов больше, чем для электронов, и стенки баллона с плазмой, параллельные магнитному полю, заряжаются положительно. Поэтому электроны, попадающие на границу пристеночного слоя, должны притягиваться к стенке в электрическом поле слоя. Величину поля в слое можно найти аналогично тому, как это было сделано в § 7.5. Нетрудно

оценить поток электронов, полагая, что размеры пристеночного слоя больше ларморовского радиуса. Перемещение электронов поперек магнитного поля на границе слоя обусловлено столкновениями. Поскольку в каждом столкновении их среднее перемещение имеет порядок ларморовского радиуса, плотность потока из плазмы на стенку приблизительно равна

$$\Gamma_{eq} \approx n_q \rho_{He} v_{ea} \quad (9.99)$$

В то же время амбиполярный поток электронов из плазмы имеет порядок

$$\Gamma \approx D_{A\perp} |\text{grad}_{\perp} n| \approx \frac{(T_e + T_i) v_{ea} n_0}{m_e \omega_{He}^2 L_{\perp}}, \quad (9.100)$$

где  $L_{\perp}$  — характерный поперечный размер плазмы. Приравнявая этот поток потоку электронов в слое, находим соотношение концентраций заряженных частиц на границе плазмы и в центре:

$$\frac{n_g}{n_0} \approx \frac{1}{\omega_{He} L_{\perp}} \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \approx \frac{\rho_{He}}{L_{\perp}}. \quad (9.101)$$

В сильном магнитном поле обычно  $\rho_{He} \ll L_{\perp}$ , соответственно  $n_g \ll \ll n_0$  и приближенно можно положить граничную концентрацию равной нулю.

Таким образом, уравнение диффузии (9.97) и граничные условия для концентрации при рассмотрении одномерной диффузии поперек магнитного поля такие же, как и в отсутствие магнитного поля. Отличны лишь коэффициенты диффузии. Соответственно совпадают и решения этих уравнений. В частности, решения уравнений для стационарного газового разряда в длинном цилиндрическом баллоне приводят к диффузионному распределению, описываемому бесселевой функцией нулевого порядка (7.94). При этом соотношение между средней частотой ионизации  $\nu^i$  и коэффициентом диффузии определяется условием равенства скоростей ионизации и устрания (7.96):

$$\nu^i = 5,8 D_{A\perp} / a^2. \quad (9.102)$$

Различие состоит лишь в том, что в сильном магнитном поле коэффициент диффузии и соответственно  $\nu^i$  много меньше, чем в отсутствие поля, причем с ростом поля коэффициент диффузии быстро уменьшается ( $D_{A\perp} \sim 1/H^2$ ).

Для описания распада плазмы в магнитном поле, обусловленного поперечной диффузией (когда длина баллона много больше радиуса), также остаются справедливыми выводы, полученные в § 7.8. В частности, на поздней стадии распада, когда установилось диффузионное распределение, закон изменения концентрации со временем оказывается экспоненциальным (7.136). Постоянная времени распада на этой стадии при  $\omega_{He} \omega_{Hi} \gg \nu_{ea} \nu_{ia}$  удовлетворяет равенству

$$\tau_A = \frac{D_{A\perp}}{\Lambda_{\perp}^2} = \frac{11,6}{a^2} \frac{T_a v_{ea}}{m_e \omega_{He}^2}. \quad (9.103)$$

Здесь использовано соотношение (9.95) и учтено, что на поздних стадиях распада  $T_e = T_i = T_a$ .

Мы рассмотрели амбиполярную диффузию и баланс заряженных частиц в плазме, параметры которой зависят от одной координаты. Как уже отмечалось, в неоднородном случае решение задачи усложняется. Рассмотрим, например, распад плазмы в цилиндрическом баллоне, ось которого совпадает с направлением магнитного поля, полагая, что концентрация заряженных частиц зависит как от продольной координаты  $z$ , так и от радиуса  $r$ . В этом случае уравнение баланса электронов и ионов (9.86) принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (nu_{z\alpha}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rnu_{r\alpha}) = 0, \quad (9.104)$$

где осевая и радиальная составляющие направленной скорости определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u_{z\alpha} &= Z_\alpha b_{\parallel\alpha} E_{\parallel} - D_{\parallel\alpha} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z}; \\ u_{r\alpha} &= Z_\alpha b_{\perp\alpha} E_r - D_{\perp\alpha} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (9.105)$$

Концентрации электронов и ионов приняты одинаковыми в силу условия квазинейтральности.

Решение этих уравнений не обязательно должно соответствовать режиму амбиполярной диффузии. Такой режим может, однако, быть реализован при распаде плазмы в баллоне с диэлектрическими стенками. При этом амбиполярный уход соответствует равенству электронных и ионных скоростей как вдоль, так и поперек магнитного поля:  $u_{ze} = u_{zi}$ ,  $u_{re} = u_{ri}$ . Из них вытекают в соответствии с результатами § 7.4 и настоящего параграфа выражения для продольной и поперечной компонент электрического поля

$$E_{Az} = - \frac{T_e}{e} \frac{\text{grad}_z n}{n}; \quad (9.106)$$

$$E_{Ar} = - \frac{T_e}{e} \frac{1 - \frac{m_i}{\mu_{ia}} \frac{T_i}{T_e} \frac{\omega_{He} \omega_{Hi}}{\nu_{ea} \nu_{ia}}}{1 + \frac{m_i}{\mu_{ia}} \frac{\omega_{He} \omega_{Hi}}{\nu_{ia} \nu_{ea}}} \frac{\text{grad}_r n}{n}. \quad (9.107)$$

Как видно, это поле может быть потенциальным (т. е.  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ) лишь при условии

$$\partial^2 (\ln n) / \partial r \partial z = 0, \quad (9.108)$$

т. е. когда

$$n(z, r) = n_z(z) n_r(r). \quad (9.109)$$

Из (9.106), (9.107) следует, что в сильном магнитном поле знаки заряда боковых и торцовых стенок баллона противоположны

(рис. 9.5, *a*). Торцовые стенки заряжаются отрицательно, так как электроны диффундируют вдоль магнитного поля много быстрее ионов. Напротив, боковые стенки заряжаются положительно, поскольку коэффициент диффузии ионов больше коэффициента диффузии электронов. Подстановка полей (9.106), (9.107) в уравнение распада (9.104) приводит его к виду

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_{A\parallel} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} - D_{A\perp} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n}{\partial r} \right) = 0, \quad (9.110)$$

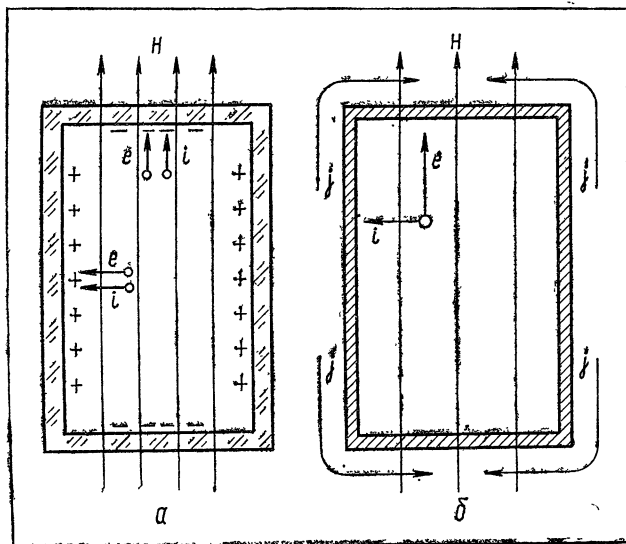


Рис. 9.5

где коэффициенты  $D_{A\parallel}$  и  $D_{A\perp}$  определяются соотношениями (7.73), (9.93). Частное решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$n = n_0 \exp(-t/\tau) J_0(r/\Lambda_{\perp}) \cos z/\Lambda_{\parallel}, \quad (9.111)$$

где длины  $\Lambda_{\perp} = a/2,405$  и  $\Lambda_{\parallel} = d/\pi$  выбраны так, чтобы на границах при  $r = a$  и  $z = \pm d/2$  ( $d$  — длина баллона) концентрация обращалась в нуль. Постоянная времени распада в (9.111) определяется соотношением

$$\tau = (D_{A\parallel}/\Lambda_{\parallel}^2 + D_{A\perp}/\Lambda_{\perp}^2)^{-1}, \quad (9.112)$$

в соответствии с которым эффективная скорость диффузионного устранения, характеризуемая величиной  $1/\tau$ , равна сумме величин  $1/\tau_{\parallel}$  и  $1/\tau_{\perp}$ , соответствующих продольному и поперечному амбиплярному переносу частиц. Можно показать, что общее решение уравнения диффузии при нулевых граничных условиях (9.98), (9.101) на поздних стадиях распада стремится к полученному частному решению.

Следует, однако, отметить, что в магнитном поле часто реализуется неамбиполярный режим диффузии, характеризующийся протеканием по плазме диффузионных токов. Так, например, при распаде плазмы в баллоне с проводящими стенками распределение зарядов, изображенное на рис. 9.5, а, не может быть получено. Токи по стенкам приводят к выравниванию потенциала и к изменению распределения электрического поля в плазме. Соответственно появляются и токи в плазме. В частности; можно представить себе ситуацию, когда электроны диффундируют в основном вдоль магнитного поля (у них время диффузии поперек поля много больше времени продольной диффузии  $D_{e\parallel}/L_{\parallel}^2 \ll D_{e\perp}/L_{\perp}^2$ ), а ионы — поперек поля (у них, напротив, велико время продольной диффузии  $D_{i\parallel}/L_{\parallel}^2 \ll D_{i\perp}/L_{\perp}^2$ ). При этом в плазме возникает ток, замыкающийся по стенкам (рис. 9.5, б). Постоянная времени распада плазмы определяется при этом временем ухода более медленной компоненты, т. е.  $\tau_{e\parallel}$  или  $\tau_{i\perp}$ :

$$\tau_{e\parallel} \approx D_{e\parallel}/L_{\parallel}^2; \quad \tau_{i\perp} \approx D_{e\perp}/L_{\perp}^2. \quad (9.113)$$

Оно может быть много меньше времени амбиполярной диффузии (9.112). Ускорение диффузии, обусловленное неамбиполярным переносом электронов и ионов на проводящие стенки, называют обычно *эффектом короткого замыкания*.

Аналогичный эффект можно наблюдать при размещении цилиндрического баллона с плазмой под углом к магнитному полю, при диффузии в баллоне сложной формы, при помещении внутрь плазмы металлических тел и т. д. Таким образом анализ диффузии заряженных частиц в магнитном поле требует детального разбора условий формирования поля пространственного заряда и распределения токов в плазме.

Баланс энергий электронов и ионов в сильном магнитном поле рассматривается аналогично тому, как это делалось в отсутствие магнитного поля (см. § 7.5, 7.6). Отличия связаны с уменьшением поперечных коэффициентов переноса и с изменением граничных условий. Не останавливаясь на детальном анализе этих отличий, отметим лишь, что резкое ослабление поперечной теплопроводности электронной компоненты в сильном магнитном поле приводит к тому, что роль потерь энергии, связанных с теплопроводностью, пренебрежимо мала. Поэтому уравнение баланса энергии электронов оказывается локальным, т. е. определяется соотношением эффективного джоулева нагрева и эффективных потерь энергии в результате упругих и неупругих столкновений электронов.

### § 9.5. Направленное движение заряженных частиц сильноионизованной плазмы поперек магнитного поля

Рассмотрим направленное движение в плазме, в которой частота столкновений заряженных частиц друг с другом и частота их столкновений с нейтральными частицами сравнимы. Направленное движение вдоль магнитного поля будет таким же, как и в отсутствие по-

ля. Соответственно для продольной компоненты направленной скорости можно использовать выражения, полученные в § 7.9. Определим здесь ее поперечную составляющую.

Начнем со случая полностью ионизованной плазмы. Усредненные поперечные уравнения движения электронов и ионов полностью ионизованной плазмы в магнитном поле для стационарных условий можно записать в виде

$$Z_\alpha e \mathbf{E} + \frac{Z_\alpha e}{c} [\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{H}] - \frac{\text{grad } p_\alpha}{n} + m_\alpha \frac{\delta \mathbf{u}_\alpha}{\delta t} = 0, \quad (9.114)$$

где  $m_\alpha \delta \mathbf{u}_\alpha / \delta t$  — столкновительный член, обусловленный электрон-ионными столкновениями. При этом, поскольку импульс при таких столкновениях сохраняется, можно записать

$$m_e \delta \mathbf{u}_e / \delta t = -m_i \delta \mathbf{u}_i / \delta t. \quad (9.115)$$

Выражение для столкновительного члена было определено в § 7.9. В соответствии с (7.144) и (7.145)

$$\left( \frac{\delta \mathbf{u}_e}{\delta t} \right)_{ei} = -\bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) + \frac{3}{5} \bar{v}_{ei} \frac{\mathbf{q}_e}{n T_e}, \quad (9.116)$$

где  $\bar{v}_{ei} = (4 \sqrt{2\pi}/3)(n e^4 / m_e^{1/2} T_e^{3/2}) L_e$  — частота электрон-ионных столкновений, усредненная по максвелловскому распределению;  $\mathbf{q}_e$  — вектор теплового потока электронов. Поперечные компоненты вектора теплового потока определяются равенством (9.32). Для достаточно больших полей, в которых  $\omega_{He} \gg v_{ei}, v_{ea}$ , наибольшей является дрейфовая компонента

$$\mathbf{q}_d = \frac{5}{2 m_e} \frac{n T_e}{\omega_{He}} [\mathbf{h} \times \text{grad } T_e].$$

Подставляя ее в (9.116) и опуская остальные компоненты (величины которых меньше  $q_d$  в  $\bar{v}_{ei} / \omega_{He}$  и  $(\bar{v}_{ei} / \omega_{He})^2$  раз), получаем

$$\left( m_e \frac{\delta \mathbf{u}_e}{\delta t} \right)_{ei} = -\bar{v}_{ei} m_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) - \frac{3}{2} m_e \frac{\bar{v}_{ei}}{\omega_{He}} [\mathbf{h} \times \text{grad } T_e]. \quad (9.117)$$

Первое из слагаемых определяет силу трения при электрон-ионных столкновениях

$$\mathbf{R}_{ei} = -\mathbf{R}_{ie} = -m_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (9.118)$$

второе слагаемое — термосилу

$$\mathbf{R}_{ei}^T = -\mathbf{R}_{ie}^T = -\frac{3}{2} \frac{\bar{v}_{ei}}{\omega_{He}} [\mathbf{h} \times \text{grad } T_e]. \quad (9.119)$$

Легко убедиться, что формула (9.119) совпадает с (9.28), так как для электрон-ионных столкновений  $\bar{v}_{ei} \sim 1/T_e^{3/2}$  и  $g_{ei}^T = (T_e / \bar{v}_{ei}) d\bar{v}_{ei} / dT_e = -3/2$ .

Подставляя столкновительный член (9.117) в (9.114) и учитывая (9.115), получаем поперечные уравнения движения электронов и ионов в виде

$$-e\mathbf{E}_{\perp} - \frac{1}{n} \text{grad}_{\perp}(nT_e) - \frac{e}{c} [\mathbf{u}_{e\perp} \times \mathbf{H}] - \frac{3}{2} \frac{\bar{v}_{ei}}{\omega_{He}} [\mathbf{h} \times \text{grad} T_e] - m_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_{e\perp} - \mathbf{u}_{i\perp}) = 0; \quad (9.120)$$

$$e\mathbf{E}_{\perp} - \frac{1}{n} \text{grad}_{\perp}(nT_i) + \frac{e}{c} [\mathbf{u}_{i\perp} \times \mathbf{H}] + \frac{3}{2} \frac{\bar{v}_{ei}}{\omega_{He}} \times [\mathbf{h} \times \text{grad} T_e] + m_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_{e\perp} - \mathbf{u}_{i\perp}) = 0. \quad (9.121)$$

Рассмотрим сначала движение заряженных частиц в полностью ионизованной однородной плазме под действием электрического поля. Полагая в этом случае  $\text{grad} n = 0$  и  $\text{grad} T_e = 0$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} -e\mathbf{E}_{\perp} - \frac{e}{c} [\mathbf{u}_{e\perp} \times \mathbf{H}] - m_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_{e\perp} - \mathbf{u}_{i\perp}) &= 0; \\ e\mathbf{E}_{\perp} + \frac{e}{c} [\mathbf{u}_{i\perp} \times \mathbf{H}] + m_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_{e\perp} - \mathbf{u}_{i\perp}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.122)$$

Складывая уравнения, легко убедиться, что они приводят к равенству скоростей электронов и ионов. При этом сила трения обращается в нуль и решение дает скорость электрического дрейфа (8.27) в условиях, когда столкновения отсутствуют:

$$\mathbf{u}_{e\perp} = \mathbf{u}_{i\perp} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] / H^2. \quad (9.123)$$

Полученный результат означает, что в однородной полностью ионизованной плазме постоянное поперечное электрическое поле не вызывает тока, т. е. поперечная проводимость такой плазмы равна нулю. Этот результат понять нетрудно. В отсутствие столкновений электроны и ионы под действием постоянного электрического поля дрейфуют с одинаковой скоростью, равной (9.123). Естественно поэтому, что столкновения между ними не приводят к трению. Рассуждая по-другому, можно перейти к системе отсчета, движущейся со скоростью дрейфа. В ней направленные скорости электронов и ионов равны нулю, а электрическое поле отсутствует. Очевидно, что в таких условиях столкновения не могут привести к возникновению направленного движения.

Следует, однако, еще раз подчеркнуть, что вывод об отсутствии тока справедлив для однородной плазмы. В неоднородной плазме столкновения могут привести к возникновению тока. Представим себе, например, что в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям, существует препятствие движению заряженных частиц и их направленная скорость равна нулю. Как следует из общего уравнения (9.114), это возможно, если в направлении электрического дрейфа  $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$  есть градиент давления. Тогда проекция лоренцевой силы на направление электрического поля



обратится в нуль и уравнение движения в направлении электрической силы (9.122) будет таким же, как в отсутствие магнитного поля. Пусть, например, электрическое поле направлено вдоль оси  $Ox$ , а движение в направлении  $Oy$  ограничено так, что  $u_y = 0$ . Тогда проекция уравнения (9.122) на ось  $Ox$  приведет к равенству

$$eE = -m_e \bar{v}_{ei} (u_{ix} - u_{ex}),$$

откуда для силы тока найдем выражение

$$j = ne (u_{ix} - u_{ex}) = \frac{ne^2}{m_e \bar{v}_{ei}} E, \quad (9.124)$$

аналогичное формуле (7.152), полученной в отсутствие магнитного поля. Этот эффект называют иногда *эффектом восстановления поперечной проводимости плазмы* при подавлении электрического дрейфа.

Найдем теперь решение уравнений (9.120), (9.121) в общем случае, когда наряду с электрическим полем имеются градиенты температуры и концентрации. Складывая эти уравнения, получаем

$$\frac{e}{c} [(\mathbf{u}_{i\perp} - \mathbf{u}_{e\perp}) \times \mathbf{H}] = \frac{1}{n} \text{grad}_{\perp} n (T_e + T_i).$$

Это равенство дает разность поперечных скоростей электронов и ионов

$$-\mathbf{u}_{i\perp} - \mathbf{u}_{e\perp} = \frac{c}{neH} [\mathbf{h} \times \text{grad} n (T_e + T_i)]. \quad (9.125)$$

Подставив ее в (9.120), получим векторное уравнение

$$\begin{aligned} e\mathbf{E}_{\perp} - \frac{1}{n} \text{grad}_{\perp} (nT_e) - \frac{\bar{v}_{ei}}{\omega_{He}} \frac{[\mathbf{h} \times \text{grad} n (T_e + T_i)]}{n} - \\ - \frac{3}{2} \frac{\bar{v}_{ei}}{\omega_{He}} [\mathbf{h} \times \text{grad} T_e] = m_e \omega_{He} [\mathbf{u}_{e\perp} \times \mathbf{h}]. \end{aligned}$$

Умножая его векторно на  $\mathbf{h}$ , определим направленную скорость электронов:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{e\perp} = \frac{c}{H} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}] - \frac{c}{enH} [\mathbf{h} \times \text{grad} (nT_e)] - \frac{\bar{v}_{ei} (T_e + T_i)}{m_e \omega_{He}^2} \times \\ \times \frac{\text{grad} n}{n} + \frac{1}{2} \frac{\bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} \text{grad} T_e - \frac{\bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} \text{grad} T_i \quad (9.126) \end{aligned}$$

и с помощью (9.121) — направленную скорость ионов:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i\perp} = \frac{c}{H} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}] + \frac{c}{enH} [\mathbf{h} \times \text{grad} (nT_i)] - \frac{\bar{v}_{ei} (T_e + T_i)}{m_e \omega_{He}^2} \frac{\text{grad} n}{n} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} \text{grad} T_e - \frac{\bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} \text{grad} T_i. \quad (9.127) \end{aligned}$$

Первые два слагаемых этих выражений дают скорость дрейфа электронов и ионов — дрейф под действием электрического поля и диамагнитный дрейф, связанный с градиентом давления. Эти компоненты рассматривались ранее для бесстолкновительной плазмы (см. § 8.6). Поэтому отметим лишь, что столкновения заряженных частиц друг с другом на них не влияют. Остальные слагаемые для электронов и ионов одинаковы:

$$\mathbf{u}_{ei} = \mathbf{u}_{ii} = -\frac{\bar{v}_{ei}(T_e + T_i)}{m_e \omega_{He}^2} \frac{\text{grad } n}{n} + \frac{\bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} \text{grad} \left( \frac{1}{2} T_e - T_i \right). \quad (9.128)$$

Они определяют диффузию заряженных частиц поперек магнитного поля: первый — диффузию, вызванную градиентом концентрации, второй — термодиффузию. Коэффициент поперечной диффузии в магнитном поле равен множителю при первом слагаемом:

$$D_{e\perp} = D_{i\perp} = \bar{v}_{ei} (T_e + T_i) / m_e \omega_{He}^2. \quad (9.129)$$

Из полученных формул видно, что диффузия в полностью ионизованной плазме является амбиполярной (т. е. коэффициенты диффузии электронов и ионов равны) независимо от напряженности электрического поля.

Поперечные диффузионные потоки заряженных частиц в сильных магнитных полях, в которых циклотронная частота много больше частоты столкновений, могут быть определены и другим способом, основанным на суммировании смещений ларморовских центров заряженных частиц при столкновениях. Такой способ позволяет наиболее просто проанализировать диффузию в плазме произвольного состава. При этом, поскольку столкновения различных типов независимы, диффузионный поток частиц данного сорта получается в результате суммирования потоков, связанных со всеми типами столкновений:

$$\Gamma_\alpha = \sum_\beta \Gamma_{\alpha\beta}. \quad (9.130)$$

Каждый из этих парциальных потоков может быть, в свою очередь, найден с помощью формулы (9.70), дающей связь плотности потока со смещением частиц:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = n_\alpha \langle \Delta x_{\alpha\beta} \rangle_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [n_\alpha \langle (\Delta x_{\alpha\beta})^2 \rangle_1], \quad (9.131)$$

где  $\langle \Delta x_{\alpha\beta} \rangle_1$  — среднее смещение, а  $\langle (\Delta x_{\alpha\beta})^2 \rangle_1$  — средний квадрат смещения частиц  $\alpha$  в направлении градиента концентрации, обусловленный их столкновениями с частицами  $\beta$  в единицу времени. Для простоты будем полагать, что градиенты температуры отсутствуют. Смещение ларморовского центра при одном столкновении

связано с изменением скорости соотношением (9.61)\*:

$$\Delta x_{\alpha} = \frac{\Delta v_y}{\omega_{H\alpha}} = \frac{cm_{\alpha} \Delta v_y}{Z_{\alpha} eH}.$$

Диффузионный поток, обусловленный хаотическими смещениями при столкновениях, как и в случае слабо ионизованной плазмы, может быть найден с помощью формулы (9.75) для среднего квадрата смещения.

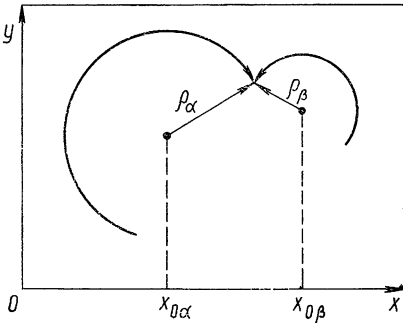


Рис. 9.6

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x_{\alpha\beta})^2 \rangle_1 &= \frac{\langle (\Delta v_{ay})^2 \rangle_1}{\omega_{H\alpha}^2} = \\ &= 2 \frac{\mu_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}^2 \omega_{H\alpha}^2} \bar{v}_{\alpha\beta} = \\ &= 2 \frac{\mu_{\alpha\beta} c^2}{Z_{\alpha}^2 e^2 H^2} T_{\alpha\beta} \bar{v}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (9.132)$$

где  $T_{\alpha\beta} = (m_{\alpha} T_{\beta} + m_{\beta} T_{\alpha}) / (m_{\beta} + m_{\alpha})$ .

В диффузионном потоке, связанном со столкновениями заряженных частиц, следует учитывать также эффект несимметрии смещения, обусловленный градиентом концентрации частиц, столкновения с которыми вызывают диффузию. Эта составляющая потока связана со средним смещением. Суммирование смещений по столкновениям и усреднение по скоростям сталкивающихся частиц в соответствии с (9.65) дают

$$\langle \Delta x_{\alpha\beta} \rangle_1 = \frac{\langle \Delta v_{ay} \rangle_1}{\omega_{H\alpha}} = - \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_{\alpha} \omega_{H\alpha}} \langle v_{\alpha\beta}^t (v_{\alpha y} - v_{\beta y}) \rangle, \quad (9.133)$$

где правая часть усреднена по скоростям частиц  $\alpha$  и  $\beta$ . При усреднении следует иметь в виду, что ларморовский центр частиц  $\beta$  при столкновении не совпадает с ларморовским центром частицы  $\alpha$ . Расстояние между ними определяется векторами  $\rho_{\alpha}$ ,  $\rho_{\beta}$ , проведенными из центров к точке столкновения (рис. 9.6):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{\perp 0\beta} - \mathbf{r}_{\perp 0\alpha} &= \rho_{\alpha} - \rho_{\beta} = \mathbf{h} \times (\mathbf{v}_{\alpha} / \omega_{H\alpha} - \mathbf{v}_{\beta} / \omega_{H\beta}); \\ x_{0\beta} - x_{0\alpha} &= v_{\beta y} / \omega_{H\beta} - v_{\alpha y} / \omega_{H\alpha}. \end{aligned} \right\} (9.134)$$

Соответственно концентрация заряженных частиц  $\beta$ , входящая в частоту столкновений  $\nu_{\alpha\beta}$ , должна браться в точке  $x_{0\beta}$ , которая отстоит от  $x_{0\alpha}$  на расстоянии, зависящем от скорости частиц. Полагая

\* Мы полагаем далее в этом параграфе  $\omega_{H\alpha} = Z_{\alpha} eH / cm_{\alpha}$ , чтобы учесть случай  $|Z_{\alpha}| > 1$ .

изменение концентрации на длине  $x_{0\beta} - x_{0\alpha}$  малым, можно использовать следующее разложение для  $n_\beta$ :

$$n_\beta = n_\beta(x_{0\alpha}) + (x_{0\beta} - x_{0\alpha}) \frac{\partial n_\beta}{\partial x} = n_\beta(x_{0\alpha}) + (v_{\beta y} / \omega_{H\beta} - v_{\alpha y} / \omega_{H\alpha}) \frac{\partial n_\beta}{\partial x}. \quad (9.135)$$

Подставляя его в (9.133) и учитывая, что  $v_{\alpha\beta} \sim n_\beta$ , находим

$$\langle \Delta x_{\alpha\beta} \rangle_1 = - \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha \omega_{H\alpha}} \left\langle \left[ v_{\alpha\beta}^t (v_{\alpha y} - v_{\beta y}) + v_{\alpha\beta}^t (v_{\alpha y} - v_{\beta y}) \left( \frac{v_{\beta y}}{\omega_{H\beta}} - \frac{v_{\alpha y}}{\omega_{H\alpha}} \right) \frac{1}{n_\beta} \frac{\partial n_\beta}{\partial x} \right] \right\rangle_1, \quad (9.136)$$

где  $v_{\alpha\beta}^t$  определяется в точке  $x_{0\alpha}$ .

При усреднении по скоростям будем считать распределение скоростей частиц обоих сортов изотропным. Тогда первое слагаемое обращается в нуль и формула принимает вид

$$\langle \Delta x_{\alpha\beta} \rangle_1 = \frac{1}{3} \frac{\mu_{\alpha\beta}}{Z_\alpha m_\alpha \omega_{H\alpha}} \bar{v}_{\alpha\beta} \left( \frac{\bar{v}_\beta^2}{Z_\beta \omega_{H\beta}} + \frac{\bar{v}_\alpha^2}{Z_\alpha \omega_{H\alpha}} \right) \frac{1}{n_\beta} \frac{\partial n_\beta}{\partial x} = \frac{\mu_{\alpha\beta} c^2}{Z_\alpha e^2 H^2} \bar{v}_{\alpha\beta} \left( \frac{T_\beta}{Z_\beta} + \frac{T_\alpha}{Z_\alpha} \right) \frac{1}{n_\beta} \frac{\partial n_\beta}{\partial x}, \quad (9.137)$$

$\bar{v}_{\alpha\beta}$  — частота столкновений, усредненная с весом  $v^2$ . Подставляя полученные соотношения для  $\langle \Delta x_{\alpha\beta} \rangle_1$  (9.137) и  $\langle (\Delta x_{\alpha\beta})^2 \rangle_1$  (9.132) в (9.131), получаем общее выражение для плотности диффузионного потока частиц  $\alpha$ , обусловленного их столкновениями с частицами  $\beta$  под действием градиентов концентрации сталкивающихся частиц. В векторной форме это выражение можно записать следующим образом:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = - \frac{\mu_{\alpha\beta} c^2}{Z_\alpha^2 e^2 H^2} \bar{v}_{\alpha\beta} \left[ T_{\alpha\beta} \text{grad}_\perp n_\alpha + \left( T_{\alpha\beta} - T_\alpha - \frac{Z_\alpha}{Z_\beta} T_\beta \right) \frac{n_\alpha}{n_\beta} \text{grad}_\perp n_\beta \right]. \quad (9.138)$$

Для случая диффузии электронов, вызванной их столкновениями с однозарядными ионами, подставив в (9.138)

$$Z_\alpha = -1; \quad Z_\beta = 1; \quad n_\alpha = n_\beta = n; \quad \mu_{\alpha\beta} = m_e; \\ T_{\alpha\beta} = T_\alpha = T_e; \quad T_\beta = T_i; \quad v_{\alpha\beta} = v_{ei},$$

получим

$$\Gamma_{ei} = - \frac{m_e c^2}{e^2 H^2} \bar{v}_{ei} \left( T_e \text{grad}_\perp n_e + T_i \frac{n_e}{n_i} \text{grad}_\perp n_i \right) = - \frac{\bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} (T_e + T_i) \text{grad}_\perp n. \quad (9.139)$$

Эта формула, как и следовало ожидать, совпадает с (9.128) при  $\text{grad } T_e = \text{grad } T_i = 0$ .

Обсудим более детально механизм диффузии электронов, вызванной их столкновениями с ионами, под действием градиента концентрации. Как уже неоднократно отмечалось, диффузия в сильном магнитном поле вызывается смещением ларморовских центров при столкновениях. Для электронов эти смещения сравнимы с ларморовским радиусом. Обычный диффузионный поток, обусловленный хаотическим перемещением ларморовских центров при столкновениях, определяется средним квадратом смещения электронов:

$$\langle (\Delta x_e)^2 \rangle_1 \approx \bar{v}_{ei} \bar{\rho}_{He}^2 \approx 2 \bar{v}_{ei} T_e / m_e \omega_{He}^2. \quad (9.140)$$

Плотность этого потока в соответствии с (9.31) равна

$$\begin{aligned} \Gamma'_{ei} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (n_e \langle (\Delta x_e)^2 \rangle_1) \approx -\frac{\bar{v}_{ei} T_e}{m_e \omega_{He}^2} \left( \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{n_e}{\bar{v}_{ei}} \frac{\partial \bar{v}_{ei}}{\partial x} \right) \approx \\ &\approx -\frac{\bar{v}_{ei} T_e}{m_e \omega_{He}^2} \left( \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{n_e}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (9.141)$$

Дополнительный поток возникает при учете асимметрии перемещения ларморовских центров, связанной с градиентом концентрации ионов. Действительно, направление смещения зависит от того, на каком участке траектории произошло столкновение. Это иллюстрирует рис. 9.2 на примере лобового столкновения. Столкновения справа от ларморовского центра приводят к смещению направо, слева — к смещению налево. Поэтому, если частота столкновений с одной стороны больше, чем с другой (из-за большей концентрации ионов), возникает поток электронов в сторону большей частоты столкновений. Различие значений частоты столкновений на противоположных сторонах ларморовской окружности имеет порядок

$$\delta v_{ei} \approx \frac{\partial v_{ei}}{\partial x} \rho_{He} \approx \rho_{He} v_{ei} \frac{1}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}. \quad (9.142)$$

Поскольку среднее смещение при столкновениях порядка ларморовского радиуса, поток, возникающий из-за этого различия, равен

$$\begin{aligned} \Gamma''_{ei} &= n_e \langle \Delta x_e \delta v_{ei} \rangle_1 \approx \langle v_{ei} \rho_{He}^2 \rangle_1 \frac{n_e}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x} \approx \\ &\approx \frac{T_e \bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} \frac{n_e}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9.143)$$

Еще одна причина появления добавочного потока — различие импульсов, передаваемых электрону при столкновениях с ионами, движущимися в разные стороны (рис. 9.7). Легко видеть, что при лобовом столкновении добавочное изменение скорости электрона, связанное с движением иона, имеет величину  $\delta v_e \approx 2v_i$ . Это изменение приводит и к соответствующему изменению смещения лармо-

ровского центра электрона на  $\Delta x_e' \approx \delta v_e / \omega_{He} \approx v_i / \omega_{He}$ . Как видно из сравнения столкновений с различной ориентацией  $v_e$  и  $v_i$  (случаи *a*, *b*, *в*, *г* на рис. 9.7), добавочное смещение  $\Delta x_e'$  направлено в сторону, противоположную ларморовскому центру иона. Различие частот столкновений с ионами, пришедшими с разных сторон, имеет порядок

$$\delta \bar{v}_{ei} \approx \frac{\partial \bar{v}_{ei}}{\partial x} \rho_{Hi} \approx \overline{\rho_{Hi} v_{ei}} \frac{1}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}. \quad (9.144)$$

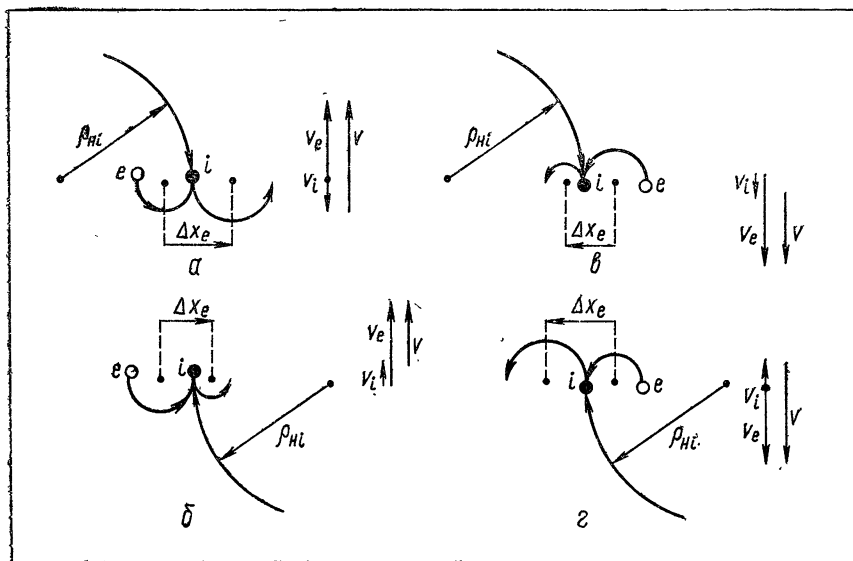


Рис. 9.7

Возникающий из-за этого различия поток равен

$$\Gamma_{ei}''' \approx -n_e \Delta x_e' \delta v_{ei} \approx -\frac{T_i \bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} \frac{n_e}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}. \quad (9.145)$$

Суммирование всех трех компонент потока приводит к (9.139), т. е. дает правильную оценку полного потока электронов.

С помощью общей формулы (9.138) можно определить диффузионный поток ионов, обусловленный их столкновениями с электронами. Для однозарядных ионов при  $T_e = T_i$  плотность потока равна\*:

$$\Gamma_{ie} = -\frac{\bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} \left[ T_e \text{grad}_{\perp} n_i + T_e \frac{n_i}{n_e} \text{grad}_{\perp} n_e \right]. \quad (9.146)$$

\* Можно показать, что при  $T_e \neq T_i$  формула (9.138) неприменима для описания диффузии ионов. При этом необходимо учитывать дополнительный поток ионов, обусловленный пространственной неоднородностью передачи энергии при столкновениях.

При концентрации ионов, совпадающей с электронной, этот поток равен электронному (9.139)  $\Gamma_{ie} = \Gamma_{ei}$ . Нетрудно понять этот результат. Смещение ларморовских центров сталкивающихся частиц в соответствии с (9.61) определяется изменением их импульса

$$\Delta \mathbf{r}_{0\alpha} = \frac{\Delta \mathbf{v}_\alpha}{Z_\alpha \omega_{H\alpha}} = \frac{c}{Z_\alpha eH} \Delta (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha). \quad (9.147)$$

Поэтому закон сохранения импульса при столкновении электронов с ионами  $\Delta (m_e \mathbf{v}_e) = -\Delta (m_i \mathbf{v}_i)$  приводит к равенству величины и направления смещений их ларморовских центров при столкновении  $\Delta \mathbf{r}_{0e} = \Delta \mathbf{r}_{0i}$ .

Из одинаковости смещения при каждом столкновении непосредственно вытекает равенство диффузионных потоков электронов и ионов. Картину смещений при столкновении электрона и иона иллюстрирует рис. 9.8 (на примере лобового столкновения). После такого столкновения электрон изменяет направление движения на противоположное и его ларморовский центр смещается на расстояние  $\Delta r_{He} \approx 2r_{He}$ . У иона уменьшается абсолютная величина скорости и соответственно ларморовский радиус изменяется на величину  $2r_{He}$ , что

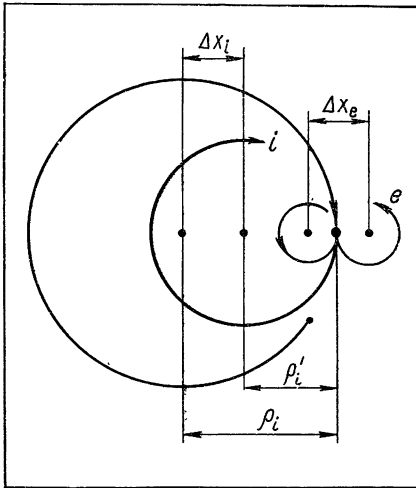


Рис. 9.8

приводит к смещению ларморовского центра на то же расстояние и в ту же сторону, что и у электрона.

Рассмотрим теперь влияние столкновений одинаковых заряженных частиц на поперечную диффузию. Общая формула (9.138) свидетельствует об отсутствии потоков, связанных со столкновениями одинаковых частиц; подстановка в нее  $Z_\alpha = Z_\beta$ ,  $T_\alpha = T_\beta$ ,  $n_\alpha \parallel n_\beta$  приводит к  $\Gamma_{\alpha\alpha} = 0$ . Это означает, что диффузионный поток, обусловленный средним квадратом смещения  $\langle (\Delta x_{\alpha\alpha})^2 \rangle$ , точно компенсируется потоком, определяющим среднее смещение  $\langle \Delta x_{\alpha\alpha} \rangle$  и связанным с асимметрией столкновений при наличии градиента концентрации. Объяснение этого результата можно получить, рассматривая смещения при столкновениях одинаковых частиц. При лобовом столкновении частицы просто меняются местами (рис. 9.9, а). При произвольном столкновении в силу закона сохранения импульса смещения ларморовских центров сталкивающихся частиц равны по величине и противоположны по направлению  $\Delta \mathbf{r}_{01} = -\Delta \mathbf{r}_{02}$  (рис. 9.9, б). Очевидно, при усреднении оба потока взаимно компен-

сируются, если градиент концентрации в точках  $\Gamma_{01}$  и  $\Gamma_{02}$  сохраняет свое значение.

Более точное вычисление, учитывающее изменение градиента концентрации на длине порядка ларморовского радиуса, приводит к выводу о том, что в результате неполной компенсации появляется поток, пропорциональный высшим производным концентрации. При ларморовском радиусе заряженных частиц, много меньшем характерных поперечных длин изменения концентрации, этот поток имеет порядок  $\rho_{H\alpha}^2/L_{\perp}^2$  и им обычно можно пренебречь. В таких условиях в полностью ионизованной плазме, состоящей из электронов и ионов одного сорта, поперечная диффузия электронов полностью обусловлена их столкновениями с ионами, а диффузия ионов — их столкновениями с электронами, причем диффузионные потоки электронов и ионов одинаковы, т. е. диффузия амбиполярна независимо от электрического поля в плазме.

Если в плазме, состоящей в основном из электронов и однократно заряженных ионов, имеются и примесные ионы, заряд которых больше единицы, то возникает диффузионный поток, обусловленный ионными столкновениями. При таких столкновениях смещение ларморовского центра

ионов порядка ионного ларморовского радиуса, т. е. значительно больше, чем при ион-электронных столкновениях. Поэтому диффузия ионов основной плазмы, обусловленная ион-ионными столкновениями, может быть существенной даже при малой концентрации примесных ионов. Соответствующий диффузионный поток может быть найден с помощью формулы (9.138). Полагая в ней  $T_{\alpha} = T_{\beta} = T_{\alpha\beta}$  и  $Z_{\alpha} = 1$ , получаем

$$\Gamma_{ip} = -\frac{\mu_{ip} c^2}{e^2 H^2} v_{ip} n_i T_i \left( \frac{1}{n_i} \text{grad}_{\perp} n_i - \frac{1}{Z_p n_p} \text{grad}_{\perp} n_p \right), \quad (9.148)$$

где индекс  $p$  применен для обозначения характеристик примесных ионов. При одинаковых относительных градиентах концентрации отношение этого потока к потоку ионов, обусловленному ион-

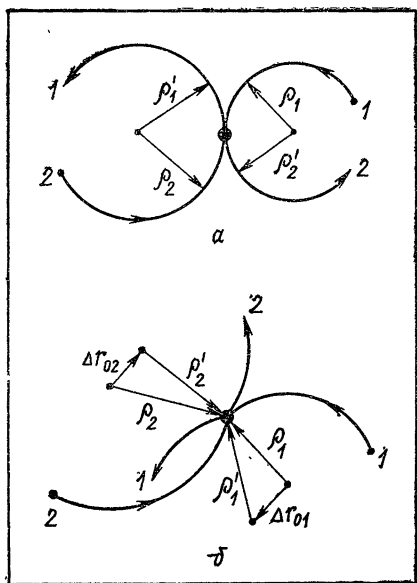


Рис. 9.9



электронными столкновениями, равно

$$\frac{\Gamma_{ip}}{\Gamma_{ie}} = \frac{(Z_p - 1)}{Z_p} \frac{\mu_{ip}}{m_e} \frac{\bar{v}_{ip}}{\bar{v}_{ie}} \frac{n_i T_i}{n_e (T_e + T_i)}, \quad (9.149)$$

а при  $T_e \approx T_i$

$$\Gamma_{ip}/\Gamma_{ie} \approx (n_p/n) \sqrt{m_i/m_e}. \quad (9.150)$$

Плотность потока примесных ионов в соответствии с (9.138) равна

$$\Gamma_{pi} = \frac{\mu_{ip} c^2}{Z_p^2 e^2 H^2} \bar{v}_{ip} n_p T_i \left( Z_p \frac{1}{n_i} \text{grad}_{\perp} n_i - \frac{1}{n_p} \text{grad}_{\perp} n_p \right). \quad (9.151)$$

Этот поток, как легко убедиться, много больше потока примесных ионов, обусловленного ион-электронными столкновениями. При одинаковых относительных градиентах из сравнения (9.148) и (9.151) получаем

$$\Gamma_{pi} = -(1/Z_p) \Gamma_{ip}. \quad (9.152)$$

Существенно, что поток примесных ионов в этом случае направлен не против градиента концентрации, как обычный диффузионный поток, а в сторону увеличения концентрации. Противоположное направление потока основных и примесных ионов связано с соотношением смещения их ларморовских центров при столкновении — в силу закона сохранения импульса смещения ларморовских центров сталкивающихся ионов направлены противоположно друг другу. В стационарном состоянии при условиях, когда ионы образуются в центральной части объема плазмы и их концентрация уменьшается к периферии, диффузия ионов обоих типов также должна быть направлена к периферии. Поэтому стационарное распределение концентрации не может характеризоваться одинаковыми относительными градиентами концентрации ионов обоих типов. Ионы с большим зарядом должны концентрироваться в центральной части объема сильнее, чем ионы с меньшим зарядом. Как видно из формулы (9.151), для того чтобы поток ионов примеси был направлен в сторону уменьшения концентрации, должно удовлетворяться неравенство

$$\text{grad} (\ln n_p) > Z_p \text{grad} (\ln n_i). \quad (9.153)$$

Условие (9.153) определяет существенно более быстрый спад концентрации примесей к периферии по сравнению со спадом концентрации основной компоненты плазмы (быстрее, чем  $n^{Z_p}$ ).

Мы рассмотрели поперечную диффузию заряженных частиц полностью ионизованной плазмы, обусловленную столкновениями заряженных частиц друг с другом. В случае, когда плазма частично ионизована, на поперечное направленное движение могут оказывать влияние как столкновения между заряженными частицами, так и их столкновения с нейтральными частицами. В сильном магнитном поле, в котором циклотронные частоты заряженных час-

тиц много больше частоты их столкновений, влияние соударений различных типов на поперечное движение является аддитивным. В соответствии с (9.130) полный поперечный поток заряженных частиц каждого сорта в направлении градиента концентрации и электрического поля можно получить в результате суммирования потоков, обусловленных столкновениями этих частиц со всеми заряженными и нейтральными частицами, входящими в состав плазмы. Для трехкомпонентной плазмы, содержащей электроны, однозарядные ионы и нейтральные частицы, поперечные потоки электронов и ионов могут быть получены суммированием (9.8) и (9.139):

$$\Gamma_e = \Gamma_{ea} + \Gamma_{ei} = -\frac{e\bar{v}_{ea}n}{m_e\omega_{He}^2} E_{\perp} - \frac{\bar{v}_{ea}T_e}{m_e\omega_{He}^2} \text{grad}_{\perp} n - \frac{\bar{v}_{ei}(T_e+T_i)}{m_e\omega_{He}^2} \text{grad}_{\perp} n; \quad (9.154)$$

$$\Gamma_i = \Gamma_{ia} + \Gamma_{ie} = -\frac{2e\bar{v}_{ia}n}{m_i\omega_{Hi}^2} E_{\perp} - \frac{2\bar{v}_{ia}T_i}{m_i\omega_{Hi}^2} \text{grad}_{\perp} n - \frac{\bar{v}_{ei}(T_e+T_i)}{m_e\omega_{He}^2} \text{grad}_{\perp} n, \quad (9.155)$$

где учтено, что при  $m_i = m_a$ ,  $\mu_{ia} = m_i/2$ . В режиме амбиполярной диффузии, рассмотренной в § 9.4, потоки электронов и ионов равны. Приравняв их, найдем амбиполярную напряженность электрического поля, которая совпадает с (9.94). В таком поле амбиполярный поперечный поток представляет собой сумму амбиполярного потока (9.96), обусловленного столкновениями заряженных частиц с нейтральными, и потока (9.139), обусловленного электронными столкновениями:

$$\Gamma_A = n\mathbf{u}_{A\perp} = \frac{(\bar{v}_{ea} + \bar{v}_{ei})(T_e + T_i)}{m_e\omega_{He}^2} \text{grad}_{\perp} n. \quad (9.156)$$

В этом выражении коэффициент перед  $\text{grad}_{\perp} n$  является коэффициентом амбиполярной диффузии частично ионизованной плазмы

$$D_{A\perp} = \frac{(\bar{v}_{ea} + \bar{v}_{ei})}{m_e\omega_{He}^2} (T_e + T_i). \quad (9.157)$$

Из рассмотрения усредненных уравнений движения следует, что эта формула справедлива при условии

$$\omega_{He}\omega_{Hi} \gg (\bar{v}_{ea} + \bar{v}_{ei})\bar{v}_{ia}.$$

В заключение этого параграфа отметим, что проведенное рассмотрение справедливо до тех пор, пока магнитное поле не влияет на сам процесс столкновений заряженных частиц. В очень больших магнитных полях, в которых ларморовский радиус электронов

меньше дебаевского  $\rho_{He} < r_D$  и тем более при  $\rho_{Hi} < r_D$ , необходимо учитывать влияние магнитного поля на столкновения электронов с ионами. В этом случае смещение лармовского центра электронов в процессе столкновения определяется его дрейфом в электрическом поле иона. Как показывает анализ, выражения для диффузионных потоков, возникающих в результате такого дрейфа, отличаются от выражений, полученных выше, лишь численным множителем порядка единицы. Получающееся изменение в выражении для потоков формально сводится при этом к переопределению кулоновского логарифма в формуле для эффективной частоты столкновений.

### § 9.6. Поперечный перенос энергии в сильноионизованной плазме

Переходя к рассмотрению переноса энергии в сильноионизованной плазме, начнем с определения теплового потока электронов для условий, когда частота электрон-ионных столкновений много больше частоты столкновений электронов с нейтральными атомами. Уравнения, дающие тепловой поток электронов в таких условиях, можно получить, подставляя в уравнения третьего момента (6.80) столкновительные члены, учитывающие столкновения электронов с ионами (6.83) и друг с другом (6.85). Тогда в стационарном случае получим

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2} \frac{nT_e}{m_e} \text{grad } T_e + \frac{e}{m_e c} [\mathbf{q}_e \times \mathbf{H}] - \\ & - \frac{3}{2} nT_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) + 1,87 \bar{v}_{ei} \mathbf{q}_e = 0, \end{aligned} \quad (9.158)$$

где  $\bar{v}_{ei}$  — усредненная частота электрон-ионных столкновений; коэффициент 1,87 получен в результате суммирования частот электрон-ионных и электрон-электронных столкновений [ср. с (6.86)]. Проекция этого уравнения на направление магнитного поля приводит к выражению для продольного теплового потока  $\mathbf{q}_{e\parallel}$ , совпадающему с выражением (7.160), полученным в отсутствие магнитного поля. Проекция уравнения на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, представляет собой векторное уравнение относительно  $\mathbf{q}_{e\perp}$ , аналогичное рассмотренному ранее в § 9.1. Его решение имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{e\perp} = & - \frac{1,87 \bar{v}_{ei}}{\omega_{He}^2 + (1,87 \bar{v}_{ei})^2} \left[ \frac{5}{2} \frac{nT_e}{m_e} \text{grad}_{\perp} T_e - \frac{3}{2} nT_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_{e\perp} - \mathbf{u}_{i\perp}) \right] + \\ & + \frac{\omega_{He}}{\omega_{He}^2 + (1,87 \bar{v}_{ei})^2} \left\{ \mathbf{h} \times \left[ \frac{5}{2} \frac{nT_e}{m_e} \text{grad}_{\perp} T_e - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{2} nT_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{u}_{e\perp} - \mathbf{u}_{i\perp}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.159)$$

Это выражение упрощается в случае больших магнитных полей, т. е. при  $\omega_{He} \gg v_{ei}$ . Пренебрегая членами, пропорциональными  $v_{ei}^2$ , и подставляя  $(\mathbf{u}_{e\perp} - \mathbf{u}_{i\perp})$  из (9.125), получаем:

$$\mathbf{q}_{e\perp} = \mathbf{q}_{et} + \mathbf{q}_{ed} + \mathbf{q}_{eu}; \quad (9.160)$$

$$\mathbf{q}_{et} = -4,66 \frac{\bar{v}_{ei} n T_e}{m_e \omega_{He}^2} \text{grad } T_e; \quad (9.161)$$

$$\mathbf{q}_{ed} = \frac{5}{2} \frac{n T_e}{m_e \omega_{He}} [\mathbf{h} \times \text{grad } T_e]; \quad (9.162)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{eu} &= \frac{3}{2} \frac{n T_e \bar{v}_{ei}}{\omega_{He}} [\mathbf{h} \times (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)] \approx \\ &\approx \frac{3}{2} \frac{\bar{v}_{ei} T_e}{m_e \omega_{He}^2} \text{grad } [n (T_e + T_i)], \end{aligned} \quad (9.163)$$

где составляющая  $\mathbf{q}_{et}$  — тепловой поток в направлении градиента температуры;  $\mathbf{q}_{ed}$  — тепловой поток, связанный с диамагнитным потоком; составляющая  $\mathbf{q}_{eu}$  определяется направленным движением, она возникает, как и в слабоионизованной плазме, из-за зависимости частоты столкновений от скорости. Коэффициент пропорциональности между тепловым потоком  $\mathbf{q}_{et}$  и  $\text{grad } T_e$  представляет собой электронную теплопроводность

$$\mathcal{K}_{e\perp} = n \chi_{e\perp} = 4,66 \bar{v}_{ei} n T_e / m_e \omega_{He}^2. \quad (9.164)$$

Численный коэффициент в (9.164) соответствует точному расчету при  $\omega_{He} \gg v_{ei}$ . Происхождение поперечного теплопереноса, обусловленного теплопроводностью, такое же, как и для слабоионизованной плазмы. Столкновения электронов с ионами приводят к смещению электрона на расстояние порядка ларморовского радиуса электрона, причем происходит обмен местами между электронами с большей и меньшей температурой. Поэтому в системе отсчета, в которой направленная скорость равна нулю, поток энергии, связанный с электрон-ионными столкновениями, отличен от нуля. Кроме того, электрон-электронные столкновения также приводят к обмену местами между электронами с различными температурами на расстояниях порядка их ларморовских радиусов. Естественно, что тепловой поток, переносимый электронами в направлении градиента температуры, описывается выражением, аналогичным (9.33), полученным для слабоионизованной плазмы, в которой поток обусловлен электрон-атомными столкновениями. Отличие состоит в замене частоты электрон-атомных столкновений  $v_{ea}$  на частоту кулоновских столкновений  $v_{ei}$  и в появлении численного коэффициента. Природа других компонент теплового потока (компоненты, связанной с диамагнитным потоком  $\mathbf{q}_{ed}$ , и компоненты, обусловленной направленным движением  $\mathbf{q}_{eu}$ ) также обсуж-

далась при рассмотрении переноса тепла в слабоионизованной плазме, поэтому не будем на них снова останавливаться.

Определим теперь поперечный тепловой поток ионов для плазмы с высокой степенью ионизации, в которой частота ион-ионных столкновений много больше частоты столкновений с атомами. При этом столкновительный член уравнения теплового потока ионов определяется ион-ионными столкновениями (ион-электронные столкновения играют пренебрежимо малую роль из-за их малого воздействия на движение ионов и на передаваемую энергию). Подставляя ион-ионный столкновительный член (6.85) в уравнение третьего момента (6.80), получаем для стационарных условий

$$\frac{5}{2} \frac{nT_i}{m_i} \text{grad } T_i - \frac{e}{m_i c} [\mathbf{q}_i \times \mathbf{H}] = -0,8\bar{v}_{ii} \mathbf{q}_i, \quad (9.165)$$

где усредненная частота ион-ионных столкновений равна

$$\bar{v}_{ii} = \frac{8}{3} \frac{\sqrt{\pi}}{m_i} \frac{e^4 n_i L_i}{T_i^{3/2}}. \quad (9.166)$$

Уравнение (9.165) является векторным уравнением относительно теплового потока ионов. Определяемая им продольная компонента потока  $\mathbf{q}_{i\parallel}$  такая же, как и в отсутствие магнитного поля (7.162). Поперечная компонента  $\mathbf{q}_{i\perp}$  получается после проектирования уравнения на плоскость перпендикулярную магнитному полю. При произвольном соотношении  $\bar{v}_{ii}$  и  $\omega_{Hi}$  она имеет вид

$$\mathbf{q}_{i\perp} = -\frac{5}{2} \frac{nT_i}{m_i} \frac{0,8\bar{v}_{ii} \text{grad}_{\perp} T_i - \omega_{Hi} [\mathbf{h} \times \text{grad } T_i]}{\omega_{Hi}^2 + (0,8\bar{v}_{ii})^2}. \quad (9.167)$$

В сильных магнитных полях, в которых  $\omega_{Hi} \gg \bar{v}_{ii}$ , выполняется соотношение

$$\mathbf{q}_{i\perp} = -2 \frac{nT_i \bar{v}_{ii}}{m_i \omega_{Hi}^2} \text{grad}_{\perp} T_i + \frac{5}{2} \frac{nT_i}{m_i \omega_{Hi}} [\mathbf{h} \times \text{grad } T_i]. \quad (9.168)$$

Коэффициент в первом слагаемом, определяющим поток тепла в направлении поперечного градиента температуры, представляет собой коэффициент поперечной теплопроводности ионов:

$$\mathcal{K}_{i\perp} = \chi_{i\perp} n = \frac{2nT_i \bar{v}_{ii}}{m_i \omega_{Hi}^2}. \quad (9.169)$$

При температуре ионов, сравнимой с температурой электронов, он значительно больше коэффициента теплопроводности электронов:

$$\frac{\mathcal{K}_{i\perp}}{\mathcal{K}_{e\perp}} = 0,6 \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{T_i}{T_e} \frac{L_i}{L_e} \approx \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{T_i}{T_e}. \quad (9.170)$$

Этот результат связан с тем, что поперечная теплопроводность ионов обусловлена ион-ионными столкновениями, при которых

смещение ларморовских центров ионов имеет порядок ионного ларморовского радиуса, т. е. гораздо больше, чем смещение ларморовских центров электронов при столкновениях.

Как отмечалось в § 9.5, столкновение одинаковых частиц в среднем не приводит к их перемещению. Однако оно сопровождается обменом местами ионов с различной температурой. Поэтому возможен поперечный тепловой поток, имеющий порядок

$$q_{i\perp} \sim \bar{\rho}_{Hi}^{-2} \bar{v}_{ii} n T_i \partial T_i / \partial x. \quad (9.171)$$

Эта оценка аналогична оценке теплового потока электронов в § 9.3.

Полученные выражения для направленных скоростей и тепловых потоков заряженных частиц позволяют определить уравнения баланса их энергий. Для этого необходимо подставить найденные соотношения в уравнения второго момента (6.77), (6.78), рассмотренные в § 6.3. Не будем приводить здесь получающиеся в общем случае довольно громоздкие уравнения. Рассмотрим лишь суммарное уравнение баланса энергии полностью ионизованной плазмы, которое получается в результате сложения уравнений баланса энергий электронов и ионов [уравнения (6.77) и (6.78)]. Для условий, когда потери энергии связаны с поперечной теплопроводностью, а нагрев плазмы определяется продольным электрическим полем, это уравнение имеет вид

$$\frac{3}{2} n \frac{\partial (T_i + T_e)}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathcal{K}_{i\perp} \operatorname{grad} T_i) = \sigma_{\parallel} E_{\parallel}^2, \quad (9.172)$$

где  $\mathcal{K}_{i\perp}$  — поперечная теплопроводность ионов, определяемая равенством (9.169);  $\sigma_{\parallel}$  — продольная проводимость, определяемая формулой (7.153). Здесь мы учли, что в соответствии с (9.170)  $q_{i\perp} \gg q_{e\perp}$ , и пренебрегли потоком тепла, связанным с электронной теплопроводностью, а также опустили слагаемые, пропорциональные направленной скорости (можно показать, что они имеют тот же порядок, что и  $\operatorname{div} q_{e\perp}$ ).

Для оценки эффективности процессов, описываемых уравнением баланса энергий, можно так же, как это было сделано в § 7.10, ввести характерные времена. Найдем их для случая  $T_e = T_i$  с помощью соотношения  $\tau_p = T (\partial T / \partial t)_p^{-1}$ , где индекс  $p$  обозначает рассматриваемый процесс. В соответствии с этим, используя формулы (9.169), (7.153) для  $\mathcal{K}_{i\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$ , получаем характерные времена теплопереноса и нагрева плазмы электрическим полем

$$\tau_q \approx \frac{3nL_{\perp}^2}{\mathcal{K}_{i\perp}} \approx \frac{m_i \omega_{Hi}^2}{T_i \bar{v}_{ii}} L_{\perp}^2; \quad (9.173)$$

$$\tau_E = \frac{3nT_e}{\sigma_{\parallel} E_{\parallel}^2} = \frac{3}{2} \frac{m_e v_{ei} T_e}{e^2 E_{\parallel}^2}, \quad (9.174)$$

где  $L_{\perp} = [(1/T) \operatorname{grad}_{\perp} T]^{-1}$  — характерный поперечный размер, на котором изменяется температура.

Уравнение (9.172) дает изменение суммарной энергии электронов и ионов. Соотношение их температур можно найти с помощью уравнения баланса энергии электронов. При пренебрежении потерями тепла, связанными с поперечной электронной теплопроводностью, оно имеет вид

$$\partial T_e / \partial t = \sigma_{\parallel} E^2 - \kappa_{ei} \bar{v}_{ei} (T_e - T_i), \quad (9.175)$$

где первое слагаемое правой части определяет нагрев электронов, второе — передачу энергии электронов ионам при столкновениях. Уравнение баланса энергии электронов рассмотрено в § 7.11. Это рассмотрение показывает, что стационарное решение уравнения существует лишь при не очень больших электрических полях, при которых  $T_e - T_i < 0,5 T_i$ . При больших полях происходит «убегание энергии» электронов и должны вступить в силу другие механизмы потерь, в частности потери, связанные с возбуждением атомов (если таковые имеются), — потери на излучение. Заметим, что и при наличии таких механизмов стационарный баланс энергии электронов в продольном электрическом поле может оказаться неустойчивым по отношению к перегреву электронов (так называемая перегревная неустойчивость). Случайное увеличение температуры в некоторой силовой трубке приводит к росту проводимости  $\sigma_{\parallel} \sim 1/v_{ei} \sim T_e^{3/2}$ . При этом увеличивается ток и растет энергия нагрева  $\sigma_{\parallel} E^2$ , что влечет за собой дальнейший рост проводимости. Если полный ток ограничен, то увеличение тока в рассматриваемой силовой трубке происходит за счет уменьшения тока в другом элементе поперечного сечения, приводящего к уменьшению электронной температуры и проводимости. В результате нарастание возмущения ведет к концентрации тока в одном или нескольких шнурах. Развитие перегривной неустойчивости ограничивается поперечной электронной теплопроводностью «размазывающей» область повышенной температуры. Другим ограничивающим фактором может оказаться рост потерь на излучение при увеличении электронной температуры.

### § 9.7. О процессах переноса в тороидальных магнитных конфигурациях

Описание процессов переноса в неоднородном магнитном поле существенно более сложно, чем в однородном. Усложнение обусловлено в первую очередь дрейфом заряженных частиц, вызванным неоднородностью и приводящим к разделению зарядов в плазме. Возникающее в результате электрическое поле может изменить эффективность переноса заряженных частиц и их энергии поперек магнитного поля, причем характер этих изменений зависит от конкретного вида магнитной конфигурации. Рассмотрим некоторые особенности процессов переноса в тороидальных магнитных конфигурациях. Основной причиной этих особенностей является тороидальный дрейф заряженных частиц.

Обсудим сначала перенос заряженных частиц слабоионизованной плазмы в тороидальном магнитном поле. Будем считать, что магнитное поле направлено вдоль азимута и убывает обратно пропорционально радиусу  $H = H_0 R_0/R$ . Полагая, что малый радиус тора много меньше большого  $r \ll R$ , можем считать градиент магнитного поля  $|\text{grad } H|/H = 1/R_0$  постоянным в области, в которой находится плазма. Тороидальная неоднородность приводит к дрейфу электронов и ионов в направлении, перпендикулярном магнитному полю и неоднородности, т. е. в направлении оси тора. Введя локальную прямоугольную систему координат в сечении тора, направим ось  $Ox$  в направлении большого радиуса; при этом дрейф ионов будет направлен вдоль  $Oy$ , дрейф электронов — в противоположном направлении (см. рис. 8.26). Компоненты усредненной скорости дрейфа, вызванного градиентом магнитного поля, при  $\omega_{He} \gg v_{ea}$ ,  $\omega_{Hi} \gg v_{ia}$  равны

$$u_{iy}^H = 2cT_i/eHR, \quad u_{ey}^H = -2cT_e/eHR. \quad (9.176)$$

Скорость разделения зарядов, обусловленная дрейфом, определяется разностью скоростей ионов и электронов

$$u_y^H = u_{iy}^H - u_{ey}^H = 2c(T_i + T_e)/eHR. \quad (9.177)$$

Возникающее в результате разделения зарядов электрическое поле приводит к обратному движению. Скорости ионов и электронов в направлении электрического поля в слабоионизованной плазме определяются их подвижностью. С помощью (9.11), (9.12) получим

$$u_y^E = u_{iy}^E - u_{ey}^E = \left( \frac{e\mu_{ia}v_{ia}}{m_i^2\omega_{Hi}^2} + \frac{ev_{ea}}{m_e\omega_{He}^2} \right) E_y \approx \frac{ev_{ia}}{2m_i\omega_{Hi}^2} E_y,$$

где учтено, что  $\mu_{ia} = m_i/2$  при  $m_i = m_a$ . В стационарном состоянии скорости  $u^H$  и  $u^E$  должны компенсировать друг друга. Приравняв их, находим напряженность электрического поля

$$E_y = \frac{4H(T_e + T_i)}{m_i cv_{ia} R}. \quad (9.178)$$

В этом поле электроны и ионы испытывают дрейф в направлении внешней поверхности тора со скоростью

$$u_{dx} = cE_y/H = 4(T_e + T_i)/m_i v_{ia} R = 2D_{A\parallel}/R, \quad (9.179)$$

где  $D_{A\parallel} = 2(T_e + T_i)/m_i v_{ia}$  — продольный коэффициент амбиполярной диффузии [см. (7.70)]. Одновременно электроны и ионы дрейфуют в направлении оси  $Oy$  со скоростью, близкой к  $u_e^H$  (9.176); однако, поскольку  $u_e^H \ll u_d$  (9.179), эта компонента дрейфа может не учитываться.

Таким образом, тороидальная неоднородность магнитного поля в слабоионизованной плазме приводит к стационарному движению заряженных частиц в направлении большого радиуса тора со скоростью (9.179). В плазме, находящейся в тороидальной камере,



параллельной магнитному полю, такое движение накладывается на амбиполярную поперечную диффузию. Суммируя направленные скорости, обусловленные диффузией (9.96) и дрейфом (9.179), получаем

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u}_{A\perp} + \mathbf{u}_d = -D_{A\perp} \frac{\text{grad}_{\perp} n}{n} + \frac{2D_{A\parallel}}{R} \mathbf{x}_1, \quad (9.180)$$

где  $\mathbf{x}_1$  — единичный вектор в направлении большого радиуса. Нетрудно определить с помощью этой формулы баланс заряженных частиц в стационарном тороидальном разряде. Стационарное уравнение баланса для случая, когда возникновение заряженных частиц обусловлено ионизацией при электрон-атомных столкновениях, а их потери — поперечным переносом, имеет вид

$$\text{div} (n\mathbf{u}_{\perp}) = \nu^i n. \quad (9.181)$$

Подставляя в него направленную скорость (9.180), получаем при  $T_e = \text{const}$ ,  $T_i = \text{const}$ :

$$D_{A\perp} \Delta_{\perp} n - \frac{2D_{A\parallel}}{R} \frac{\partial n}{\partial x} + \nu^i n = 0. \quad (9.182)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять нулевым граничным условиям вблизи стенок баллона. При малой кривизне тора (при  $R \gg a$ ) можно пренебрегать влиянием тороидальности на  $\Delta_{\perp} n$ . В этом случае неотрицательное решение уравнения имеет вид

$$n = n_0 \exp\left(\frac{D_{A\parallel}}{D_{A\perp}} \frac{x}{R}\right) J_0\left(\frac{r}{\Lambda}\right), \quad (9.183)$$

где  $\Lambda = a/2,4$ . Это распределение отличается от диффузионного распределения (7.94) экспоненциальным множителем, определяющим смещение максимума в сторону тороидального дрейфа. Подстановка (9.183) в уравнение (9.182) приводит к условию баланса частиц в стационарном разряде

$$\nu^i = D_{A\perp}/\Lambda^2 + (1/R)^2 D_{A\parallel}^2/D_{A\perp}. \quad (9.184)$$

Правая часть равенства характеризует эффективность устранения заряженных частиц, учитывающую как обычное диффузионное устранение (первое слагаемое), так и ускорение переноса, связанное с дрейфом (второе слагаемое). Интересно отметить, что с ростом магнитного поля, т. е. с уменьшением  $D_{A\perp}$ , эффективность устранения заряженных частиц изменяется немонотонно. Она проходит через минимум при  $D_{A\perp} = D_{A\parallel} \Lambda/R$ .

Рассмотрим теперь перенос заряженных частиц полностью ионизированной плазмы в тороидальной конфигурации. Отметим, что стационарный дрейф полностью ионизированной плазмы в простом тороидальном магнитном поле невозможен, так как поперечное электрическое поле не приводит в ней к появлению тока и не может поэтому скомпенсировать разделение зарядов, связанное с торои-

дальным дрейфом. Здесь будет кратко рассмотрено поведение полностью ионизованной плазмы в азимутально-симметричной тороидальной магнитной ловушке, описанной в § 8.5. Напомним, что магнитная конфигурация, используемая в такой ловушке, образуется тороидальным полем  $H_\theta$  и полоидальным полем  $H_\varphi$  (см. рис. 8.1), причем обычно  $H_\varphi \ll (r/R)H_\theta$ . При рассмотрении будем считать, что  $r \ll R$  и  $H_\varphi \ll H_\theta$ . Полоидальное поле, как отмечалось в § 8.1, создает вращательное преобразование, в результате которого образуется система вложенных друг в друга тороидальных магнитных

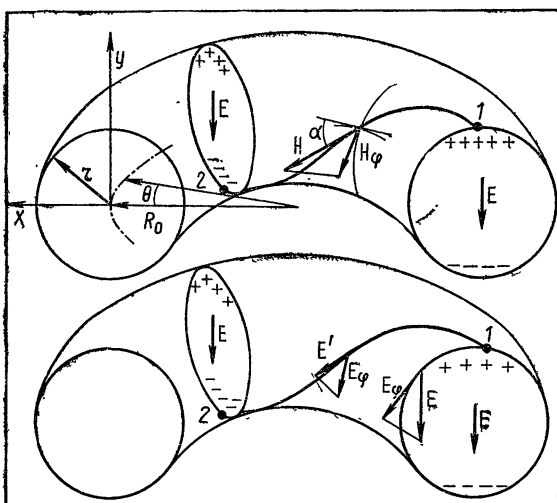


Рис. 9.10

поверхностей. Эти поверхности в отсутствие столкновений должны приводить к устранению последствий тороидального дрейфа: электрическое поле, возникающее при дрейфе, «закорачивается» в результате движения электронов вдоль силовых линий магнитного поля. Однако при наличии столкновений продольная проводимость плазмы конечна и закорачивание будет неполным. Остаточное электрическое поле приводит к дрейфу заряженных частиц плазмы в сторону большого радиуса тора; дрейф увеличивает скорость их переноса, связанного с градиентами концентрации и температуры.

Чтобы оценить влияние тороидального дрейфа, рассмотрим баланс заряда на некоторой тороидальной поверхности плазмы радиуса  $r$  (рис. 9.10). Скорость разделения заряда, обусловленная тороидальным дрейфом, по-прежнему определяется формулой (9.177). Подставляя ее в уравнение непрерывности, получаем изменение плотности заряда, связанное с дрейфом:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_a = -\operatorname{div}(\epsilon n u^H) = -\frac{\partial}{\partial y}(\epsilon n u_y^H) = \frac{2c(T_i + T_e)}{HR} \frac{\partial n}{\partial y}, \quad (9.185)$$

где используется такая же локальная система координат, как и в предыдущей задаче, и по-прежнему величины  $T_i$ ,  $T_e$ ,  $R$  считаются постоянными в объеме плазмы.

Возникающее в результате разделения зарядов электрическое поле приводит к компенсации дрейфа. Однако в отличие от слабоионизованной плазмы в полностью ионизованной плазме поле не вызывает поперечного тока. В магнитной ловушке оно вызывает ток вдоль винтовых силовых линий (например, вдоль линии 1—2 на рис. 9.10). Величина этого тока определяется продольной проводимостью плазмы (7.153)

$$j = \sigma_{\parallel} E' \approx \frac{2ne^2}{m_e \bar{v}_{ei}} E', \quad (9.186)$$

где  $E'$  — проекция поля на направление силовой линии

$$E' = E_{\varphi} \sin \alpha = E \sin \varphi \sin \alpha; \quad (9.187)$$

$E_{\varphi}$  — проекция на направление  $\varphi$ ;  $\sin \alpha = H_{\varphi}/H$  (см. рис. 9.10). Изменение плотности объемного заряда, связанное с продольным током, определяется дивергенцией тока. Полагая, что параметры плазмы постоянны на магнитной поверхности (из-за продольного перемешивания), получаем

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_j = \operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{r} \frac{\partial j_{\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (j \sin \alpha) \quad (9.188)$$

и, далее, подставляя (9.186) и (9.187):

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_j = \frac{2ne^2}{m_e \bar{v}_{ei} r} \left( \frac{H_{\varphi}}{H} \right)^2 E \cos \varphi. \quad (9.189)$$

В стационарном состоянии увеличение объемного заряда, обусловленное дрейфом, должно компенсироваться его уменьшением, вызванным током  $(\partial \rho / \partial t)_d = -(\partial \rho / \partial t)_j$ . Отсюда получаем напряженность поля

$$E = \frac{cm_e (T_e + T_i) \bar{v}_{ei}}{e^2 H} \frac{r}{R} \left( \frac{H}{H_{\varphi}} \right)^2 \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \quad (9.190)$$

[здесь учтено, что  $(1/\cos \varphi) \partial n / \partial y = \partial n / \partial r$ ]. Это поле направлено вдоль оси  $Oy$  и вызывает дрейф в направлении  $Ox$  (в направлении большого радиуса). При этом на одной половине рассматриваемой поверхности (на внешней стороне тора) дрейф происходит в сторону увеличения  $r$ , на другой — в сторону уменьшения  $r$ . В магнитной ловушке тороидальный дрейф не вызывает, однако, существенной асимметрии в распределении концентраций, поскольку продольное движение заряженных частиц приводит к их перемешиванию в пределах магнитной поверхности. Поэтому необходимо усреднить радиальные дрейфовые потоки по всей поверхности. Компенсация дрейфов, происходящих в разных половинах поверхности, будет неполной, так как величина внешней поверхности больше. Суммар-

ный радиальный поток через рассматриваемую поверхность равен, очевидно,

$$\Pi = \int_{(S)} nu_r dS = \int_0^{2\pi} n \frac{cE \sin \varphi}{H} 2\pi (R + r \sin \varphi) r d\varphi, \quad (9.191)$$

где  $dS = 2\pi(R + r \sin \varphi)rd\varphi$  — элемент поверхности тора. Интегрирование приводит к следующей формуле для средней плотности радиального потока:

$$\Gamma_r = \frac{\Pi}{2\pi R \cdot 2\pi r} = \frac{1}{2} n \frac{cE}{H} \frac{r}{R}. \quad (9.192)$$

Подставляя в нее (9.190), получаем

$$\Gamma_r = - \frac{(T_e + T_i) \bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} q^2 \frac{\partial n}{\partial r}, \quad (9.193)$$

где  $q = (r/R)H/H_\phi^*$ . Этот поток направлен в сторону уменьшения концентрации и имеет ту же зависимость от параметров плазмы, что и обычный диффузионный поток с коэффициентом диффузии (9.129), он отличается лишь множителем  $q^2$ . Суммарный поток можно характеризовать эффективным коэффициентом диффузии

$$D_\perp = \frac{(T_e + T_i) \bar{v}_{ei}}{m_e \omega_{He}^2} (1 + q^2)**. \quad (9.194)$$

Поскольку обычно  $q \gg 1$  (см. § 10.6), этот коэффициент намного превышает коэффициент поперечной диффузии поперек однородного магнитного поля.

Аналогично можно определить и другие поперечные коэффициенты переноса при учете тороидального дрейфа. Коэффициент термодиффузии при этом равен коэффициенту диффузии. Эффективный коэффициент ионной теплопроводности, характеризующий поперечный перенос тепла, равен

$$\mathcal{K}_{i\perp} = \frac{2nT_i \bar{v}_{ii}}{m_i \omega_{Hi}^2} (1 + 1,6q^2). \quad (9.195)$$

Как видно, «тороидальное» слагаемое, определяющее влияние дрейфа, больше коэффициента теплопроводности в однородном поле в  $1,6 q^2$  раз.

При малой частоте электронных и ионных столкновений появляется еще один эффект, приводящий к ускорению процессов переноса. Он связан с особенностями траектории дрейфа ларморовских центров частиц в тороидальной магнитной ловушке. Как бы

\* Коэффициент  $q$  называют иногда запасом устойчивости, так как он определяет устойчивость плазмы по отношению к возмущениям конфигурации (см. § 10.6).

\*\* Выражение (9.194) иногда называют формулой Пфирша — Шлютерл.

ло показано в § 8.5, форма этих траекторий зависит от соотношения между продольной и поперечной компонентами скорости. Частицы, у которых это соотношение не слишком мало, оказываются пролетными, и проекции их траекторий в тороидальном сечении близки к окружностям. Запертые частицы, у которых это отношение мало, имеют траектории «бананового» типа. Изменения таких траекторий при столкновениях могут привести к поперечным смещениям заряженных частиц, значительно превышающим их смещение в однородном магнитном поле, и соответственно к увеличению коэффициентов переноса.

Особенно велико влияние на перенос столкновений запертых частиц. Оценим, например, их влияние на диффузию электронов. Ускорение диффузии, вызванное столкновениями запертых электронов, можно оценить с помощью рис. 8.20. Пусть электрон в точке 1 испытал такое столкновение, что попал в число запертых частиц. Двигаясь по банановой траектории, он может испытать следующее столкновение в точке 2. Как правило, это столкновение приводит к тому, что частица снова становится пролетной, так как вероятность сохранения малого значения продольной составляющей скорости при соударении невелика. Таким образом, за время между двумя столкновениями частица может сместиться вдоль радиуса на ширину банановой траектории. В соответствии с оценкой § 8.5 эта ширина по порядку равна

$$\Delta r_b = \frac{2u_e^H}{\bar{v}_{e\perp}} \frac{H}{H_\Phi} \sqrt{rR} \approx \frac{c \sqrt{m_e T_e}}{eH} \frac{H}{H_\Phi} \sqrt{\frac{r}{R}}. \quad (9.196)$$

Эффективный коэффициент диффузии определяется средним квадратом смещения и для рассматриваемого механизма может быть оценен следующим образом:

$$D_{e\perp} = \eta v_e^b \langle (\Delta r_b)^2 \rangle = \eta v_e^b \frac{T_e}{m_e \omega_{He}^2} \frac{r}{R} \left( \frac{H}{H_\Phi} \right)^2, \quad (9.197)$$

где  $\eta$  — доля запертых частиц,  $v_e^b$  — частота столкновений запертых частиц, переводящих их в пролетные.

Доля запертых частиц определяется «пробочным» отношением при движении вдоль винтовой силовой линии  $H_{\text{мин}}/H_{\text{макс}} = 1 - 2r/R$ . Это отношение дает предельный угол, соответствующий переходу из запертых частиц в пролетные:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \vartheta_0 &= H_{\text{мин}}/H_{\text{макс}} = 1 - 2r/R; \\ \pi/2 - \vartheta_0 &= \sqrt{2r/R} = \delta\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (9.198)$$

Для изотропного распределения по скоростям долю запертых частиц можно выразить через этот угол

$$\eta \approx \delta\vartheta \approx \sqrt{r/R}. \quad (9.199)$$

При определении  $v_e^b$  надо иметь в виду, что для перехода частиц из запертых в пролетные достаточно изменить направление их скорости на малый угол  $\delta\theta \approx \sqrt{r/R}$ . Время поворота скорости на этот угол в результате кулоновских столкновений, приводящих в основном к малым отклонениям, значительно меньше среднего времени между столкновениями электронов с ионами и друг с другом  $\tau_e = 1/(\bar{v}_{ee} + \bar{v}_{ei})$ , которое определяется как время существенно-го изменения скорости. Учитывая, что воздействие кулоновских столкновений эквивалентно диффузии в пространстве скоростей (см § 3.3), можно получить

$$v_e^b \approx \frac{\bar{v}_{ei} + \bar{v}_{ee}}{(\delta\theta)^2} \approx \bar{v}_{ei} \frac{R}{r}. \quad (9.200)$$

Подставляя значения  $\eta$ ,  $v_e^b$  в (9.197), получаем следующую оценку коэффициента диффузии:

$$D_{e\perp} \approx \frac{\bar{v}_{ei} T_e}{m_e \omega_{He}^2} \left( \frac{H}{H_\phi} \right)^2 \sqrt{\frac{r}{R}} = \frac{\bar{v}_{ei} T_e}{m_e \omega_{He}^2} q^2 \left( \frac{R}{r} \right)^{3/2}. \quad (9.201)$$

Более точное вычисление приводит к формуле, которая отличается от этой лишь множителем 1,07. Как видно из сопоставления (9.201) с (9.194) и (9.129), наличие запертых частиц приводит к значительному росту коэффициента диффузии. Он превосходит коэффициент диффузии в однородном поле в  $q^2 (R/r)^{3/2}$  раз. Увеличение такого же порядка происходит и для других коэффициентов переноса. Коэффициент диффузии ионов, полученный при учете ион-ионных столкновений, может несколько отличаться от электронного. Однако в амбиполярном режиме коэффициент диффузии практически совпадает с (9.201). Эффективный коэффициент поперечной ионной теплопроводности при учете запертых частиц равен\*

$$\mathcal{K}_{i\perp} = 0,80 \frac{n \bar{v}_{ii} T_i}{m_i \omega_{Hi}^2} q^2 \left( \frac{R}{r} \right)^{3/2} \quad (9.202)$$

и отличается от коэффициента поперечной теплопроводности в однородном поле (9.169) множителем  $0,4 q^2 (R/r)^{3/2}$ .

Формулы (9.196) — (9.202) получены в предположении, что частоты столкновений заряженных частиц достаточно малы. Для их применения необходимо, чтобы время существования частиц в группе запертых было больше времени обхода ею банановой траектории. Длина этой траектории порядка  $L_b \approx rH/H_\phi$ , поэтому критерий сводится к неравенству  $v^b < v_{\parallel}/L_b$ , или, поскольку для запертых частиц  $v_{\parallel} \leq v \sqrt{r/R}$ ,  $v^b \approx vR/r$ , находим

$$\lambda_\alpha > r \left( \frac{R}{r} \right)^{3/2} \frac{H}{H_\alpha} = qR \left( \frac{R}{r} \right)^{3/2}, \quad (9.203)$$

\* Коэффициенты переноса, обусловленные запертыми частицами, иногда называют *коэффициентами Галева — Сагдеева*.

где  $\lambda_\alpha$  — длина свободного пробега электронов или ионов ( $\lambda_e = \bar{v}_e/\bar{\nu}_{ei}$ ;  $\lambda_i = \bar{v}_i/\bar{\nu}_{ii}$ ). С ростом частоты столкновений, когда условие (9.203) нарушается, частицы за время их существования в качестве запертых проходят лишь часть банановой траектории. Это соответственно их смещение при столкновениях уменьшается. Это приводит к тому, что, несмотря на увеличение частоты столкновений в некотором интервале, коэффициенты диффузии и теплопроводности остаются приблизительно постоянными. Этот интервал определяется условием

$$qR < \lambda_\alpha < qR (R/r)^{3/2}. \quad (9.204)$$

При больших частотах столкновений, при которых длина свободного пробега выходит за пределы области (9.204), столкновения приводят к такому уменьшению

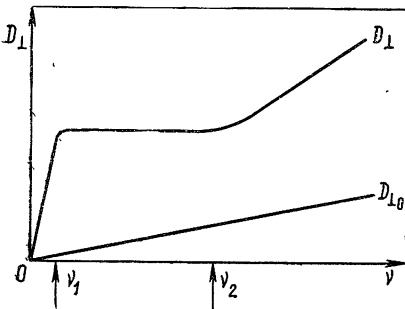


Рис. 9.11

длины пробега, при котором максимальное смещение траектории при столкновении становится порядка ларморовского радиуса. В такой области эффективные коэффициенты переноса определяются столкновениями и тороидальным дрейфом в соответствии с (9.194), (9.195).

Описанную зависимость коэффициента диффузии в тороидальной магнитной ловушке от частоты столкновений иллюстрирует рис. 9.11.

Здесь также показана зависимость коэффициента диффузии  $D_{\perp 0}$  от  $\nu$  в однородном поле. На рисунке частота  $\nu_1$  определяется временем обхода частицей банановой траектории, частота  $\nu_2 = (R/r)^{3/2} \nu_1$ . Как отмечалось выше, при  $\nu < \nu_1$  основной вклад в перенос вносят смещения, связанные со столкновениями запертых частиц, эту область называют *банановой*. В области  $\nu > \nu_2$  основное влияние на перенос оказывает тороидальный дрейф. Ее иногда называют *гидродинамической*, поскольку диффузия в этой области может быть описана с помощью усредненных уравнений движения гидродинамического типа. Промежуточную область  $\nu_1 < \nu < \nu_2$ , в которой коэффициент диффузии изменяется мало, называют *областью плато*.

## § 9.8. Дрейфовые неустойчивости и аномальная диффузия заряженных частиц плазмы в магнитном поле

Во многих случаях плазма, находящаяся в магнитном поле, неустойчива по отношению к возбуждению колебаний различного типа. При достаточно больших амплитудах колебания могут существенно изменить свойства плазмы. Они приводят, в частности,

к увеличению эффективности процессов переноса заряженных частиц и их энергии поперек магнитного поля. Детальное обсуждение неустойчивостей плазмы и их влияния на процессы переноса выходит за рамки этой книги. В качестве примера рассмотрим здесь лишь возбуждение дрейфовых волн, источником которых является градиент давления в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Такие волны распространяются обычно перпендикулярно градиенту и почти перпендикулярно полю; фазовая скорость их близка к скорости диамагнитного дрейфа (это и определило их на-

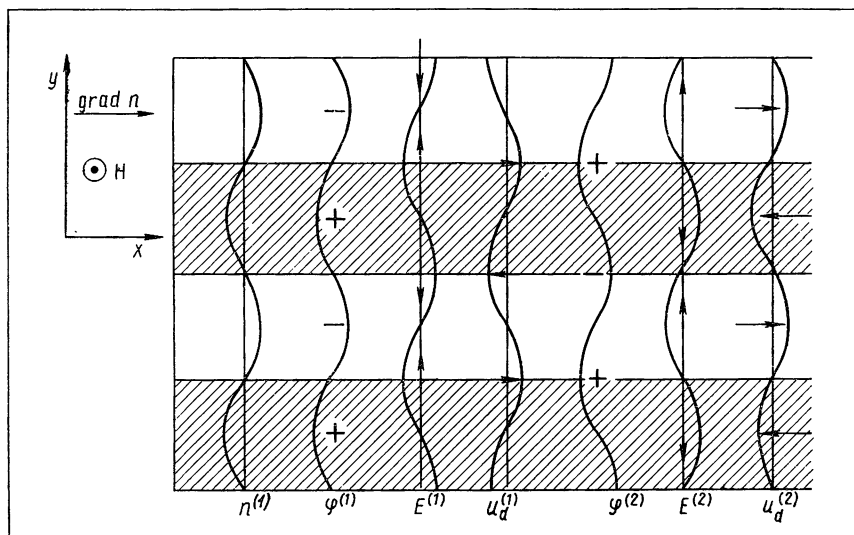


Рис. 9.12

звании). Особое место дрейфовых колебаний среди других обусловлено тем, что они могут возбуждаться в условиях, когда единственной причиной неравновесности плазмы является ее неоднородность. Поэтому дрейфовую неустойчивость иногда называют универсальной.

Обсудим сначала качественно картину развития дрейфовых колебаний под действием градиента концентрации, перпендикулярного магнитному полю (рис. 9.12). Направим ось  $z$  вдоль магнитного поля, ось  $x$  — вдоль градиента невозмущенной концентрации. Периодическое возмущение концентрации, приводящее к дрейфовой волне, зависит от продольной и поперечной координат, перпендикулярных градиенту концентрации. Представим его в виде\*

$$n^{(1)} = n_1 \cos(k_y y + k_z z) = \text{Re}[n_1 \exp i(k_y y + k_z z)] \quad (9.205)$$

и будем считать амплитуду возмущения малой  $n^{(1)} \ll n$ .

\* Как и ранее, будем использовать комплексную запись гармонически изменяющихся величин, имея в виду их действительную часть.



При таком возмущении более подвижные электроны уходят вдоль магнитного поля из области повышенной концентрации быстрее ионов. В результате в сгущениях остаются избыточные ионы, а в разрежениях собираются избыточные электроны, что приводит к возникновению периодического потенциального поля. При не слишком большой продольной длине волны связь возмущений концентрации с потенциалом дается формулой Больцмана

$$n^{(1)}/n = \exp(e\varphi^{(1)}/T_e) - 1 \approx e\varphi^{(1)}/T_e \quad (9.206)$$

(считаем, что возмущение мало и  $e\varphi^{(1)} \ll T_e$ ). Этот потенциал дает напряженность электрического поля, направленного вдоль оси  $y$ :

$$E_y^{(1)} = -\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial y} = -\frac{ik_y T_e}{e} \frac{n^{(1)}}{n}. \quad (9.207)$$

Электрическое поле вызывает дрейф в направлении оси  $x$  со скоростью

$$u_d^{(1)} = cE^{(1)}/H = ick_y T_e / eH (n^{(1)}/n). \quad (9.208)$$

Скорость дрейфа  $u_d^{(1)}$  сдвинута по фазе на  $\pi/2$  относительно возмущений концентрации (см. рис. 9.12). Поэтому в одну половину сгущения вследствие дрейфа поступают заряженные частицы из области с более высокой концентрацией, в другую половину — из области с меньшей концентрацией. В результате формируется волна, бегущая вдоль направления, перпендикулярного  $u_d^{(1)}$ , т. е. вдоль оси  $y$ .

Связанная с дрейфом скорость изменения концентрации в каждой точке пропорциональна невозмущенному градиенту и  $u_d^{(1)}$ :

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} = u_d \frac{dn}{dx} = \frac{ick_y T_e}{eH} \frac{n^{(1)}}{n} \frac{dn}{dx} = i\omega_d n^{(1)}. \quad (9.209)$$

Из (9.209) следует, что возмущение  $n^{(1)}$  и соответственно другие, связанные с ним величины колеблются во времени с частотой

$$\omega_d = \frac{ck_y T_e}{eHn} \frac{dn}{dx}; \quad (9.210)$$

она называется *дрейфовой частотой*. Фазовая скорость распространения возмущения в направлении оси  $y$

$$u_{py} = \frac{\omega_d}{k_y} = \frac{cT_e}{neH} \frac{dn}{dx} \quad (9.211)$$

равна диамагнитной скорости электронов, связанной с градиентом концентрации.

Обратим теперь внимание на то, что в дрейфовой волне частицы не движутся вместе с возмущением. Скорость их дрейфа  $u_d^{(1)}$  перпендикулярна фазовой скорости  $u_p$ . Поэтому для всех частиц поле бегущей волны оказывается переменным во времени. Переменное поле вызывает инерциальный дрейф, скорость которого пропорциональна производной поля  $dE^{(1)}/dt$  и массе частиц. Этот дрейф

и является при определенных условиях причиной неустойчивости. Инерциальный дрейф ионов при учете градиента концентрации приводит к дополнительному изменению потенциала  $\varphi^{(2)}$ , которое сдвинуто по фазе относительно  $\varphi^{(1)}$  на  $\pi/2$  (см. рис. 9.12). Определяемое им поле  $\mathbf{E}^{(2)}$  вызывает дополнительный дрейф заряженных частиц в направлении  $x$ , скорость которого  $u_d^{(2)}$  изменяется в фазе с возмущением концентрации. В сгущениях дрейф происходит против градиента концентрации, в разрежениях — по градиенту. В результате концентрация заряженных частиц в сгущениях увеличивается, а в разрежениях уменьшается. Если диссипативные процессы не компенсируют это изменение, то амплитуда дрейфовой волны нарастает со временем, т. е. плазма оказывается неустойчивой относительно возбуждения волны.

В рассмотренном случае причиной неустойчивости является инерционный дрейф ионов. В других условиях могут быть существенными и иные факторы, в частности неоднородность электронной температуры, нарушение квазинейтральности, продольный электрический ток и т. п.

Проведем количественный анализ дрейфовой неустойчивости для случая, когда продольное движение заряженных частиц ограничено столкновениями с нейтральными частицами, т. е. когда их длина свободного пробега меньше продольной длины волны колебаний (неустойчивость в этом случае иногда называют *дрейфово-диссипативной*). Рассмотрение при таких условиях может быть основано на усредненных уравнениях переноса. Будем считать, как и ранее, что источником неустойчивости является градиент концентрации заряженных частиц. Температуру электронов будем полагать постоянной ( $T_e = \text{const}$ ), температуру ионов много меньшей температуры электронов ( $T_i \ll T_e$ ), при этом амбиполярное электрическое поле  $E_A \sim T_i/L$  можно не учитывать. Концентрацию и направленную скорость заряженных частиц при анализе устойчивости представим в виде суммы равновесных величин и малых возмущений:

$$n_e = n_i = n^{(0)} + n^{(1)}(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha^{(0)} + \mathbf{u}_\alpha^{(1)}(t, \mathbf{r}). \quad (9.212)$$

Равновесную концентрацию  $n^{(0)}$ , как и раньше, будем полагать зависящей от координаты  $x$ , перпендикулярной магнитному полю (оно предполагается направленным вдоль  $z$ ):

$$n^{(0)} = n^{(0)}(x), \quad dn^{(0)}/dx = \kappa n^{(0)}. \quad (9.213)$$

Возмущенные величины будем искать в виде волн, распространяющихся в направлении, перпендикулярном градиенту невозмущенной концентрации:

$$\left. \begin{aligned} n^{(1)}(t, \mathbf{r}) &= \text{Re} \{ n^{(1)} \exp [i(k_y y + k_z z - \omega t)] \}; \\ \mathbf{u}^{(1)}(t, \mathbf{r}) &= \text{Re} \{ \mathbf{u}^{(1)} \exp [i(k_y y + k_z z - \omega t)] \} \end{aligned} \right\} \quad (9.214)$$

и т. д., где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, имеющий компоненту, параллельную магнитному полю  $k_z$  и перпендикулярную полю и градиенту  $k_y$ . Различие направленных скоростей электронов и ионов приводит к разделению зарядов и появлению электрического поля. Поскольку дрейфовые колебания являются низкочастотными, сопровождающее их электрическое поле можно считать потенциальным. Поэтому, считая, что потенциал  $\varphi^{(1)}$  изменяется в пространстве так же, как возмущения  $n^{(1)}$  и  $u^{(1)}$ , находим

$$\mathbf{E}^{(1)} = -\text{grad } \varphi^{(1)}; \quad E_y^{(1)} = -ik_y \varphi^{(1)}; \quad E_z^{(1)} = -ik_z \varphi^{(1)}. \quad (9.215)$$

Используя выражения, полученные в предыдущих параграфах, можно найти скорость заряженных частиц. Для электронов продольная компонента направленной скорости равна

$$u_{ez} = -\frac{T_e}{m_e v_{ea}} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} - \frac{e}{m_e v_{ea}} E_z. \quad (9.216)$$

Отсюда получаем

$$u_{ez}^{(0)} = 0, \quad u_{ez}^{(1)} = -\frac{ik_z T_e}{m_e v_{ea}} \left( \frac{n^{(1)}}{n_0} - \frac{e\varphi^{(1)}}{T_e} \right). \quad (9.217)$$

Полагая, что  $\omega_{He} \gg v_{ea}$ , будем учитывать в выражении для поперечной компоненты направленной скорости (9.8) только дрейф электронов, связанный с градиентом концентрации и электрическим полем. Тогда

$$u_{e\perp} = \frac{c}{H} \left[ \mathbf{h} \times \left( \text{grad } \varphi - \frac{T_e}{e} \text{grad } n \right) \right]. \quad (9.218)$$

Используя зависимость от координат  $n^{(0)}$  (9.213) и  $n^{(1)}(\mathbf{r}, t)$  (9.214), получаем

$$\left. \begin{aligned} u_{ex}^{(0)} = 0; \quad u_{ey}^{(0)} = -\frac{cT_e}{n^{(0)}eH} \frac{dn^{(0)}}{dx} = -\kappa \frac{cT_e}{eH}; \\ u_{ex}^{(1)} = ik_y \frac{c}{H} \varphi^{(1)} - ik_y \frac{cT_e}{eH} \frac{n^{(1)}}{n^{(0)}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.219)$$

Эти соотношения позволяют найти изменение возмущения концентрации электронов, связанное с их направленным движением:

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} = -\text{div}(n^{(1)} \mathbf{u}_e^{(0)}) - \text{div}(n^{(0)} \mathbf{u}_e^{(1)}), \quad (9.220)$$

где мы пренебрегли квадратичными слагаемыми  $\text{div}(n^{(1)} \mathbf{u}^{(1)})$ , полагая возмущения  $n^{(1)}$  и  $\mathbf{u}^{(1)}$  малыми. Подставляя в последнее уравнение формулы для  $u_{ex}^{(1)}$ ,  $u_{ez}^{(1)}$  и учитывая (9.214), получаем после простых преобразований

$$i\omega n^{(1)} = \frac{k_z^2 n^{(0)} T_e}{m_e v_{ea}} \left( \frac{n^{(1)}}{n^{(0)}} - \frac{e\varphi^{(1)}}{T_e} \right) + ik_y \kappa \frac{c}{H} n^{(0)} \varphi^{(1)}. \quad (9.221)$$

Для ионов продольной составляющей скорости из-за их большой массы можно пренебречь. Поперечную составляющую направленной скорости ионов найдем, полагая  $\omega_{Hi} \gg v_i$  и  $T_i = 0$ . В этом случае дрейф ионов определяется электрическим полем. Однако кроме основного дрейфа в соответствии со сказанным выше необходимо учитывать инерциальный дрейф ионов. При его учете в соответствии с (8.27), (8.33) получаем

$$\mathbf{u}_{i\perp} = \frac{c}{H} [\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{h}] + \frac{m_i c^2}{eH^2} \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t} = \frac{c}{H} [\mathbf{h} \times \text{grad}_\perp \varphi] + \frac{m_j c^2}{eH^2} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad}_\perp \varphi). \quad (9.222)$$

Используя (9.215), находим компоненты направленной скорости ионов:

$$u_{i\perp}^{(0)} = 0; u_{ix}^{(1)} = i k_y \frac{c}{H} \varphi^{(1)}; u_{iy}^{(1)} = k_y \frac{c}{H} \frac{\omega}{\omega_{Hi}} \varphi^{(1)}. \quad (9.223)$$

С их помощью можно определить изменение возмущения концентрации ионов

$$\partial n^{(1)} / \partial t = -\text{div} (n^{(0)} \mathbf{u}_i^{(1)}) = -u_{ix}^{(1)} \kappa n^{(0)} - i k_y n^{(0)} u_{iy}^{(1)}. \quad (9.224)$$

[Здесь, как и ранее, пренебрегается квадратичными членами  $\text{div} (n^{(1)} \mathbf{u}^{(1)})$ .] Используя (9.223) для  $u_{ix}^{(1)}$ ,  $u_{iy}^{(1)}$  и учитывая зависимость возмущений от времени и координат, получаем

$$-i \omega n^{(1)} = i k_y \kappa \frac{c}{H} n^{(0)} \varphi^{(1)} - i k_y^2 \frac{\omega}{\omega_{Hi}} \frac{c}{H} n^{(0)} \varphi^{(1)}. \quad (9.225)$$

Уравнения для изменения концентрации электронов (9.221) и ионов (9.225) можно переписать в виде

$$\left( \omega + i \frac{k_z^2 T_e}{m_e \nu_{ea}} \right) \frac{n^{(1)}}{n^{(0)}} = \left( \omega_d + i \frac{k_z^2 T_e}{m_e \nu_{ea}} \right) \frac{e\varphi^{(1)}}{T_e};$$

$$\frac{n^{(1)}}{n^{(0)}} = - \left( \frac{\omega_d}{\omega} - \frac{k_y^2 T_e}{m_i \omega_{Hi}^2} \right) \frac{e\varphi^{(1)}}{T_e}, \quad (9.226)$$

где  $\omega_d = k_y \kappa T_e / eH$  — дрейфовая частота (9.210). Таким образом, получим систему линейных уравнений для определения  $n^{(1)}$  и  $\varphi^{(1)}$ . Ненулевое решение системы возможно при обращении в нуль детерминанта. Это условие дает так называемое *дисперсионное уравнение*:

$$\omega^2 + i \omega \left( \frac{k_z^2}{k_y^2} \frac{\omega_{He} \omega_{Hi}}{\nu_{ea}} + \frac{k_z^2 T_e}{m_e \nu_{ea}} \right) - i \omega_d \frac{k_z^2}{k_y^2} \frac{\omega_{He} \omega_{Hi}}{\nu_{ea}} = 0. \quad (9.227)$$

В сильном магнитном поле, в котором

$$k_y^2 T_e / m_e \omega_{He} \omega_{Hi} = k_y^2 T_e / m_i \omega_{Hi}^2 \ll 1, \quad (9.228)$$

вторым членом в скобках можно пренебречь. При этом дисперсионное уравнение приобретает простой вид:

$$\omega^2 + i\omega\omega_s - i\omega_d\omega_s = 0, \quad (9.229)$$

где  $\omega_s = (k_z^2/k_y^2)\omega_{He}\omega_{Hi}/v_{ea}$ . Решения уравнения в предельных случаях даются равенствами:

$$\text{при } \omega_s \gg \omega_d: \omega_1 = \omega_d + i\omega_d^2/\omega_s; \omega_2 = -i\omega_s; \quad (9.230)$$

$$\text{при } \omega_s \ll \omega_d: \omega_{1,2} = \pm(1+i)\sqrt{\omega_s\omega_d/2}. \quad (9.231)$$

Они определяют комплексную частоту  $\omega = \Omega + i\gamma$ .

Нетрудно убедиться, что из двух решений неустойчивым является то, у которого мнимая часть положительна ( $\gamma > 0$ ). Для него изменение возмущения со временем характеризуется множителем  $\exp(-i\omega t) = \exp(\gamma t)\exp(-i\Omega t)$ , т. е. имеет место экспоненциальное нарастание возмущения. При этом  $\gamma = \text{Im}(\omega)$  представляет собой инкремент, определяющий скорость нарастания возмущения. Для неустойчивых колебаний в соответствии с (9.230), (9.231)

$$\begin{aligned} \gamma &= \omega_d^2/\omega_s^2 \text{ при } \omega_s \gg \omega_d, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{\omega_s\omega_d}{2}} \text{ при } \omega_s \ll \omega_d. \end{aligned} \quad (9.232)$$

Как видно, при изменении  $\omega_s = (k_z^2/k_y^2)\omega_{He}\omega_{Hi}/v_{ea}$  инкремент проходит через максимум. Этот максимум достигается при  $\omega_s \approx \omega_d$  и по порядку  $\gamma_{\text{макс}} \approx \omega_d$ .

Следует отметить, что мы не учитывали стабилизирующего влияния столкновений ионов. Можно показать, что стабилизация, связанная с ион-атомными столкновениями, происходит, когда длина свободного пробега ионов порядка или меньше характерных поперечных размеров плазмы. Для сильноионизованной плазмы необходимо учитывать также стабилизацию, обусловленную ионными столкновениями. В неоднородном магнитном поле существуют и другие механизмы стабилизации колебаний, в частности колебания с малым  $k_z$  стабилизируются «широко».

Проведенное рассмотрение является линейным анализом неустойчивости, при котором возмущения начального равновесного состояния предполагаются малыми. Такой анализ позволяет определить условия возникновения неустойчивости, найти частоту и конфигурацию нарастающих колебаний в зависимости от параметров плазмы и от характера возмущения. Чтобы выяснить, к чему приводит развитие неустойчивости, надо, очевидно, построить нелинейную теорию, учитывающую возможные механизмы ее ограничения. В настоящее время разработан целый ряд подходов к такой нелинейной теории, однако ее разработка еще далека от завершения. Изложение современных представлений о нелинейной стадии развития неустойчивости выходит за рамки настоящей книги. От-

метим лишь, что в зависимости от типа нелинейной диссипации характер развития неустойчивости может быть различным. В одном из предельных случаев при развитии неустойчивости сохраняется преобладание одной из мод колебаний, соответствующей оптимальным значениям компонент волнового вектора, при этом формируется почти периодическая нелинейная волна. В другом предельном случае развитие неустойчивости приводит к возбуждению широкого спектра взаимодействующих между собой колебаний, характеризующегося большим диапазоном значений компонент волнового вектора. Плазму в таких условиях принято называть *турбулентной*, так как взаимодействие волновых пакетов в ней в известном смысле аналогично взаимодействию вихрей в турбулентной жидкости. И в том и в другом случае колебания приводят к возникновению потоков частиц и энергии поперек магнитного поля, не связанных со столкновениями. Эти потоки называют соответственно *аномальной* (или *турбулентной*) *диффузией* и *теплопроводностью*.

Приведем грубую оценку коэффициента аномальной диффузии заряженных частиц при развитии дрейфовой неустойчивости, описанной выше. Поскольку градиент концентрации является причиной дрейфовой неустойчивости, естественно, что она приводит к потокам, стремящимся сгладить распределение концентрации, т. е. к потокам, направленным против градиента. Плотность потока частиц, параллельного градиенту концентрации, равна усредненному по колебаниям произведению концентрации на направленную скорость частиц, которая для дрейфовых колебаний практически равна скорости их дрейфа в электрическом поле.

Представим, как и раньше, концентрацию и скорость в виде суммы невозмущенной и возмущенной величин:  $n = n^{(0)} + n^{(1)}$  и  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{u}^{(1)}$ . Имея в виду, что  $\langle n^{(1)} \rangle = 0$  и  $\langle u^{(1)} \rangle = 0$ , получаем

$$\Gamma_x^{(1)} = \langle n^{(1)} u_x^{(1)} \rangle = \frac{c}{H} \langle n^{(1)} E_y^{(1)} \rangle, \quad (9.233)$$

где по-прежнему считаем, что градиент невозмущенной концентрации направлен вдоль оси  $x$ . В гармонически изменяющемся поле стационарной дрейфовой волны поле  $E_y^{(1)}$  сдвинуто по фазе относительно возмущенной концентрации  $n^{(1)}$  на  $90^\circ$ . Соответственно усредненный поток равен нулю. Нетрудно понять причину этого. Дрейф в потенциальном электрическом поле приводит к «несжимаемому» движению, при котором  $\text{div } \mathbf{u} = \text{div } \frac{c}{H} [\mathbf{h} \times \text{grad } \phi] = 0$ .

Перенос заряженных частиц при таком движении носит характер конвекции, он связан со смещением частиц в направлении градиента концентрации. При периодически изменяющемся поле скорость дрейфа периодически изменяет знак и, естественно, усредненный поток отсутствует. Однако уже при учете нарастания во времени амплитуды волны каждый последующий период приводит к большему смещению заряженных частиц, чем предыдущий, и появляется

усредненный поток. Нетрудно оценить этот эффект. Изменение концентрации частиц в результате их несжимаемого перемещения равно

$$n^{(1)} = -\xi_x dn^{(0)}/dx = -\xi_x \kappa n^{(0)}, \quad (9.234)$$

где  $\dot{\xi}_x = u_x^{(1)}$ . Учитывая это, получаем

$$\Gamma_x^{(1)} = \langle n^{(1)} u_x^{(1)} \rangle = -\langle \xi_x \dot{\xi}_x \rangle dn^{(0)}/dx = -\gamma \langle \xi_x^2 \rangle dn^{(0)}/dx, \quad (9.235)$$

где  $\gamma$  — инкремент неустойчивости;  $\langle \xi_x^2 \rangle$  — средний квадрат смещения частиц. Заметим, что в нарастающей дрейфовой волне отличие сдвига фазы между  $n^{(1)}$  и  $u_x^{(1)} \sim E_y^{(1)}$  от  $90^\circ$  связано с разделением зарядов, обусловленным инерциальным дрейфом ионов (именно это разделение, как отмечено выше, приводит к нарастанию колебаний). Формула (9.235) позволяет ввести коэффициент диффузии, описывающий поток против градиента невозмущенной концентрации:

$$D_{\perp} = \gamma \langle \xi_x^2 \rangle = \frac{\gamma}{\kappa^2} \left\langle \left( \frac{n^{(1)}}{n^0} \right)^2 \right\rangle. \quad (9.236)$$

Видно, что он пропорционален усредненному квадрату относительного возмущения концентрации. Обычно полагают, что полученная оценка справедлива и при больших амплитудах колебаний, и даже в турбулентном состоянии. В последнем случае имеет место динамический баланс энергий, которыми обмениваются различные моды колебаний. При этом входящая в (9.236) величина  $\gamma \langle (n^{(1)})^2 \rangle$  должна быть просуммирована по модам, соответствующим различным значениям компонент волнового вектора.

При развитой турбулентности амплитуда колебаний каждой моды может возрасти настолько, что возмущение градиента концентрации станет порядка начального градиента. Для колебаний с заданным значением  $k_y$  это дает  $k_y n \sim \kappa n^{(0)}$ . Соответствующий таким колебаниям коэффициент поперечной диффузии равен

$$D_{\perp} = \sum_k \frac{\gamma_k}{\kappa^2} \left\langle \left( \frac{n^k}{n^{(0)}} \right)^2 \right\rangle \sim \sum_k \frac{\gamma_k}{k_y^2}. \quad (9.237)$$

Среди колебаний с различным значением  $k_z$  наибольший вклад в эту сумму дают такие, при которых достигаются максимальные значения инкремента  $\gamma_k \sim \omega_d \sim k_y \kappa T_e / eH$ . Наименьшее возможное значение  $k_y$  должно быть порядка обратного характерного размера, т. е. порядка  $\kappa$ . Учитывая это, получаем оценку коэффициента диффузии при максимальной амплитуде колебаний

$$D_{\perp \text{ макс}} = g T_e / eH, \quad (9.238)$$

где  $g$  — множитель порядка единицы. Коэффициент с численным множителем  $g = 1/16$  называется *коэффициентом диффузии Бома* (по имени физика, впервые предложившего его из интуитивных соображений). Формулу (9.238) часто используют для оценки по-

рядка коэффициента аномальной диффузии и температуропроводности.

Определим отношение бомовского коэффициента аномальной диффузии  $D_B$ , вызванной колебаниями, к коэффициенту поперечной диффузии  $D_\nu$ , обусловленной столкновениями (в отличие от аномальной ее часто не очень удачно называют *классической*).<sup>\*</sup> Используя формулу (9.95) или (9.157) для коэффициента амбиполярной столкновительной диффузии, получаем

$$D_B/D_A = g \omega_{He}/\nu_{ea}, \quad (9.239)$$

где  $\nu_{ea}$  — частота столкновений электронов с тяжелыми частицами.

Отметим, что в сильно турбулентной плазме дрейфовое движение заряженных частиц приобретает случайный характер. Заряженные частицы, дрейфуя в хаотически изменяющихся переменных полях, испытывают смещения, величина и направление которых хаотически изменяются в пространстве и во времени. Поэтому их траектории становятся вполне аналогичными траекториям частиц, смещения которых вызываются столкновениями. Имея в виду эту аналогию, иногда вводят эффективные частоты столкновений, характеризующие аномальную поперечную диффузию или теплопроводность. Чтобы их определить, используют формулы для коэффициентов переноса, обусловленных столкновениями, и приравнивают их аномальным коэффициентам. Для коэффициента диффузии Бома, например, получаем

$$T_e \nu_{eff}/m_e \omega_{He}^2 = g c T_e / e H \quad (9.240)$$

и  $\nu_{eff} = g \omega_{He}$ . При  $\omega_{He} \gg \nu_{ea}$  эффективная частота столкновений, определяющая аномальную диффузию, много больше реальной частоты столкновений электронов с тяжелыми частицами. Это означает, что коэффициент аномальной диффузии много больше коэффициента поперечной диффузии, обусловленного столкновениями.

---

<sup>\*</sup> Диффузию в тороидальном магнитном поле, обусловленную столкновениями запертых частиц, иногда называют *неоклассической*.



## УДЕРЖАНИЕ ПЛАЗМЫ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

### § 10.1. Уравнения магнитной гидродинамики

Как было показано в гл. 9, сильное магнитное поле приводит к резкому уменьшению поперечных коэффициентов переноса заряженных частиц. Поэтому полностью ионизованная плазма, в которой имеются только заряженные частицы, может длительно удерживаться магнитным полем вдали от материальных стенок. Такое удержание используется для осуществления термоизоляции и нагрева плазмы в исследованиях по проблеме управляемого термоядерного синтеза.

Анализ удержания плазмы магнитным полем должен, очевидно, основываться на совместном (самосогласованном) решении уравнений, описывающих поведение плазмы в магнитном поле, и уравнений, определяющих магнитное поле в плазме. Система этих уравнений в общем случае достаточно сложна, и для ее решения используют различные упрощения. Во многих случаях удобно описывать плазму как единую, нейтральную, но проводящую жидкость, на которую может воздействовать магнитное поле. Такое описание называется *магнитогидродинамическим*. При его использовании не рассматриваются процессы, характеризующиеся быстрыми временами и малыми масштабами и приводящие к нарушению квазинейтральности. Характерные времена описываемых процессов должны быть, очевидно, много больше микроскопических времен — обратной плазменной частоты  $1/\omega_p$ , периодов вращения частиц в магнитном поле  $1/\omega_{He}$ ,  $1/\omega_{Hi}$ . Пространственные масштабы соответственно должны быть много больше дебаевского и ларморовских радиусов частиц.

Получим уравнения магнитной гидродинамики для двухкомпонентной полностью ионизованной плазмы. Введем в рассмотрение массовую плотность плазмы

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e = (m_i + m_e) n \approx m_i n \quad (10.1)$$

и скорость центра масс (гидродинамическую скорость)

$$\mathbf{u} = \frac{n}{\rho} (m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e) \approx \mathbf{u}_i + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{u}_e. \quad (10.2)$$

Поскольку для дрейфовых движений в достаточно сильном магнитном поле  $\mathbf{u}_e \approx \mathbf{u}_i$ , а в продольном электрическом поле  $u_e/u_i \approx \sqrt{m_i/m_e}$ , то приближенно можно считать  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_i$ .

Умножая уравнения нулевого момента для электронов и ионов соответственно на  $m_e$  и  $m_i$  и складывая их, получаем уравнение сохранения массы плазмы, определяющее изменение плотности:

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0. \quad (10.3)$$

Гидродинамическое уравнение движения плазмы в целом можно найти из уравнений движения для компонент, которые в соответствии с (6.61) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} nm_e [\partial \mathbf{u}_e / \partial t + (\mathbf{u}_e \operatorname{grad}) \mathbf{u}_e] &= -en\mathbf{E} - (en/c) [\mathbf{u}_e \times \mathbf{H}] - \\ &\quad - \operatorname{grad} p_e + n\mathbf{R}_{ei} + n\mathbf{R}_{ei}^T; \\ nm_i [\partial \mathbf{u}_i / \partial t + (\mathbf{u}_i \operatorname{grad}) \mathbf{u}_i] &= en\mathbf{E} + (en/c) [\mathbf{u}_i \times \mathbf{H}] - \\ &\quad - \operatorname{grad} p_i + n\mathbf{R}_{ie} + n\mathbf{R}_{ie}^T. \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Складывая эти уравнения и учитывая, что  $\mathbf{R}_{ei} = -\mathbf{R}_{ie}$ ,  $\mathbf{R}_{ei}^T = -\mathbf{R}_{ie}^T$ , получаем уравнение для средней скорости  $\mathbf{u}$  в виде

$$\rho (d\mathbf{u}/dt) = (1/c) [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] - \operatorname{grad} p, \quad (10.5)$$

где  $p = p_i + p_e$  — суммарное давление;  $\mathbf{j} = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$  — плотность тока; полная производная  $d\mathbf{u}/dt = \partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u} \operatorname{grad}) \mathbf{u}$  представляет собой так называемое гидродинамическое ускорение.

Полученное гидродинамическое уравнение движения имеет ясный физический смысл. Оно описывает ускорение единицы объема плазмы, вызываемое суммой действующих на единицу объема сил: электродинамической силы, связанной с взаимодействием тока с магнитным полем, и градиента суммарного давления. Поскольку плазма в целом нейтральна, электрическое поле на нее не действует и оно не входит в правую часть (10.5). Для медленных процессов, когда изменение направленной скорости, определяемое левой частью уравнения движения (10.5), мало, уравнение сводится к условию равновесия сил, действующих на плазму, и принимает вид

$$\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = \operatorname{grad} p. \quad (10.6)$$

Уравнение для тока в плазме также можно получить из уравнений движения электронной и ионной компонент (10.4). Умножая эти уравнения на  $e/m$  и вычитая одно из другого, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{\mathbf{j}}{n} \frac{\partial n}{\partial t} &= ne^2 \left( \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right) \mathbf{E} + \frac{ne^2}{c} \left[ \left( \frac{\mathbf{u}_i}{m_i} + \frac{\mathbf{u}_e}{m_e} \right) \mathbf{H} \right] - \\ &\quad - e \left( \frac{\operatorname{grad} p_i}{m_i} - \frac{\operatorname{grad} p_e}{m_e} \right) - ne (\mathbf{R}_{ei} + \mathbf{R}_{ei}^T) \left( \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right), \end{aligned} \quad (10.7)$$

где опущены малые квадратичные слагаемые  $(\mathbf{u}_e \operatorname{grad}) \mathbf{u}_e$  и  $(\mathbf{u}_i \operatorname{grad}) \mathbf{u}_i$ . Пренебрегая слагаемыми порядка  $m_e/m_i$  и учитывая, что  $\mathbf{j} =$

$\approx ne (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \approx ne (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e)$ , преобразуем (10.7) к виду

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{n} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \mathbf{E} + \frac{ne^2}{m_e c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{e}{m_e c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] + \frac{e}{m_e} \text{grad } p_e - \frac{ne}{m_e} (\mathbf{R}_{ei} + \mathbf{R}_{ei}^T). \quad (10.8)$$

Входящие в это уравнение трение и термосила в сильном магнитном поле могут быть найдены с помощью формул (7.146) — (7.148), (9.118) и (9.119). В соответствии с ними

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ei} &= -0,51 m_e \bar{\nu}_{ei} (\mathbf{u}_{e\parallel} - \mathbf{u}_{i\parallel}) - m_e \bar{\nu}_{ei} (\mathbf{u}_{e\perp} - \mathbf{u}_{i\perp}) = \\ &= \frac{m_e \bar{\nu}_{ei}}{en} (0,51 \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}); \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\mathbf{R}_{ei}^T = 0,71 \text{grad}_{\parallel} T_e + \frac{3}{2} \frac{\bar{\nu}_{ei}}{\omega_{He}} [\mathbf{h} \times \text{grad}_{\perp} T_e],$$

где  $\bar{\nu}_{ei}$  — усредненная частота электрон-ионных столкновений (7.145). Уравнение (10.8) существенно упрощается для медленных процессов, при которых можно пренебречь его левой частью и использовать равенство (10.6), дающее условие равновесия плазмы. Подставляя в уравнение (10.8) соотношения для  $\mathbf{R}_{ei}$  и используя (10.6) для нахождения  $[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ , приведем это уравнение к виду

$$\frac{\mathbf{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_t} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{1}{en} \text{grad } p_i - \frac{1}{e} \mathbf{R}_{ei}, \quad (10.10)$$

где  $\sigma_{\parallel} \approx 2ne^2/m_e \bar{\nu}_{ei}$ ;  $\sigma_t = ne^2/m_e \bar{\nu}_{ei}$ , ( $\sigma_{\parallel}$  — продольная проводимость плазмы (7.153);  $\sigma_t$  называют иногда поперечной проводимостью). Величины  $\sigma_{\parallel}$  и  $\sigma_t$  различаются только коэффициентом 2. Это различие часто не учитывают и записывают (10.10) в виде

$$\mathbf{j} = \sigma \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{1}{en} \text{grad } p_i - \frac{1}{e} \mathbf{R}_{ei}^T \right\}. \quad (10.11)$$

Формулы (10.10) или (10.11), дающие связь между током и напряженностью электрического поля в плазме, называют *обобщенным законом Ома*. Заметим, что в него входят не только электрическое и магнитное поля, но и параметры компонент плазмы — градиенты ионного давления и электронной температуры. Формулу обобщенного закона Ома (10.10) можно упростить для часто встречающегося случая, когда градиенты концентрации и температуры электронов и ионов имеют одинаковое направление; при этом, поскольку градиент суммарного давления в соответствии с (10.6) перпендикулярен магнитному полю, все парциальные градиенты также перпендикулярны полю. В этих условиях удобно записать отдельно «продольный» и «поперечный» законы Ома. Проектируя векторную формулу (10.10) на направление магнитного поля и

учитывая, что  $\text{grad } p$ ,  $\text{grad } T_e \perp \mathbf{H}$ , находим обычную формулу закона Ома для продольной составляющей тока:

$$\mathbf{j}_{\parallel} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}. \quad (10.12)$$

Проектируя (10.10) на направление, перпендикулярное магнитному полю, получаем

$$\mathbf{j}_{\perp} = \sigma_{\perp} \left\{ \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{3}{2} [\mathbf{h} \times \text{grad } T_e] - \frac{1}{ne} \text{grad } p_i \right\} \quad (10.13)$$

[здесь было использовано соотношение (10.9)]. Представляя электрическое поле в системе отсчета, движущейся вместе с плазмой ( $\mathbf{E}_{\perp}^* = \mathbf{E}_{\perp} + (1/c)[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]$ ), в виде суммы компонент, параллельной и перпендикулярной току  $\mathbf{E}_{\perp j}^*$  и  $\mathbf{E}_{\perp g}^*$ , и учитывая, что в соответствии с (10.6)  $\mathbf{j} \perp \text{grad } p$ , разобьем это уравнение на два — первое можно назвать поперечным законом Ома

$$\mathbf{j}_{\perp} = \sigma_{\perp} \left\{ \mathbf{E}_{\perp j}^* - \frac{3}{2} [\mathbf{h} \times \text{grad } T_e] \right\}, \quad (10.14)$$

второе определяет перпендикулярную току компоненту поля (так называемое холловское поле)

$$\mathbf{E}_{\perp g}^* = (1/ne) \text{grad } p_i. \quad (10.15)$$

Это поле необходимо для поддержания квазинейтральности плазмы. Сила взаимодействия тока с полем  $(1/c)[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$  действует на электронную компоненту и создает градиент давления электронного газа. В квазинейтральной плазме он приводит к появлению градиента ионного давления, который и уравновешивается электрическим полем (10.15). Как видно из формул (10.12), (10.14), в рассматриваемом случае в отсутствие градиента температуры закон Ома принимает форму, близкую к обычной. При этом в поперечный закон Ома входит поле в системе координат, движущейся вместе с плазмой, и поперечная проводимость несколько отличается от продольной.

Получим теперь уравнения для напряженности магнитного поля. Для этого воспользуемся уравнениями Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

Полагая процессы в плазме достаточно медленными, пренебрежем током смещения  $(1/4\pi)\partial\mathbf{E}/\partial t$ , считая его малым по сравнению с током проводимости. Как легко убедиться, такое пренебрежение допустимо, когда характерные времена изменения параметров плазмы много больше времени между столкновениями ( $\tau \gg 1/\nu_{ei}$ ). Уравнение для магнитного поля примет тогда вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}. \quad (10.17)$$

Преобразуем его, применив к правой и левой частям операцию rot и учтя, что  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$ , поскольку  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ . Получим в результате

$$\Delta \mathbf{H} + (4\pi/c) \text{rot } \mathbf{j} = 0. \quad (10.18)$$

В это уравнение следует подставить выражение, определяющее плотность тока (10.10). В общем случае уравнение весьма громоздко. Оно существенно упрощается, если использовать приближенную форму закона Ома (10.11) для случая, когда градиент температуры пренебрежимо мал. В этом случае можно не учитывать термосилу и полагать проводимость плазмы  $\sigma \approx ne^2/m_e v_{ei} \sim T_e^{3/2}$  постоянной. В результате уравнение (10.18) преобразуется к виду

$$\Delta \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \sigma \text{rot} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] \right\}. \quad (10.19)$$

Подставляя в него rot  $\mathbf{E}$  из второго уравнения Максвелла, получаем упрощенное уравнение для напряженности магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H} + \text{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]. \quad (10.20)$$

Заметим, что из него удалось исключить напряженность электрического поля и ток.

В уравнения (10.5), (10.6) входит давление плазмы  $p = n(T_e + T_i)$ . Чтобы найти его, используем уравнения баланса энергии. Для электронной и ионной компонент полностью ионизованной плазмы эти уравнения имеют вид [см. (6.78), (6.79)]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n T_e \right) + \text{div} \left( \frac{3}{2} n T_e \mathbf{u}_e \right) + n T_e \text{div } \mathbf{u}_e &= -\text{div } \mathbf{q}_e - P_{ei} + P_{e\dot{i}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n T_i \right) + \text{div} \left( \frac{3}{2} n T_i \mathbf{u}_i \right) + n T_i \text{div } \mathbf{u}_i &= -\text{div } \mathbf{q}_i - P_{ie} + P_{i\dot{e}}, \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

где слагаемое  $P_{ei} = -P_{ie}$  описывает обмен энергией между электронами и ионами в результате упругих столкновений, величины  $P_e$ ,  $P_i$  представляют собой энергию, приобретаемую и теряемую электронами и ионами в результате неупругих столкновений и при взаимодействии с внешними источниками энергии. Складывая оба уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} p \right) + \text{div} \left( \frac{3}{2} p \mathbf{u} \right) - \text{div} \left( \frac{3}{2} \frac{p_e}{en} \mathbf{j} \right) + p \text{div } \mathbf{u} - \\ - p_e \text{div} \frac{\mathbf{j}}{en} = -\text{div } \mathbf{q} + P, \end{aligned} \quad (10.22)$$

Здесь  $P = P_e + P_i$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i$ . Так как в соответствии с (10.17)  $\mathbf{j} = c/4\pi \text{rot } \mathbf{H}$  и  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , то уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} p \right) + \frac{3}{2} (\mathbf{u} \text{grad}) p + \frac{5}{2} p \text{div } \mathbf{u} = \\ & = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{j}}{e} \text{grad } T_e - \mathbf{j} \frac{T_e}{en} \text{grad } n - \text{div } \mathbf{q} + P. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Видно, что в общем случае в уравнение баланса энергии плазмы входят не только суммарные характеристики, но и параметры электронной компоненты. Эти параметры и ток выпадают из уравнения только в некоторых частных случаях, например, если плазма однородна, или ток перпендикулярен  $\text{grad } T_e$ ,  $\text{grad } n$ , или  $P$  уравнивает остальные слагаемые в правой части (10.23). В последнем случае все источники выделения и потерь тепла скомпенсированы. Используя уравнение непрерывности, в соответствии с которым  $\rho \text{div } \mathbf{u} = -\partial\rho/\partial t - \mathbf{u} \text{grad } \rho = -d\rho/dt$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} p \right) - \frac{5}{2} \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad p \sim \rho^\gamma, \quad (10.24)$$

где  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты для одноатомного газа. Как и следовало ожидать, при отсутствии обмена с внешней средой плазму можно рассматривать как идеальный газ. Уравнение (10.24) в этом частном случае дает недостающую связь между величинами  $p$  и  $\rho$ . Температура при этом остается произвольной. Она определяется начальными условиями, т. е. полной энергией, запасенной в плазме. Рассмотрение остается справедливым также для достаточно быстрых процессов, за время протекания которых обмен энергией с внешней средой не успеваает произойти.

Уравнения для плотности плазмы (10.3), для средней скорости (10.5), для напряженности магнитного поля и тока (10.20), (10.17) и для давления (10.24) образуют полную систему уравнений магнитной гидродинамики. Приведем их вместе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\text{div } \rho \mathbf{u}; \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} \times \text{rot} \mathbf{H}] - \text{grad } p; \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H} + \text{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]; \quad \frac{dp}{dt} = \gamma \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

При выводе системы (10.25) давление заряженных частиц каждого сорта предполагалось изотропным. Для плазмы с малой частотой столкновений в сложных магнитных конфигурациях это предположение может не выполняться. Для таких условий вводят диагональный тензор давления, в котором продольные и поперечные компоненты различны. Магнитогидродинамическое описание

плазмы возможно и в этом случае. Изменения в уравнениях сводятся к различию продольных и поперечных компонент градиента давления в уравнении движения и к изменению уравнения для давления. Метод описания, учитывающий анизотропию давления, называют *анизотропной магнитной гидродинамикой\**.

## § 10.2. О равновесии плазмы в магнитном поле

Первая задача, возникающая при рассмотрении удержания плазмы в магнитном поле, заключается в определении условий, при которых достигается равновесие, т. е. электродинамические силы, действующие на каждый элемент объема плазмы, уравновешивают градиент давления.

Выражение для электродинамической силы  $\mathbf{G}_H$ , возникающей при взаимодействии тока, текущего по плазме, с магнитным полем, можно получить с помощью уравнений (10.6), (10.17):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_H &= \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = -\frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}] = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \text{grad } (H^2) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{H} \end{aligned} \quad (10.26)$$

(здесь было использовано известное векторное равенство для  $[\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}]$ ). Видно, что эту силу можно представить в виде градиента максвелловского тензора напряжений

$$\mathbf{G}_H = -\text{grad } \check{p}_M, \quad G_{Hk} = -\sum_l \frac{\partial p_{Mkl}}{\partial x_l}, \quad (10.27)$$

где  $p_{Mkl} = (H^2/8\pi) \delta_{kl} - H_k H_l/4\pi$ .

В системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль магнитного поля, этот тензор диагонален

$$\check{p}_M = \begin{pmatrix} H^2/8\pi & 0 & 0 \\ 0 & H^2/8\pi & 0 \\ 0 & 0 & -H^2/8\pi \end{pmatrix}. \quad (10.28)$$

Другую форму выражения для  $\mathbf{G}_H$  можно получить, если ввести радиус кривизны силовых линий  $\mathbf{R}$  (см. § 8.1). Учитывая (8.9), преобразуем второе слагаемое (10.26):

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{H} &= H (\mathbf{h} \text{ grad}) \mathbf{h} H = H^2 \text{grad}_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{1}{2} \text{grad}_{\perp} H^2 = \\ &= -\frac{H^2}{R} \mathbf{R} + \frac{1}{2} \text{grad}_{\parallel} H^2, \end{aligned} \quad (10.29)$$

\* Иногда его называют гидродинамикой Чу — Гольдбергера — Лоу.

где, как и ранее,  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ ;  $\text{grad}_{\parallel} = (\mathbf{h} \text{ grad})$  — проекция градиента на направление магнитного поля. Подставляя (10.29) в (10.26), получаем

$$\mathbf{G} = -\text{grad}_{\perp} (H^2/8\pi) - (H^2/4\pi R^2)\mathbf{R}. \quad (10.30)$$

Первое слагаемое в (10.30) представляет собой поперечный градиент введенного в § 8.6 магнитного давления  $p_H = H^2/8\pi$ . Оно соответствует поперечным диагональным элементам тензора напряжений (10.28) и определяет электродинамическую силу, действующую на проводящую среду, в случае, когда силовые линии прямые ( $R \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{H} \perp \text{grad} H$ ). Действие этой силы можно описать как взаимное «расталкивание» силовых линий в поперечном направлении. Второе слагаемое определяет силу, направленную к центру кривизны силовых линий, и называется *натяжением магнитного поля*. Оно формально получается, если приписать силовым линиям свойства растянутой струны. Величина эквивалентной силы натяжения, действующей на силовые линии, проходящие через единицу площади, равна, как видно из (10.30),  $H^2/8\pi$ . Подставив силу (10.30) в уравнение равновесия (10.6), приведем его к виду

$$\text{grad} p + \text{grad}_{\perp} (H^2/8\pi) + (H^2/4\pi R^2)\mathbf{R} = 0. \quad (10.31)$$

Для случая, когда силовые линии прямые ( $R \rightarrow \infty$ ), уравнение сводится к постоянству суммы кинетического и магнитного давлений в плоскости, перпендикулярной магнитному полю:

$$p + H^2/8\pi = \text{const}. \quad (10.32)$$

Поскольку равенство (10.32) должно выполняться во всем объеме плазмы, оно описывает уменьшение магнитного поля от границы плазмы к области максимального кинетического давления. В частности, соотношение между магнитным полем вне плазмы ( $H_e$ ) и магнитным полем в области наибольшего давления ( $H_0$ ) приобретает вид

$$p_0 + H_0^2/8\pi = H_e^2/8\pi. \quad (10.33)$$

Это соотношение верно, очевидно, и для плазмы с резкой границей. В этом случае оно описывает равновесие границы при любой конфигурации магнитного поля, так как при конечном  $R$  последним слагаемым в (10.31) по сравнению с первым можно пренебречь.

Равенство (10.33) показывает, что максимальное давление плазмы, которое можно удерживать магнитным полем, равно магнитному давлению вне плазмы  $p_{\text{макс}} = H_e^2/8\pi$ . При описании магнитного удержания часто вводят коэффициент  $\beta$ , представляющий собой отношение давления удерживаемой плазмы к максимально возможному

$$\beta = p/p_{\text{макс}} = 8\pi r/H_e^2. \quad (10.34)$$

Этот коэффициент определяет эффективность использования магнитного поля для удержания плазмы.



При удержании оторванной от стенок плазменной конфигурации резкая граница плазмы, на которой имеется перепад магнитного поля, не может существовать сколь угодно долго. Она должна «размываться» в результате диффузионного процесса, обусловленного столкновениями. В рамках магнитогидродинамического описания взаимное «перемешивание» магнитного поля и плазмы должно проявляться в изменении напряженности магнитного поля. Оно описывается уравнением (10.20). Для неподвижной проводящей среды уравнение принимает вид

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta \mathbf{H}. \quad (10.35)$$

Это уравнение для каждой компоненты поля представляет собой неоднократно обсуждавшееся диффузионное с коэффициентом диффузии

$$D_H \approx c^2 / 4\pi\sigma. \quad (10.36)$$

Отсюда следует, что размывание резкого скачка можно описать, как *диффузию магнитного поля*, стремящуюся выровнять поле по обе стороны границы. Такое выравнивание поля обусловлено затуханием индукционных токов за счет конечной проводимости. Уравнение (10.35) позволяет оценить характерное время, за которое магнитное поле проникает на глубину  $L$  (время диффузии поля):

$$\Delta t_H \approx L^2 / D_H = 4\pi\sigma L^2 / c^2. \quad (10.37)$$

Соответственно глубина проникновения поля в среду за время  $\tau$  равна

$$\Delta s_H \approx \sqrt{D_H \tau} = \sqrt{c^2 \tau / 4\pi\sigma}. \quad (10.38)$$

Величину  $\Delta t_H$  называют *скин-временем*, а величину  $\Delta s_H$  — *толщиной скин-слоя*. Из приведенных соотношений видно, что диффузией магнитного поля в плазму можно пренебречь, если рассматриваемый процесс протекает настолько быстро, что глубина проникновения поля  $\Delta s_H$  за характерное время  $\tau$  много меньше характерных размеров плазмы  $L$ , т. е. когда выполняется неравенство

$$\tau \ll 4\pi\sigma L^2 / c^2 = (4\pi n e^2 / m_e c^2 \bar{v}_{ei}) L^2. \quad (10.39)$$

При описании изменения магнитного поля в плазме нельзя обычно рассматривать ее как неподвижную проводящую среду. Поэтому в уравнении (10.20) наряду с диффузионным слагаемым следует учитывать слагаемое, определяющее изменение магнитного поля, связанное с направленным движением. В стационарном состоянии (при  $\partial \mathbf{H} / \partial t = 0$ ) эти слагаемые должны компенсировать друг друга:

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H} + \text{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] = \text{rot} \left\{ \frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot} \mathbf{H} - [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] \right\} = 0. \quad (10.40)$$

Отсюда нетрудно найти поперечную скорость  $\dot{u}_\perp$ , соответствующую стационарному состоянию:

$$\mathbf{u}_\perp = \frac{c^2}{4\pi\sigma H^2} [\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}] = -\frac{c^2}{\sigma H^2} \mathbf{G}_H. \quad (10.41)$$

В этом выражении опущено слагаемое, описывающее движение в направлении, перпендикулярном градиенту концентрации и магнитного поля. Подставляя сюда выражение для  $\mathbf{G}_H$  (10.30) и учитывая уравнение равновесия (10.31), найдем

$$\mathbf{u}_\perp = -\frac{c^2 \text{grad}_\perp \rho}{\sigma H^2} = -\frac{c^2 (T_e + T_i)}{\sigma H^2}. \quad (10.42)$$

Используя формулу (9.124) для  $\sigma$ , получим окончательно

$$\mathbf{u}_\perp = -\frac{m_e c^2 (T_e + T_i) \bar{v}_{ei}}{e^2 H^2} \frac{\text{grad}_\perp n}{n} = -D_{e\perp} \frac{\text{grad}_\perp n}{n} \quad (10.43)$$

Эта формула совпадает с выражением (9.128), определяющим скорость диффузии полностью ионизованной плазмы. Таким образом, стационарное магнитное поле в плазме с конечной частотой столкновений может поддерживаться лишь при наличии стационарного диффузионного потока поперек поля.

Как отмечалось, при достаточно малых временах изменения параметров плазмы, при которых выполняется неравенство (10.39), диффузией магнитного поля можно пренебречь. При этом уравнение для магнитного поля (10.20) приобретает вид

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]. \quad (10.44)$$

Переход от (10.20) к (10.44) соответствует пределу  $\sigma \rightarrow \infty$  или  $\bar{v}_{ei} \rightarrow 0$ . Иногда в магнитной гидродинамике его называют пределом *идеальной проводимости*. Рассмотрим характер движения плазмы, описываемый уравнением (10.44). Для этого преобразуем (10.44) с помощью соотношения

$$\text{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] = (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{u} + \mathbf{u} \text{ div } \mathbf{H}. \quad (10.45)$$

Подставляя (10.45) в (10.44) и учитывая, что  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ , получаем

$$d\mathbf{H}/dt = (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{u} - \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{u}, \quad (10.46)$$

где введена полная производная  $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \text{ grad})$ . Сравним описываемое этим уравнением изменение напряженности поля с изменением плотности плазмы, следующим из уравнения непрерывности:

$$d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + (\mathbf{u} \text{ grad}) \rho = -\rho \text{ div } \mathbf{u}. \quad (10.47)$$

Исключая из уравнений (10.46) и (10.47)  $\text{div } \mathbf{u}$ , получаем

$$d\mathbf{H}/dt - (\mathbf{H}/\rho) d\rho/dt = (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{u} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \text{ grad} \right) \mathbf{u}. \quad (10.48)$$

Отсюда следует, что если направленная скорость постоянна вдоль  $\mathbf{H}$ , т. е. изменяется только при переходе с одной силовой линии на

другую, то при движении плазмы отношение напряженности магнитного поля к плотности вещества с течением времени сохраняется:

$$d(\mathbf{H}/\rho)/dt = 0. \quad (10.49)$$

Поскольку плотность силовых линий пропорциональна напряженности магнитного поля, это равенство интерпретируют как «вмороженность» силовых линий в плазму. Смысл вмороженности состоит в том, что при любых поперечных перемещениях и деформациях произвольного замкнутого контура, связанного с плазмой, магнитный поток, пронизывающий ограниченную этим контуром поверхность, остается неизменным. Плазма ведет себя при этом, как сверхпроводник. Разумеется, термин «вмороженность» не следует понимать буквально. Условие  $H/\rho = \text{const}$  не запрещает взаимных поперечных движений вещества и магнитного поля, например дрейфа плазмы в направлении, перпендикулярном градиенту плотности.

Эффект вмороженности магнитного поля существенно влияет на условия равновесия плазмы при быстром изменении внешних условий. Так, например, быстрое изменение внешнего магнитного поля приводит к нарушению равновесия, так как это поле не проникает в плазму. В результате границы плазмы начинают изменять свое положение — плазменный объем под действием избыточного магнитного давления сжимается при увеличении магнитного поля или расширяется под действием кинетического давления при уменьшении внешнего поля. В ходе этих процессов изменяются плотность плазмы и соответственно магнитное поле в плазме. В результате устанавливается новое равновесное состояние, при котором кинетическое давление равно перепаду магнитного давления. Параметры этого нового состояния зависят от конкретных условий процесса.

### § 10.3. Об устойчивости удержания плазмы магнитным полем

В § 10.2 были рассмотрены условия равновесия плазмы, удерживаемой магнитным полем. Однако равновесное состояние может оказаться неустойчивым по отношению к каким-либо малым возмущениям конфигурации плазмы, если равнодействующая сил, возникающая при нарушении равновесия, способствует росту возмущения. В этом случае длительное удержание плазмы в равновесии невозможно, так как случайно возникающие малые флуктуации должны нарастать со временем. Задача обеспечения устойчивости является обычно наиболее сложной при реализации того или иного способа удержания плазмы.

Анализ устойчивости плазмы по отношению к малым возмущениям может быть основан на решении системы уравнений, описывающих поведение плазмы. Обычно для описания конфигурационной неустойчивостей используются уравнения магнитной гидродинамики (поэтому эти неустойчивости называют еще *магнитогидродинамическими*). Форму возмущения конфигурации при таком

описании задают путем определения смещения элемента объема плазмы  $\xi(\mathbf{r})$ . Полагая это смещение малым по сравнению с характерными размерами, на которых изменяются параметры плазмы, и пренебрегая членами, квадратичными по  $\xi$ , можно получить линейное дифференциальное уравнение

$$\rho d^2 \xi / dt^2 = \mathcal{F}(\xi) = \check{K} \xi, \quad (10.50)$$

где  $\check{K}$  — дифференциальный оператор, включающий производные по координатам. Это уравнение аналогично уравнению малых колебаний. Величину  $\mathcal{F}(\xi)$  можно интерпретировать как квазиупругую силу, оператор  $\check{K}$  играет роль коэффициента упругости. Решение уравнения (10.50) при заданных граничных и начальных условиях находится методом разделения переменных. Зависимость каждого из частных решений от времени можно записать в комплексном виде

$$\xi = \xi_0(\mathbf{r}) \exp(i\omega t), \quad (10.51)$$

где, как и раньше, реальные смещения определяются действительной частью комплексного выражения. Зависимость частных решений от координат описывается уравнениями, которые получаются при подстановке (10.51) в (10.50):

$$\check{K} \xi = \omega^2 \rho \xi. \quad (10.52)$$

Это уравнение при заданных граничных условиях имеет, как известно, спектр собственных функций  $\xi_n(\mathbf{r})$  и спектр собственных значений  $K_n = \omega_n^2 \rho$ . Если величина  $\omega_n$ , определяемая собственным значением  $K_n$ , имеет отрицательную мнимую часть, то смещение  $\xi_n$  экспоненциально нарастает во времени [ $\xi_n \sim \sim \exp(-\text{Im}(\omega_n)t)$ ]. Это означает, что возмущение, описываемое функцией  $\xi_n(\mathbf{r})$ , приводит к раскату неустойчивости. Инкремент нарастания этой неустойчивости равен  $\gamma_n = -\text{Im}(\omega_n)$ .

Определим линеаризованное уравнение смещения для условий, когда неустойчивость плазмы может быть описана уравнениями идеальной магнитной гидродинамики (т. е. когда в уравнении (10.20) можно полагать проводимость плазмы бесконечной). Это обычно допустимо при рассмотрении наиболее опасных, быстро развивающихся неустойчивостей, поскольку характерные времена их роста много меньше скин-времени [см. (10.39)]. При таких условиях уравнения магнитной гидродинамики (10.25) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \partial \rho / \partial t &= -\text{div}(\rho \mathbf{u}); \quad \rho d\mathbf{u} / dt = -\text{grad } p - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}]; \\ \partial \mathbf{H} / \partial t &= \text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]; \quad dp / dt = \gamma(p/\rho) d\rho / dt, \end{aligned} \right\} \quad (10.53)$$

где  $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \text{ grad})$ ;  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты. В невозмущенном состоянии должно выполняться условие равновесия, т. е. сумма сил, действующих на плазму, равна нулю. Соответственно должна быть постоянной направленная скорость. Без ограни-

чения общности ее можно полагать равной нулю (это означает лишь выбор определенной системы отсчета).

Чтобы получить уравнения, описывающие возмущение, представим величины плотности, давления и магнитного поля в виде суммы равновесных значений и малых возмущений:

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}; p = p^{(0)} + p^{(1)}; \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)}. \quad (10.54)$$

Подставляя эти суммы в уравнения (10.53) и пренебрегая членами, квадратичными относительно возмущений (т. е. членами, в которые входят квадраты или произведения малых величин), получаем систему уравнений для возмущенных величин:

$$\left. \begin{aligned} \partial \rho^{(1)} / \partial t + \operatorname{div} (\rho^{(0)} \mathbf{u}) &= 0; & \rho^{(0)} \partial \mathbf{u} / \partial t &= -\operatorname{grad} p^{(1)} - \\ & - (1/4\pi) [\mathbf{H}^{(1)} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(0)}] - (1/4\pi) [\mathbf{H}^{(0)} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(1)}]; \\ \partial \mathbf{H}^{(1)} / \partial t &= \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}^{(0)}]; \\ \partial p^{(1)} / \partial t &= -(\mathbf{u} \operatorname{grad}) p^{(0)} + \gamma p^{(0)} \operatorname{div} \mathbf{u}, \end{aligned} \right\} \quad (10.55)$$

где учтено, что направленная скорость  $\mathbf{u}$  является возмущением, поскольку  $\mathbf{u}^{(0)} = 0$ . Вместо скорости  $\mathbf{u}$  введем теперь смещение, полагая  $\mathbf{u} = \partial \xi / \partial t$ . Тогда уравнения для возмущений  $\rho$ ,  $H$  и  $p$  могут быть проинтегрированы по времени:

$$\left. \begin{aligned} \rho^{(1)} &= -\operatorname{div} (\rho^{(0)} \xi); & p^{(1)} &= -\xi \operatorname{grad} p^{(0)} + \gamma p^{(0)} \operatorname{div} \xi; \\ \mathbf{H}^{(1)} &= \operatorname{rot} [\xi \times \mathbf{H}^{(0)}]. \end{aligned} \right\} \quad (10.56)$$

Подставляя эти выражения в уравнения для  $\mathbf{u}$ , получаем

$$\begin{aligned} \rho \partial^2 \xi / \partial t^2 &= \operatorname{grad} [(\xi \operatorname{grad}) p - \gamma p \operatorname{div} \xi] + \\ &+ (1/4\pi) \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \operatorname{rot} [\xi \times \mathbf{H}]] + \\ &+ (1/4\pi) [\operatorname{rot} (\operatorname{rot} [\xi \times \mathbf{H}]) \times \mathbf{H}], \end{aligned} \quad (10.57)$$

где для сокращения записи опущены индексы (0) у величин, характеризующих равновесное состояние. Дифференциальное уравнение второго порядка (10.57) и есть уравнение смещения, которое было символически записано в виде (10.50). Правая часть уравнения представляет собой квазиупругую силу  $\mathcal{F}(\xi)$ , возникающую при малых смещениях; она определяет оператор  $\mathbf{K}$ . Уравнение для смещения (10.57) должно быть дополнено граничными условиями. Одно из них получается из требования постоянства суммы кинетической и магнитного давлений  $p + H^2/8\pi$  на границе плазма — вакуум. Другое находится из условий непрерывности нормальной составляющей магнитного поля на границе — она должна обращаться в нуль, поскольку в плазме с бесконечной проводимостью магнитное поле должно быть параллельно границе.

Как видно, уравнение для смещения в общем случае достаточно сложное, и его решение удастся найти лишь для простых конфигураций плазмы. Однако можно исследовать вопрос об устойчивости удерживаемой плазмы и не находя решений уравнения. Для такого

анализа обычно используется вариационный принцип, называемый энергетическим. Этот принцип аналогичен условию минимума потенциальной энергии для устойчивых механических систем. В рассматриваемом случае также можно ввести эффективную потенциальную энергию. Поскольку в уравнение для смещения (10.50) входит сила, линейно зависящая от смещения  $\mathcal{F}(\xi) = -\check{K}\xi$ , изменение потенциальной энергии каждого элемента при смещении определяется, очевидно, интегралом произведения этой силы на смещение  $\int_0^{\xi} \mathcal{F} d\xi = (1/2)\xi\mathcal{F}$ . Суммирование этой величины по всему объему дает

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \xi \mathcal{F}(\xi) dV = \frac{1}{2} \int \xi \check{K} \xi dV. \quad (10.58)$$

Если  $\delta W > 0$ , т. е. смещение  $\xi(\mathbf{r})$  приводит к увеличению потенциальной энергии, система устойчива, в противном случае она неустойчива по отношению к рассматриваемому возмущению. Подставляя в интеграл (10.58) силу  $\mathcal{F}$  из уравнения (10.57) и учитывая граничные условия, можно после некоторых преобразований привести его к следующему общему виду:

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{1}{2} \int_{V_i} \left\{ \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} [\xi \times \mathbf{H}])^2 + \xi \operatorname{grad} p \operatorname{div} \xi - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi} [\xi \times \operatorname{rot} \mathbf{H}] \operatorname{rot} [\xi \times \mathbf{H}] \right\} dV + \frac{1}{8\pi} \int_{(V_e)} H^2 dV - \\ & - \frac{1}{2} \int_S \left[ \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\partial H_i^2}{\partial \eta} - \frac{\partial H_e^2}{\partial \eta} \right) \right] \xi_\eta^2 dS, \end{aligned} \quad (10.59)$$

где первый интеграл берется по объему плазмы, второй — по внешнему (вакуумному) объему, третий — по поверхности, ограничивающей плазму; производные  $\partial/\partial\eta$  в последнем интеграле взяты по нормали к поверхности;  $\xi_\eta$  — проекция смещения  $\xi$  на нормаль. Именно это выражение для потенциальной энергии используется обычно при анализе устойчивости с помощью энергетического принципа. Уравнение (10.52)  $\check{K}\xi = \omega^2\rho\xi$  в силу самосопряженности оператора  $\check{K}$  может быть получено из вариационного принципа

$$\delta(\omega^2) = 0, \quad \omega^2 = \int \xi \check{K} \xi dV / \int \rho \xi^2 dV = 2\delta W / \int \rho \xi^2 dV. \quad (10.60)$$

Этот принцип позволяет находить частоты собственных колебаний или инкременты неустойчивостей без решения уравнений. Из написанного выражения следует также, что в рассматриваемом случае величина  $\omega^2$  всегда действительна. При  $\delta W > 0$  частота  $\omega$  действительна и колебания смещения не возрастают (при учете диссипации они затухают). При  $\delta W < 0$  величина  $\omega^2$  отрицательна; в этом

случае имеется решение, соответствующее экспоненциальному нарастанию возмущения с инкрементом  $\gamma = |\omega|$ .

Линеаризованное уравнение смещений (10.57) и следующий из него энергетический принцип описывают линейную стадию неустойчивости, при которой смещения много меньше характерных размеров. Чтобы определить, к чему приводит развитие магнито-гидродинамической неустойчивости, необходимо решить нелинейную задачу. Решение удастся найти только для некоторых простых случаев. Иногда оказывается полезным феноменологический подход, основанный на аналогии с обычной гидродинамикой. Не имея возможности останавливаться на этом, укажем лишь, что обычно быстро развивающиеся неустойчивости приводят к резкому ухудшению удержания плазмы: скорость ухода плазмы поперек поля может достигать значений порядка тепловой скорости ионов.

С помощью уравнений для смещения и энергетического принципа к настоящему времени удалось проанализировать условия возникновения основных магнито-гидродинамических неустойчивостей, ограничивающих удержание плазмы в магнитных ловушках. Этому анализу посвящены многие монографии и обзоры (см. разд. 4 списка литературы). Систематическое изложение вопросов, связанных с устойчивостью плазмы, выходит за рамки настоящей книги. Ниже будут рассмотрены только некоторые характерные неустойчивости, причем основное внимание будет уделено качественному обсуждению процессов, приводящих к росту возмущений.

#### § 10.4. Устойчивость границы плазмы в магнитном поле

Рассмотрим количественно сравнительно простую задачу об устойчивости плоской границы плазмы в поле постоянной силы (такой силой может быть, в частности, сила тяжести). Пусть плазма

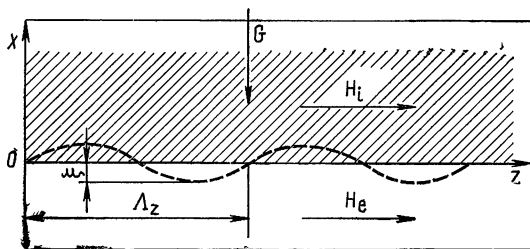


Рис. 10.1

с постоянной плотностью заполняет полупространство  $x > 0$  (рис. 10.1), причем на единицу объема плазмы действует сила  $\mathbf{G}$ , направленная к границе. Магнитные поля внутри плазмы  $\mathbf{H}_i$  и вне плазмы  $\mathbf{H}_e$  будем полагать направленными параллельно границе и однородными ( $\mathbf{H}_i = \text{const}$  и  $\mathbf{H}_e = \text{const}$ ). Эти поля не равны и не обязательно параллельны друг другу. Условия равновесия в объе-

ме плазмы сводятся при этом к равенству внешней силы и градиента давления

$$\mathbf{G} = -\text{grad } p, \quad G = dp/dx. \quad (10.61)$$

Давление на границе плазмы должно уравниваться перепадом магнитного давления:

$$p_g = H_{zg}^2/8\pi - H_{yg}^2/8\pi. \quad (10.62)$$

Исследуем устойчивость равновесия по отношению к малым возмущениям. Поскольку система однородна по координатам  $y$  и

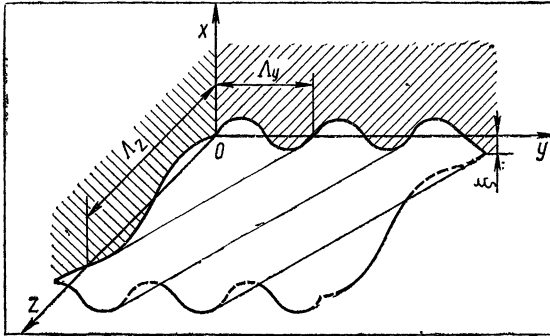


Рис. 10.2

$z$ , будем искать все возмущения (смещения, возмущения поля и давления) в виде периодических функций этих координат:

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z, t) &= \text{Re} [\xi(x) \exp [i(k_y y + k_z z - \omega t)]]; \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= \text{Re} [\mathbf{H}(x) \exp [i(k_y y + k_z z - \omega t)]] \end{aligned} \quad (10.63)$$

и т. д. Входящий в них волновой вектор  $\mathbf{k}$  ( $k_y, k_z$ ) определяет ориентацию и размеры возмущений; длина волны  $\Lambda = 2\pi/k$  характеризует их ширину, величины  $\Lambda_y = 2\pi/k_y$  и  $\Lambda_z = 2\pi/k_z$  — размеры в направлении  $y$  и  $z$  (рис. 10.1 и рис. 10.2, изображающий участок возмущенной поверхности).

Воспользуемся уравнениями для возмущений (10.56) и (10.57). Для простоты рассмотрим такие возмущения, при которых плотность плазмы не изменяется, т. е. используем приближение несжимаемой жидкости. Можно показать, что оно позволяет правильно определить границы устойчивости и характеристики возмущений вблизи границы. Поэтому будем считать

$$\rho^{(1)} = \text{div} (\rho^{(0)} \xi) = 0 \quad (10.64)$$

или, поскольку  $\rho^{(0)} = \text{const}$ ,

$$\text{div } \xi = 0. \quad (10.65)$$



Уравнение (10.56) для возмущенного магнитного поля в плазме при учете постоянства невозмущенного поля принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i^{(1)} &= \text{rot} [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{H}_i^{(0)}] = \mathbf{H}_i^{(0)} \text{div} \boldsymbol{\xi} + (\mathbf{H}_i^{(0)} \text{grad}) \boldsymbol{\xi} = \\ &= (\mathbf{H}_i^{(0)} \text{grad}) \boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Учитывая зависимость смещения от координат (10.63), получаем

$$\mathbf{H}_i^{(1)} = i(\mathbf{k}; \mathbf{H}_i^{(0)}) \boldsymbol{\xi}. \quad (10.66)$$

Уравнение для смещения (10.57) можно записать в виде

$$\rho d^2 \boldsymbol{\xi} / dt^2 = -\text{grad} \mathcal{P}^{(1)} + (1/4\pi)(\mathbf{H}_i^{(0)} \text{grad}) \mathbf{H}_i^{(1)}, \quad (10.67)$$

где введено суммарное давление

$$\mathcal{P} = p + H^2/8\pi, \quad (10.68)$$

причем  $\mathcal{P}^{(1)}$  представляет собой его возмущение. Учитывая зависимость возмущения от координат и времени (10.63) и подставляя в (10.67) уравнение поля (10.66), находим

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\text{grad} \mathcal{P}^{(1)}}{\rho\omega^2 - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{kH}_i^{(0)})^2}. \quad (10.69)$$

Подставляя это смещение в (10.65), получаем уравнение Лапласа для  $\mathcal{P}^{(1)}$

$$\Delta \mathcal{P}^{(1)} = \partial^2 \mathcal{P}^{(1)} / \partial x^2 - k^2 \mathcal{P}^{(1)} = 0. \quad (10.70)$$

Его решение вида (10.63), обращающееся в нуль при  $x \rightarrow \infty$ , есть

$$\mathcal{P}^{(1)} = C_i \rho \exp(-kx) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (10.71)$$

где  $k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ ;  $C_i$  — постоянная. Подстановка этого решения в (10.69) дает смещение, а подстановка в (10.66) — возмущение магнитного поля во внутренней области (при  $x > 0$ ).

Найдем теперь возмущение поля во внешней области при  $x < 0$ . Поскольку в этой вакуумной области токи отсутствуют, т. е.  $\text{rot} \mathbf{H}_e = 0$ , введем скалярный магнитный потенциал, определяющий возмущение магнитного поля:

$$\mathbf{H}_e^{(1)} = \text{grad} \Psi. \quad (10.72)$$

Он должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\text{div} \mathbf{H}_e^{(1)} = \Delta \Psi = 0. \quad (10.73)$$

Решение уравнения типа (10.63), обращающееся в нуль при  $x \rightarrow -\infty$ , имеет вид [ср. (10.71)]

$$\Psi = C_e \exp(kx) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \quad (10.74)$$

Равенства (10.72), (10.74) дают, таким образом, возмущение поля во внешней области.

Полученные решения для внешней и внутренней областей следует теперь «сшить» на границе плазмы при  $x = 0$ . Граничное условие для магнитного поля сводится к обращению в нуль нормальной компоненты поля на возмущенной границе. Учитывая малость возмущения, можно представить его следующим образом:

$$(\eta \mathbf{H}_e) = \eta^{(1)} \mathbf{H}_e^{(0)} + \eta^{(0)} \mathbf{H}_e^{(1)} = 0, \quad (10.75)$$

где  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^{(0)} + \boldsymbol{\eta}^{(1)}$  — единичный вектор нормали к поверхности.

Поправку  $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$  можно связать со смещением  $\xi_x$ . С помощью рис. 10.3 находим  $\eta_z^{(1)} = 2 \sin(\alpha/2) \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \partial \xi_x / \partial z$ , или в векторной форме

$$\boldsymbol{\eta}^{(1)} = -\operatorname{grad}_t \xi_x, \quad (10.76)$$

где  $\operatorname{grad}_t$  — проекция градиента на невозмущенную границу. Учитывая последнее соотношение, преобразуем граничное условие (10.75)

$$H_{ex}^{(1)} = (\mathbf{H}_e^{(0)} \operatorname{grad}) \xi_x. \quad (10.77)$$

Подставляя  $H_{ex}^{(1)} = \partial \Psi / \partial x$  [см. (10.72), (10.74)] и  $\xi_x$  [см. (10.69), (10.71)] в (10.77), получаем соотношение между  $C_e$  и  $C_i$ :

$$C_e = -i \frac{(\mathbf{kH}_e)}{\omega^2 - (\mathbf{kH}_i)^2 / 4\pi\rho} C_i. \quad (10.78)$$

Второе граничное условие определяется непрерывностью суммарного давления  $\mathcal{P}$  при переходе через границу. Давление на смещенной границе можно найти с помощью соотношения

$$\mathcal{P}_g + \xi \operatorname{grad} \mathcal{P}_g = \mathcal{P}_g^{(0)} + \mathcal{P}_g^{(1)} + \xi \operatorname{grad} \mathcal{P}_g^{(0)},$$

где величины  $\mathcal{P}_g$ ,  $\mathcal{P}_g^{(0)}$ ,  $\mathcal{P}_g^{(1)}$  определены на невозмущенной границе и опущено малое квадратичное слагаемое  $\xi \operatorname{grad} \mathcal{P}_g^{(1)}$ . Это соотношение позволяет записать условие непрерывности суммарного давления в виде

$$\mathcal{P}_{ge}^{(1)} + \xi \operatorname{grad} \mathcal{P}_{ge}^{(0)} = \mathcal{P}_{gi}^{(1)} + \xi \operatorname{grad} \mathcal{P}_{gi}^{(0)},$$

или

$$\mathcal{P}_{gi}^{(1)} - \mathcal{P}_{ge}^{(1)} = -\xi \operatorname{grad} \mathcal{P}_{gi}^{(0)} = \xi_x G, \quad (10.79)$$

где мы учли условия равновесия (10.61), (10.62). Величины  $\mathcal{P}_{gi}^{(1)}$  и  $\xi_x$  на границе (при  $x = 0$ ) удовлетворяют соответственно (10.71) и (10.69). Величина  $\mathcal{P}_{ge}^{(1)}$  связана с внешним полем следующим образом:

$$\mathcal{P}_{ge}^{(1)} = (H_e^2 / 8\pi)^{(1)} = \mathbf{H}_e \mathbf{H}_e^{(1)} / 4\pi = (1/4\pi)(\mathbf{H}_e \operatorname{grad}) \Psi. \quad (10.80)$$

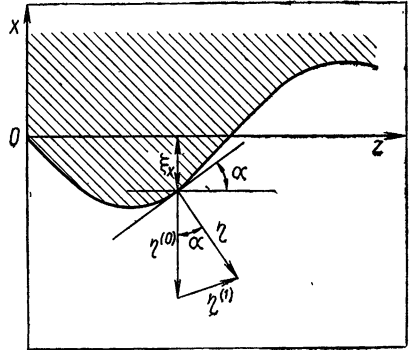


Рис. 10.3

Учитывая (10.80) и (10.74), находим с помощью (10.79) второе соотношение для коэффициентов  $C_i$  и  $C_e$ :

$$\rho C_i = -\frac{i}{4\pi} (\mathbf{kH}_e) C_e = \frac{kC_i}{\rho\omega^2 - (\mathbf{kH}_i)^2/4\pi} G. \quad (10.81)$$

Исключая из (10.78) и (10.81) постоянные  $C_i$  и  $C_e$ , получаем дисперсионное соотношение для  $\omega$ :

$$\rho\omega^2 = -kG + (\mathbf{kH}_e)^2/4\pi + (\mathbf{kH}_i)^2/4\pi. \quad (10.82)$$

Формула (10.82) позволяет найти условия устойчивости границы плазмы, частоту колебаний возмущения и инкремент нарастания неустойчивостей. Область устойчивости, как отмечалось, соответствует действительным значениям  $\omega$ , т. е. положительной правой части (10.82). Поэтому абсолютная устойчивость границы плазмы возможна, только если внешняя сила отсутствует или направлена от границы внутрь плазмы. При силе, направленной наружу, возможность возникновения неустойчивостей с различными  $\mathbf{k}$  зависит от соотношения между отрицательным слагаемым равенства (10.82) и положительными слагаемыми, определяющими стабилизирующий фактор. Для случая, когда магнитные поля снаружи и внутри параллельны ( $\mathbf{H}_e \parallel \mathbf{H}_i$ ), положительные слагаемые обращаются в нуль при  $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ . Поэтому граница плазмы неустойчива по отношению к возмущениям, вытянутым вдоль магнитного поля. Такая неустойчивость называется *желобковой*. В соответствии с (10.82) инкремент ее нарастания равен

$$\gamma = i\omega = \sqrt{kG/\rho}. \quad (10.83)$$

Он увеличивается с ростом  $k$ , т. е. с уменьшением размеров желобков\* ( $\Lambda = 2\pi/k$ ). В случае, когда внешнее магнитное поле не параллельно внутреннему, стабилизирующие члены (10.82) отличны от нуля. Отсюда следует, что «перекрещенность» магнитных полей (шир) является стабилизирующим фактором. Однако и при наличии перекрещенности дисперсионное соотношение (10.82) свидетельствует о существовании неустойчивостей с достаточно малыми  $k$ , поскольку величина стабилизирующего слагаемого пропорциональна  $k^2$ . Величина  $k$  в системе, имеющей конечные размеры, не может быть как угодно малой. Обычно максимальная длина волны возмущения равна удвоенной длине системы, т. е.

$$k_{\min} = \pi/L. \quad (10.84)$$

Это условие соответствует «закрепленным концам», например обращению в нуль смещения на границе плазмы. Полагая  $k > k_{\min}$ ,

\* Заметим, что при очень малых размерах, т. е. при больших  $k$ , начинают действовать неучитывавшиеся стабилизирующие факторы, связанные с конечной частотой столкновений, в частности поперечная диффузия.

получаем из (10.82) условие устойчивости границы для случая, когда  $\mathbf{H}_i \perp \mathbf{H}_e$ :

$$H_i^2/4\pi > (G/k)_{\text{макс}} = GL/\pi. \quad (10.85)$$

Обсудим теперь физический механизм неустойчивости границы плазмы в поле внешней силы для предельных случаев большого и малого давления плазмы. При большом давлении, когда  $\beta = = 8\pi\rho/H_e^2 = 1$ , магнитное поле внутри плазмы равно нулю. Образование желобков, вытянутых вдоль магнитного поля, в этом случае сопровождается перетеканием плазмы в направлениях, обозначенных на рис. 10.4 стрелками. Наличие силы  $\mathbf{G}$  приводит к тому, что давление плазмы на выступающие участки поверхности будет больше,

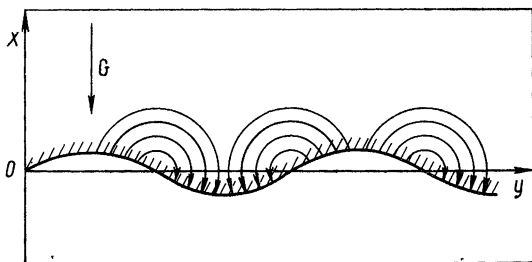


Рис. 10.4

чем удерживающее магнитное давление, а на вогнутые — меньше. В результате возмущение нарастает. Неустойчивость аналогична неустойчивости Рэля — Тейлора, возникающей при помещении тяжелой жидкости над легкой, причем роль тяжелой жидкости играет плазма, роль легкой — магнитное поле. Нетрудно, исходя из качественной картины, оценить инкремент нарастания желобковой неустойчивости. Увеличение давления в области желобка определяется, очевидно, работой силы  $G$ . Приблизительно можно записать  $\Delta p \approx \xi G$ . Это дополнительное давление действует на единицу площади поверхности плазмы, вызывая ее ускоренное движение. Смещение элемента поверхности при выполнении условия несжимаемости вещества должно сопровождаться противоположным смещением другого элемента. При этом, как легко убедиться, глубина, на которую распространяется возмущение, имеет масштаб  $\Lambda \sim 1/k$  (см. рис. 10.4). Поэтому уравнение движения единицы поверхности желобка можно приблизительно записать в виде

$$(\rho/k)d^2\xi/dt^2 = \Delta p = \xi G. \quad (10.86)$$

Уравнение дает экспоненциальное нарастание возмущения с инкрементом (10.83). Уменьшение инкремента с ростом длины волны в рассматриваемом случае связано с увеличением размеров области возмущения, приводящим к росту массы вещества, участвующего в движении.

Приведенная оценка дает инкремент нарастания желобка, вытянутого вдоль магнитного поля. При другой ориентации рост возмущения затруднен из-за искажения магнитного поля. Поскольку поле не может проникать в плазму с бесконечной проводимостью, появление возмущений, ориентированных под углом к полю, приводит к изгибу силовых линий магнитного поля (рис. 10.5). Изгиб вызывает появление силы натяжения

$$G_R = \frac{H^2}{4\pi R} \approx \frac{H^2}{4\pi} \left| \frac{d^2 \xi}{dz^2} \right| = \frac{H^2}{4\pi} k_z^2 \xi, \quad (10.87)$$

препятствующей развитию возмущения (здесь ось  $z$  направлена вдоль невозмущенного магнитного поля). При достаточно больших  $k_z$  сила натяжения настолько велика, что неустойчивость вообще не может развиваться.

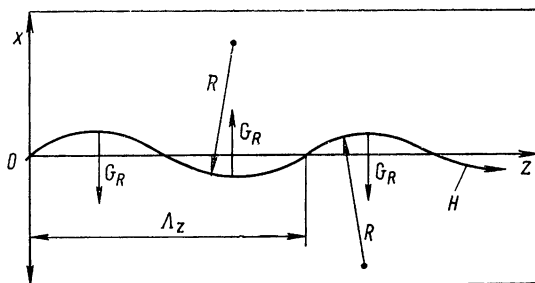


Рис. 10.5

Рассмотрим теперь микроскопическую картину желобковой неустойчивости при малых давлениях плазмы ( $\beta = 8\pi\rho/H^2 \ll 1$ ), при которых магнитное поле внутри плазмы практически совпадает с внешним. Под действием силы  $\mathbf{G}$  заряженные частицы плазмы дрейфуют в направлении, перпендикулярном магнитному полю в силе. В отсутствие возмущений такой дрейф параллелен границе плазмы и не приводит к изменению концентрации. При наличии желобковых возмущений дрейф вызывает накопление ионов на одном склоне желобка и электронов — на другом (рис. 10.6). Электрическое поле поляризации вызывает дрейф плазмы в целом в направлении возрастания возмущения. Этот дрейф и определяет скорость нарастания неустойчивости. Нетрудно оценить эту скорость, рассматривая движение отдельных заряженных частиц в области возмущения. Скорость дрейфа электронов и ионов зависит от действующих на них сил. В соответствии с (8.26)

$$u_{di} = cF_i/eH, \quad u_{de} = cF_e/eH, \quad (10.88)$$

причем  $\mathbf{u}_{di}$  направлена в сторону  $[\mathbf{F} \times \mathbf{h}]$ , т. е. в сторону оси  $y$ ;  $\mathbf{u}_{de}$  — в противоположную сторону. Движение электронов и ионов

приводит к накоплению зарядов на склонах желобков. Скорость накопления зарядов на единице поверхности приближенно равна

$$\partial P / \partial t \approx en\xi (u_{di} + u_{de}) / \Lambda \approx ck\xi G / H, \quad (10.89)$$

где  $\Lambda \approx 1/k$  характеризует ширину возмущения в направлении  $y$ ;  $G = n(F_e + F_i)$ . Поверхностная плотность заряда  $P$  на границах желобков создает в плазме электрическое поле, имеющее порядок

$$E_y \approx 4\pi P / \epsilon, \quad (10.90)$$

где  $\epsilon = 1 + 4\pi rc^2 / H^2 \approx 4\pi rc^2 / H^2$  — эффективная электрическая проницаемость плазмы [см. (8.70)]. Электрическое поле вызывает

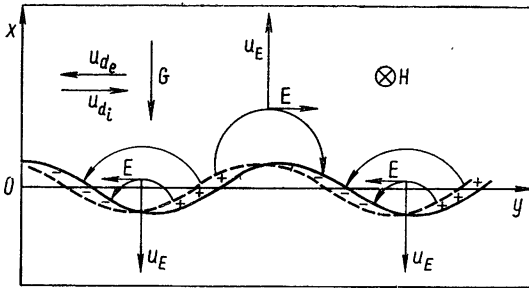


Рис. 10.6

совместный дрейф электронов и ионов, параллельный действующей силе, со скоростью

$$u_x = d\xi / dt = cE_y / H = 4\pi cP / \epsilon H \approx HP / cr. \quad (10.91)$$

Дифференцируя это равенство по времени и учитывая (10.89), получаем уравнение для смещения

$$d^2\xi / dt^2 \approx (H/cr) \partial P / \partial t \approx (kG/r)\xi. \quad (10.92)$$

Из него следует экспоненциальное нарастание смещения с инкрементом (10.83). Отметим, что следующее из (10.92) уменьшение инкремента с увеличением длины волны  $\Lambda \sim 1/k$  обусловлено уменьшением скорости накопления заряда на поверхности желобка при больших его размерах [см. (10.89)].

Мы рассмотрели развитие желобковой неустойчивости границы плазмы под действием постоянной силы. В плазме космических объектов такой силой может быть сила тяжести (неустойчивость в этом случае называют *гравитационной*). В лабораторной плазме сила тяжести не играет большой роли, однако могут существовать другие источники желобковой неустойчивости. Среди них наиболее распространенным является неоднородность магнитного поля. В неоднородном поле на плазму действует сила, направленная против градиента поля. Эта сила, обусловленная диамагнитными свой-

ствами плазмы, приводит к развитию неустойчивости, выталкивающей плазму в область слабого поля.

В случае большого давления плазмы, соответствующего  $\beta_{\text{макс}} = 8\pi\rho/H_z^2 = 1$  (магнитное поле внутри плазмы отсутствует), неоднородность внешнего поля создает на границе эффективную силу, равную градиенту магнитного давления:

$$\mathbf{G} = -\text{grad} (H^2/8\pi). \quad (10.93)$$

Если эта сила направлена по нормали к поверхности плазмы, т. е. магнитное поле убывает в направлении нормали, может возникнуть неустойчивость. Условие нарастания возмущения получим, подставляя (10.93) в (10.82). Его можно представить в виде неравенства

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{H^2}{8\pi} \right) > \frac{1}{4\pi} \frac{k_z^2 H^2}{k}, \quad (10.94)$$

означающего, что градиент магнитного давления в направлении нормали ( $\eta$ ) превышает стабилизирующую силу натяжения силовых линий магнитного поля. Неравенство (10.94) показывает, что неустойчивы не только желобковые возмущения с  $k_z = 0$ , но и возмущения с конечными  $k_z$ . Из (10.94) получаем следующие ограничения:

$$k_z < \sqrt{k/L}, \quad \Lambda_z > \sqrt{2\pi L \Lambda}, \quad (10.95)$$

где  $L = |[1/(H)\partial H/\partial \eta]^{-1}|$  — характерная длина, на которой спадает магнитное поле;  $\Lambda = 2\pi/k$ ;  $\Lambda_z = 2\pi/k_z$ . Неустойчивые возмущения при  $\Lambda \ll L$  представляют собой «языки», вытянутые вдоль магнитного поля. Однако длина их в направлении поля ( $\Lambda_z$ ) может быть много меньше характерных размеров плазмы (имеющих порядок  $L$ ). Поэтому неустойчивость границы плазмы носит локальный характер и определяется локальным направлением градиента магнитного поля. Она может развиваться на участках границы, на которых магнитное поле убывает в направлении нормали. Из сказанного следует, что для обеспечения устойчивости границы плазмы при  $\beta = 1$  необходимо, чтобы магнитное поле нарастало от границы плазмы во всех точках поверхности, т. е. чтобы плазма была помещена в область минимума магнитного поля.

При малых давлениях плазмы, при которых  $\beta = 8\pi\rho/H^2 \ll 1$ , энергия, запасенная в плазме, много меньше энергии магнитного поля. Поэтому неустойчивости, вызванные неоднородностью, не могут приводить к существенному возмущению равновесного поля (затраты энергии на такие возмущения нельзя скомпенсировать перераспределением плазмы в пространстве). Соответственно неустойчивыми могут быть лишь желобковые возмущения, вытянутые вдоль магнитного поля. Эффективная сила, вызывающая неустойчивости в неоднородном поле, является суммой сил, действующих на отдельные заряженные частицы (см. § 8.4): центробежной силы  $F_R = mv_{\parallel}^2/R$  и диамагнитной силы  $F_{\mu} = mv_{\perp}^2/2H |\text{grad}_{\perp} H| = mv_{\perp}^2/2R$

(для случая, когда силовые линии — плоские кривые). Суммируя эти силы для электронов и ионов, находящихся в единице объема, и усредняя по скоростям, получаем

$$\mathbf{G} = n(\langle F_e \rangle + \langle F_i \rangle) \approx 2n (T_e + T_i)/R = 2p/R, \quad (10.96)$$

где мы положили  $m\langle v_{a\parallel}^2 \rangle = m\langle v_{a\perp}^2 \rangle/2 = T_a$ . Направление силы  $\mathbf{G}$ , как и направление  $\mathbf{F}_R$  и  $\mathbf{F}_\mu$ , совпадает с направлением кривизны силовых линий. В случае, когда сила повсюду направлена от границы внутрь, плазма устойчива. Если сила направлена наружу, то она способствует развитию неустойчивости. Отметим, что в отличие от предела  $\beta = 1$  критерий желобковой неустойчивости при  $\beta \ll 1$  не является локальным. Развитие неустойчивости определяется величиной и направлением эффективной силы, усредненной по длине силовой линии.

Развитие желобковой неустойчивости в плазме с  $\beta < 1$  можно представить себе, как результат перестановки силовых трубок магнитного поля, заполненных плазмой. При этом напряженность магнитного поля и форма силовых линий остаются прежними, а объем и давление плазмы в трубках изменяются. Соответственно изменяется и энергия, запасенная в системе плазма — магнитное поле. Анализируя изменение энергии, можно найти условия, при которых возникают неустойчивости, связанные с перестановкой силовых трубок для различных конфигураций магнитного поля (эту неустойчивость часто называют *перестановочной*).

Объем силовой трубки магнитного поля равен [см. (8.7)]

$$V = \int_{(i)} S dl = \Phi \int_{(i)} dl/H, \quad (10.97)$$

где  $\Phi = HS$  — магнитный поток, пронизывающий сечение трубки;  $\int_{(i)} dl/H$  — так называемый удельный объем; интеграл берется по всей длине силовой трубки\*. Энергия плазмы, запасенная в этом объеме, определяется произведением объема на давление плазмы  $W = pV$ . Силовая трубка с плазмой стремится переместиться так, чтобы расшириться. Если она окружена «пустыми» трубками, то при перестановке, сопровождающейся увеличением объема трубки с плазмой, происходит уменьшение внутренней энергии. В случае, когда соседние силовые трубки заполнены плазмой, но давление в них меньше, чем в выделенной, перестановка с увеличением объема этой трубки также энергетически выгодна. Наоборот, силовая трубка, окруженная плазмой большего давления, имеет тенденцию сместиться туда, где ее объем меньше, так как при этом энергия, запасенная во всей системе, уменьшается: увеличение

\* Интеграл строго определен лишь для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями. Для открытых конфигураций приближенно можно считать, что пределы интегрирования ограничивают область, в которой находится плазма.



энергии  $\delta(Vp_1)$ , связанное со сжатием выделенной трубки, не может компенсировать уменьшение энергии  $\delta(Vp_2)$  соседней трубки, занявшей ее место. Перемещение силовой трубки с плазмой можно уподобить движению капли жидкости с плотностью, пропорциональной  $p_1$ , взвешенной в другой жидкости с плотностью, пропорциональной  $p_2$  и находящейся в эффективном гравитационном поле, потенциал которого растет с уменьшением объема трубки:  $U = -\int dl/H$ . Капля окажется «тонущей» или «всплывающей» в зависимости от соотношения  $p_1$  и  $p_2$ . Эта аналогия показывает, что перестановка силовых трубок с плазмой в неоднородном магнитном поле подобна конвекции неоднородной жидкости в поле силы тяжести. Поэтому перестановочную неустойчивость называют также *конвективной*.

Сформулируем критерий перестановочной неустойчивости при  $\beta \ll 1$ . В состоянии равновесия на поверхности постоянного давления ( $p = \text{const}$ ) энергия также должна быть постоянна:  $pV = p\Phi \int dl/H = \text{const}$ . Поэтому равновесное давление  $p$  можно рассматривать как функцию  $U = -\int dl/H$ . Анализируя устойчивость такого равновесия, предположим, что некоторая силовая трубка с плазмой смещается на малое расстояние, раздвигая остальные трубки. Если за время смещения обмен энергией с остальной плазмой не успевает произойти, т. е. давление в трубке изменяется адиабатически ( $p \sim V^{-\gamma}$ ), то изменение давления можно связать с изменением величины эффективного потенциала  $U$ :

$$\delta p = -\gamma p \delta V/V = -\gamma p \delta U/U \quad (10.98)$$

( $\gamma$  — показатель адиабаты). В то же время давление в трубках, окружающих смещенную трубку, равно

$$p(U + \delta U) = p + \frac{dp}{dU} \delta U; \quad \Delta p = \frac{dp}{dU} \delta U. \quad (10.99)$$

Сопоставляя давление в смещенной трубке и окружающее давление, можно определить, будет ли смещение нарастать. Для того чтобы оно нарастало при  $\delta U < 0$  (т. е. при расширении плазмы), давление окружающей плазмы должно быть меньше давления в трубке ( $\Delta p < \delta p$ ); при  $\delta U > 0$  должно выполняться обратное соотношение ( $\Delta p > \delta p$ ). Таким образом, условие устойчивости можно записать в виде

$$\frac{dp}{dU} < \frac{\gamma p}{|U|}, \quad U = -\int \frac{dl}{H} \quad (10.100)$$

(критерий Кадомцева)\*. Этот критерий может быть уточнен, если известна конфигурация магнитного поля. Например, в случае,

\* Строго говоря, этот критерий применим для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями, для которых однозначно определен интеграл, входящий в  $U$ ; для открытых магнитных ловушек необходимо учитывать влияние анизотропии давления.

когда поле создается линейным током ( $H \sim 1/r$  и  $|U| = \int_0^{2\pi} r d\varphi / H \sim r^2$ ), критерий устойчивости сводится к условию

$$|dp/dr| < 2\gamma p/r, \quad (10.101)$$

дающему максимальный градиент давления в случае, когда давление увеличивается с ростом  $U$ . Плазма с резкой границей устойчива лишь тогда, когда давление уменьшается с ростом  $U = - \int dl/H$ , т. е. если плазма помещена в область минимума  $U$ . В магнитных конфигурациях, в которых длины силовых линий приблизительно одинаковы, минимум  $U$  соответствует минимуму магнитного поля. В более сложных конфигурациях, в частности в конфигурациях с замкнутыми силовыми линиями, минимум  $U = - \oint dl/H$  может соответствовать минимуму усредненной по силовой линии напряженности магнитного поля (так называемый *средний минимум поля*).

Необходимость обеспечить устойчивость плазмы по отношению к желобковым возмущениям требует, таким образом, помещения плазмы в область минимума или по крайней мере среднего минимума магнитного поля. Это существенно ограничивает конфигурацию поля магнитных ловушек, пригодных для удержания плазмы. Как было показано в § 8.1, магнитное поле в пространстве, свободном от токов, уменьшается в направлении радиуса кривизны силовых линий. Поэтому магнитные ловушки с выпуклыми силовыми линиями (т. е. с силовыми линиями, изогнутыми наружу) не могут обеспечить устойчивое удержание плазмы, так как в них поле падает от центра к периферии. Это относится, в частности, к простейшим магнитным ловушкам с пробками (см. § 8.5, рис. 8.16). Для обеспечения устойчивости лучше всего использовать конфигурацию, в которой поле нарастает от центра к периферии, т. е. силовые линии вогнутые. В случае, если силовые линии имеют как вогнутые, так и выпуклые участки, устойчивость определяется изменением  $U = - \int dl/H$  при переходе от центра к периферии плазмы.

### § 10.5. Равновесие и устойчивость плазменного шнура с током

Плазма может удерживаться не только внешним магнитным полем, но и полем, создаваемым токами, текущими по плазме. Простейшая система, в которой можно реализовать такое удержание, представляет собой линейный электрический разряд. При большом токе разряда создаваемое им магнитное поле достаточно для обеспечения равновесия плазмы, не имеющей контакта со стенками. Этот способ удержания широко исследовался в первых экспериментах по проблеме управляемого термоядерного синтеза. Он получил название *пинч-эффекта*; линейный разряд, удерживаемый полем тока, называют *линейным* или *z-пинчем*.

Рассмотрим прежде всего условия равновесия цилиндрически-симметричного плазменного шнура, вдоль которого течет ток (рис. 10.7). Будем считать, что плотность тока и параметры плазмы зависят только от радиуса:  $j = j_z(r)$ ,  $p = p(r)$ . При этом, очевидно, магнитное поле имеет только азимутальную составляющую:  $H = H_\varphi(r)$ . Связь плотности тока и поля дается уравнениями

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad j = \frac{c}{4\pi r} \frac{d}{dr} (Hr). \quad (10.102)$$

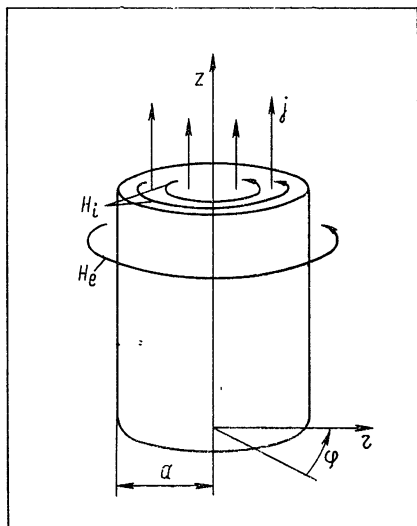


Рис. 10.7

Полный ток можно получить, интегрируя (10.102) по сечению плазменного столба:

$$I = 2\pi \int_0^a j r dr = \frac{ca}{2} H(a),$$

где  $a$  — радиус столба. Это равенство определяет магнитное поле на границе плазмы

$$H(a) = 2I/ca. \quad (10.103)$$

За пределами плазменного шнура с током магнитное поле уменьшается обратно пропорционально радиусу (это следует из уравнения (10.102) при  $j=0$ ). Учитывая это, получаем хорошо известное соотношение для магнитного поля линейного тока

$$H_e(r) = 2I/cr. \quad (10.104)$$

Уравнение равновесия плазмы в магнитном поле тока (10.6)  $\operatorname{grad} p = (1/c) [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$  может быть записано в виде

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{H}{4\pi r} \frac{d}{dr} (Hr). \quad (10.105)$$

Правая часть уравнения определяет силу взаимодействия тока с полем. Она может быть представлена в виде, аналогичном (10.30):

$$\frac{H}{4\pi r} \frac{d}{dr} (Hr) = \frac{d}{dr} \left( \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{H^2}{4\pi r}. \quad (10.106)$$

Первое слагаемое дает при этом градиент магнитного давления, второе — силу, связанную с натяжением силовых линий. Интегральное условие равновесия найдем, умножая уравнение (10.105)

на  $r^2$  и интегрируя по радиусу от 0 до  $a$ . Тогда получим:

$$-\int_0^a \frac{dp}{dr} r^2 dr = \frac{1}{8\pi} a^2 H^2(a). \quad (10.107)$$

Взяв по частям интеграл в левой части, найдем

$$\int_0^a \frac{dp}{dr} r^2 dr = -2 \int_0^a p(r) r dr = -\langle p \rangle a^2, \quad (10.108)$$

где  $\langle p \rangle = \int_0^a p(r) r dr / \int_0^a r dr$  — среднее по сечению плазмы давление.

Подставляя его в (10.107), получаем условие равновесия в виде

$$\langle p \rangle = \frac{1}{8\pi} H^2(a). \quad (10.109)$$

Правую часть равенства можно выразить через полный ток (10.103). Оно даст тогда связь между током и давлением плазмы

$$I^2 = 2\pi a^2 c^2 \langle p \rangle. \quad (10.110)$$

Для случая, когда температура заряженных частиц постоянна по сечению, давление пропорционально концентрации  $p = n(T_e + T_i)$  и равенство (10.110) можно представить в другой форме:

$$I^2 = 2c^2 (T_e + T_i) N, \quad (10.111)$$

где  $N = \pi a^2 \langle n \rangle$  — линейная плотность плазмы (число заряженных частиц на единицу длины столба).

Соотношения (10.109) — (10.111) являются интегральными условиями равновесия плазменного шнура с током. Они не зависят от радиального распределения тока. В реальных условиях распределение тока определяется способом формирования плазмы и ее проводимостью. В импульсных разрядах при большой проводимости, когда длительность импульса много меньше скин-времени (10.39), ток течет по поверхности плазмы (так называемый скин-роированный пинч). При этом давление плазмы внутри шнура должно быть постоянным, так как  $j = H = 0$ , а условие равновесия (10.109) сводится к равенству давления плазмы магнитному давлению на границе  $p = H^2(a)/8\pi$ . В противоположном случае, когда плотность тока постоянна по сечению плазмы, уравнение (10.102) определяет линейное увеличение магнитного поля внутри плазмы с радиусом

$$H_i(r) = (2\pi j/c)r. \quad (10.112)$$

При этом в соответствии с (10.105) распределение давления оказывается параболическим

$$p = p_0 (1 - r^2/a^2), \quad (10.113)$$

где

$$p_0 = \pi a^2 j^2 / c^2 = I^2 / \pi a^2 c^2. \quad (10.114)$$

Условия равновесия плазменного шнура с током нетрудно обобщить на случай, когда в объеме плазмы и вне ее имеется продольное магнитное поле  $H_z(r)$ . В этом случае уравнение равновесия принимает вид

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{c} [\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}]_r = -\frac{H_\Phi}{4\pi r} \frac{d}{dr} (H_\Phi r) - \frac{1}{4\pi} H_z \frac{dH_z}{dr}. \quad (10.115)$$

Его можно записать в форме

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{H_z^2}{8\pi} \right) = -\frac{H_\Phi}{4\pi r} \frac{d}{dr} (H_\Phi r). \quad (10.116)$$

Умножая (10.116) на  $r^2$  и интегрируя от 0 до  $a$ , получаем вместо (10.109)

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= (1/8\pi) H^2(a) - (\langle H_{zi}^2 \rangle - H_{ze}^2)/8\pi = \\ &= I^2/2\pi c^2 a^2 - (\langle H_{zi}^2 \rangle - H_{ze}^2)/8\pi, \end{aligned} \quad (10.117)$$

где величина  $\langle H_{zi}^2 \rangle$ , как и  $\langle p \rangle$ , усреднена по сечению плазмы. Здесь учтено, что на границе плазменного шнура (при  $r = a$ )  $H_{zi} = H_{ze}$ .

Полученные соотношения определяют условия равновесия плазменного шнура с током. Следует, однако, учитывать, что протекание тока через плазму сопровождается выделением джоулева тепла. До тех пор пока такое выделение не компенсировано потерями (на излучение, на теплопроводность и т. п.), должно происходить увеличение температуры и соответственно давления плазмы, и поэтому равновесный ток (10.111) также должен нарастать со временем.

Рассмотрим теперь устойчивость равновесия плазменного шнура с током для случая, когда ток скинирован, т. е. течет по поверхности шнура. В этом случае магнитное поле внутри плазмы отсутствует ( $\beta = 1$ ) и в соответствии с анализом предыдущего параграфа устойчивость границы плазма — вакуум определяется направлением изменения напряженности внешнего магнитного поля. В соответствии с (10.104) магнитное поле уменьшается с радиусом  $H \sim 1/r$ , поэтому  $\partial H/\partial \eta = \partial H/\partial r < 0$  и граница плазмы должна быть неустойчивой относительно возмущений различного типа, в первую очередь относительно возмущений, вытянутых вдоль поля.

Обсудим сначала качественно развитие некоторых типичных неустойчивостей плазменного шнура с током. Поскольку магнитное поле тока направлено по азимуту (см. рис. 10.7), возмущение желобкового типа, вытянутое вдоль поля, должно быть азимутально-симметричным. Оно может представлять собой локальное по длине сужение шнура (перетяжку), локальное расширение или периодическую модуляцию толщины шнура. Нетрудно понять причину развития неустойчивости. Локальное изменение радиуса шнура приводит, очевидно, к изменению напряженности магнитного

поля на границе (рис. 10.8, а), а именно к возрастанию его в области сужения и ослаблению в области расширения (при сохранении тока поле обратно пропорционально радиусу). Соответственно меняется и магнитное давление, в то время как газокинетическое давление плазмы остается прежним. Поэтому возникают силы, приводящие к росту возмущения. Развитие этой неустойчивости может повлечь за собой полный обрыв тока в месте перетяжки.

Другой тип неустойчивости связан с изгибом плазменного шнура (рис. 10.9, а). Изгиб приводит к уменьшению магнитного поля с той стороны, где образующая поверхности шнура выпукла, и к увеличению поля с другой стороны. Поэтому возникает раз-

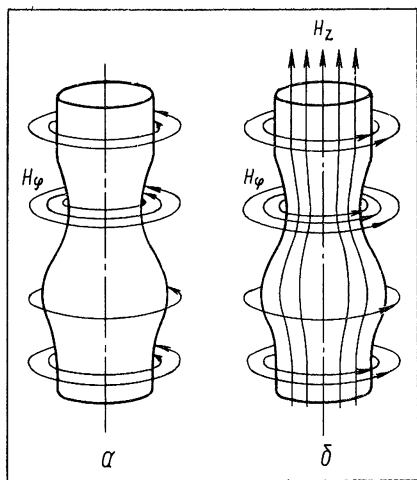


Рис. 10.8

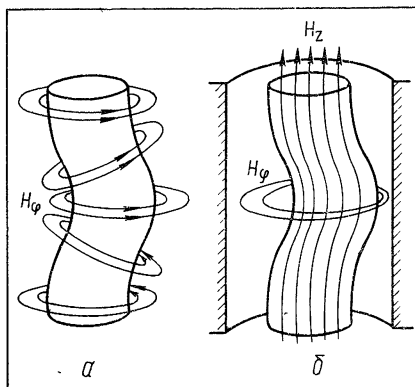


Рис. 10.9

ность магнитных давлений, стремящаяся увеличить возмущение. Неустойчивыми оказываются, очевидно, и более сложные винтовые возмущения.

Стабилизация некоторых из неустойчивостей возможна при добавлении продольного однородного магнитного поля внутрь плазмы. При этом условие равновесия границы сводится к равенству суммы кинетического давления и давления внутреннего магнитного поля давлению внешнего поля

$$p + H_{zi}^2/8\pi = H_{\phi e}^2/8\pi. \quad (10.118)$$

Легко видеть, что продольное поле, вмороженное в плазму, может приводить к стабилизации возмущений типа перетяжек. Действительно, перетяжки вызывают искривление формы границы, приводящее к соответственному искривлению силовых линий продольного поля и изменению его напряженности в объеме (рис. 10.8, б). Возникающее в результате искривления натяжение силовых линий в первую очередь препятствует развитию коротких перетяжек, длина которых меньше или сравнима с радиусом. При большой длине

эффект натяжения относительно мал и основную роль в стабилизации играет изменение внутреннего магнитного давления. Магнитный поток, вмороженный в плазменный шнур, постоянен  $\mu a^2 H_z = \text{const}$  и  $H_z \sim 1/a^2$ . Внешнее поле определяется током и  $H_\phi \sim 1/a$ . Для подавления неустойчивости необходимо, чтобы внутреннее магнитное давление изменялось быстрее внешнего  $|\partial (H_z^2/8\pi)/\partial a| > |\partial (H_\phi^2/8\pi)/\partial a|$ . Поэтому условие устойчивости сводится к неравенству  $H_z^2 > (1/2)H_\phi^2$ , которое дает минимальную величину продольного поля, необходимого для стабилизации. Продольное поле приводит из-за сил натяжения также к подавлению возмущений типа изгиба, характерная длина которых сравнима с радиусом шнура или меньшего. Однако изгибы большой длины продольное поле не стабилизирует. Для их стабилизации применяется толстенный металлический кожух, окружающий плазму с током (рис. 10.9, б). Поскольку время развития возмущений много меньше времени проникновения поля в металл, можно считать, что поток  $H_\phi$ , охватывающий шнур и заключенный между плазмой и стенкой кожуха, не меняется. Это приводит к увеличению магнитного давления на внешней стороне изгиба (там, где зазор меньше) и способствует подавлению неустойчивости.

Количественный анализ неустойчивости скинированного плазменного шнура с током можно провести так же, как это делалось в § 10.4 для плоской границы. При постановке общей задачи о скинировании в цилиндрически-симметричном шнуре следует считать, что как внутри (при  $r < a$ ), так и вне плазмы (при  $r > a$ ) в равновесии имеются азимутальное поле  $H_\phi(r)$  и постоянное продольное поле  $H_z$ . Вне плазмы область магнитного поля ограничена кожухом ( $r = b$ ). Основное отличие от задачи, рассмотренной в § 10.4, состоит в замене плоской геометрии на цилиндрическую. В связи с этим задачу нужно решать в цилиндрической системе координат. Поскольку равновесные условия не зависят от азимутальной и продольной координат  $\phi$  и  $z$ , зависимость возмущений от этих координат можно полагать экспоненциальной. В частности, для смещения границы имеем

$$\xi_r(r, \phi, z, t) = \text{Re} [\xi(r) \exp [i(k_z z + k_\phi a \phi - \omega t)]]. \quad (10.119)$$

Поскольку полный обход по азимуту приводит в ту же точку, зависимость  $\xi_r$  от  $\phi$  должна иметь период, кратный  $2\pi$ :  $\xi_r(\phi) = \xi_r(\phi + 2\pi)$ , т. е.  $k_\phi a = m$ , где  $m$  — целое число, называемое *модой колебаний*. Возмущение с  $m = 0$ , не зависящее от азимута, есть периодическая последовательность сужений (перетяжек) и расширений шнура  $\xi \sim \cos k_z z$ . Возмущение с  $m = 1$   $\xi \sim \cos(k_z z + \phi)$  в каждом сечении представляет собой смещение шнура в направлении  $\phi = -k_z z$ . В целом такие смещения образуют винтовое возмущение. Возмущения с большими  $m$  имеют структуру многозаходного винта. Вид возмущенного шнура при разных значениях  $m$  иллюстрируется рис. 10.10.

Решение линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики с граничными условиями для возмущения вида (10.119) приводит к дисперсионному уравнению, аналогичному уравнению (10.82), полученному в § 10.4 для плоской границы. Оно может быть записано в виде

$$\rho\omega^2 = -\sigma_1 k_z G + (kH_{ig})^2/4\pi + \alpha_2 (kH_{eg})^2/4\pi, \quad (10.120)$$

где  $G = |(d/dr)(H_\Phi^2/8\pi)| = H_\Phi^2(a)/4\pi a$  — эффективная сила, действующая на границу плазмы и равная градиенту магнитного дав-

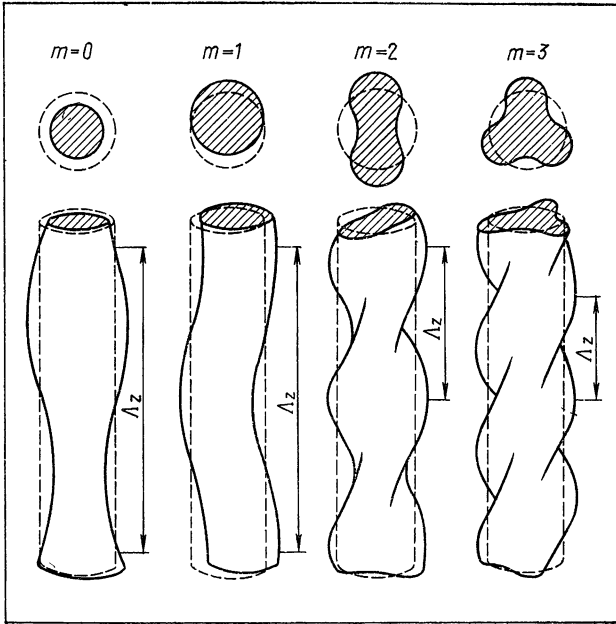


Рис. 10.10

ления; предполагается, что вектор  $\mathbf{k}$  имеет продольную проекцию  $k_z$  и азимутальную  $k_\phi$ . Коэффициенты  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , которые отличают (10.120) от (10.82), равны

$$\alpha_1 = \frac{I'_m(k_z a)}{I_m(k_z a)};$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{K_m(k_z a) I'_m(k_z b) - K'_m(k_z b) I_m(k_z a)}{K'_m(k_z b) I'_m(k_z a) - K'_m(k_z a) I'_m(k_z b)},$$

где  $I_m$ ,  $K_m$  — модифицированные функции Бесселя порядка  $m$ ;  $I'_m$ ,  $K'_m$  — их производные. Эти коэффициенты учитывают цилиндричность геометрии и влияние кожуха. Для коротких волн, когда  $kb \gg ka \gg 1$ , граница практически не отличается от плоской и



влияние кожуха мало; при этом  $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$ . В отсутствие продольного магнитного поля ( $H_i = 0$ ,  $H_{eg} = H_\Phi(a)$ ,  $(\mathbf{kH}_e) = k_\Phi H_\Phi = (m/a)H_\Phi$ ) уравнение (10.120) принимает вид

$$\omega^2 = (H_{\Phi a}^2/4\pi\rho)(-\alpha_1 k_z/a + \alpha_2 m^2/a^2), \quad (10.121)$$

где введено обозначение  $H_\Phi(a) = H_{\Phi a}$ . Из него следует, что при малых длинах волн неустойчивы возмущения с  $m < \sqrt{k_z a}$ . Инкремент нарастания возмущений имеет порядок

$$\gamma \approx (H_{\Phi a}^2 k_z / 4\pi\rho a)^{1/2} \approx (2\rho k_z / \rho a)^{1/2}. \quad (10.122)$$

[Здесь учтены условия равновесия (10.118)]. Видно, что при  $(k_z a) \approx 1$  время развития неустойчивости  $\tau \approx 1/\gamma \approx (1/a)\sqrt{\rho/p} \approx (1/a)\sqrt{T/m_i}$  имеет порядок времени перемещения ионов на длину  $a$ .

Уравнение (10.120) позволяет количественно проанализировать условия стабилизации неустойчивостей различного типа продольным магнитным полем и кожухом. Для случая, когда стабилизация обеспечивается внутренним продольным полем, т. е.  $H_i = H_{zi} \neq 0$ ,  $H_{ze} = 0$ , дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 H_{\Phi a}^2}{4\pi\rho} \left( -\frac{\alpha_1}{k_z a} + \frac{\alpha_2 m^2}{k_z^2 a^2} + \frac{H_{zi}^2}{H_{\Phi a}^2} \right). \quad (10.123)$$

Как видно, в уравнении появляется дополнительный стабилизирующий член, пропорциональный  $H_{zi}^2$ . Отметим, что его величина ограничена, так как в соответствии с условием равновесия  $H_{zi} < H_{\Phi a}$ . Условие стабилизации возмущений с  $m = 0$  (перетяжек) определяется соотношением: первого и третьего слагаемых в (10.123). Это условно сводится к неравенству

$$H_{zi}^2/H_{\Phi a}^2 > (\alpha_1/k_z a)_{\max} = [I'_0(k_z a)/I_0(k_z a)k_z a]_{\max} = 1/2.$$

Стабилизация возмущений с  $m \neq 0$  определяется вторым и третьим слагаемыми (10.123). Можно показать, что она требует применения кожуха с радиусом  $b < 5a$ .

Теперь рассмотрим случай, когда сильное продольное поле есть как внутри, так и снаружи плазменного шнура ( $H_{zi} = H_{ze} \gg H_\Phi$ ). В этом случае возмущения с длиной волны порядка радиуса или меньшей не могут нарастать, так как их развитие должно приводить к большим изменениям энергии, связанным с искривлением силовых линий продольного поля  $H_{zi}$ . Наиболее опасны винтовые возмущения с продольной длиной волны, близкой к шагу силовой линии на границе плазмы  $\Lambda_z \approx (H_z/H_{\Phi a})2\pi a$ . Такое возмущение, параллельное магнитному полю, минимально искажает форму силовых линий. Существенное влияние на развитие винтового возмущения оказывает перекрещенность силовых линий (шир). Перекрещен-

ность возникает из-за того, что азимутальное поле спадает с радиусом, в то время как продольное поле постоянно. В результате угол наклона силовых линий по отношению к оси шнура уменьшается с радиусом (рис. 10.11). Если на границе шнура угол наклона возмущения по отношению к оси меньше угла наклона силовой линии, то по мере роста возмущения угол между возмущением и силовой линией уменьшается. При этом развитие возмущения облегчено. Если же возмущение имеет вид винта с шагом меньшим, чем силовая линия на границе, угол между магнитным полем и возмущением по мере роста  $r$  увеличивается, поэтому его развитие затруднено. Из сказанного ясно, что неустойчивыми могут быть возмущения, для которых

$$\Lambda_z \geq 2\pi a H_z / H_\phi. \quad (10.124)$$

Количественное рассмотрение устойчивости границы плазменного цилиндра в сильном продольном магнитном поле можно провести с помощью уравнения (10.120). Полагая в нем  $H_{zi} = H_{ze}$ , получаем

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 = & -\alpha_1 k_z H_{\phi a}^2 / 4\pi a + \\ & + k_z^2 H_z^2 / 4\pi + \alpha_2 (k_z H_z + \\ & + k_\phi H_{\phi a})^2 / 4\pi. \end{aligned} \quad (10.125)$$

Поскольку  $H_z \gg H_{\phi a}$ , неустойчивыми могут быть, очевидно, только длинноволновые возмущения с  $k_z a \ll 1$  (в противном случае второе и третье слагаемые в правой части превосходят первое). При этом асимптотическое представление бесселевых функций приводит к  $\alpha_1 \approx m/k_z a$ ,  $\alpha_2 \approx 1$  и дисперсионное уравнение приобретает вид

$$\rho\omega^2 = -m H_{\phi a}^2 / 4\pi a^2 + k_z^2 H_z^2 / 4\pi + (k_z H_z + (m/a) H_{\phi a})^2 / 4\pi. \quad (10.126)$$

Нетрудно убедиться, что правая часть уравнения не может стать отрицательной при  $m \geq 2$ . Поэтому неустойчивыми могут быть лишь возмущения с  $m = 1$ . Для них при  $k_z < 0$  получаем

$$\omega^2 = (k_z^2 H_z^2 / 2\pi\rho) (1 - H_{\phi a} / H_z |k_z a|). \quad (10.127)$$

Видно, что граница плазмы неустойчива относительно винтового возмущения с  $m = 1$  при условии

$$|k_z a| < H_{\phi a} / H_z. \quad (10.128)$$

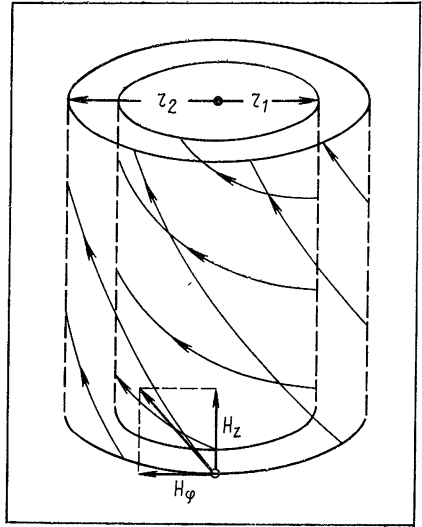


Рис. 10.11

Максимальная величина инкремента нарастания винтовой неустойчивости оказывается равной

$$\gamma_{\max} = (1/a) \sqrt{H_{\Phi a}^2 / 8\pi\rho} = (1/a) \sqrt{\rho/\rho}. \quad (10.129)$$

Условие раскочки винтовой неустойчивости соответствует полученному выше из качественных соображений неравенству (10.124). Оно определяет минимальную длину волны возмущения. С другой стороны, длина волны обычно ограничена длиной плазменного столба  $l$ . Ограничение связано с условиями на торцах (чаще всего с условием вмороженности силовых линий магнитного поля в металлические электроды). Поэтому в плазменном шнуре конечной длины при достаточно большом продольном поле развитие винтовой

неустойчивости оказывается невозможным. В соответствии с (10.124) критерий устойчивости может быть записан в виде

$$H_z > H_{\Phi} l / 2\pi a. \quad (10.130)$$

Его называют *критерием Шафранова—Крускала*.

Мы рассмотрели линейную стадию винтовой неустойчивости. Ее развитие должно привести к сворачиванию плазменного шнура с током в винтовую спираль. При этом винтовые силовые линии магнитного поля вне шнура сокращаются и превращаются в прямые (рис. 10.12, а, б). Дальнейшее развитие связано с притяжением токов в соседних витках, которые должны превратить винтовой шнур в полый цилиндр. В этом состоянии энергия магнитного поля минимальна. Таким образом,

источником винтовой неустойчивости являются силы натяжения, стремящиеся выпрямить и укоротить силовые линии магнитного поля.

Проведенное в этом параграфе обсуждение устойчивости плазменного шнура основывалось на модели скинированного тока. Анализ устойчивости для плазменного цилиндра с распределенным током значительно сложнее, поэтому не будем на нем останавливаться. Критерий устойчивости в этом случае представляет собой обобщение критерия устойчивости относительно конвективных возмущений (10.100) на более широкий класс возмущений. Они в большой степени определяются широм в объеме плазмы. Так, например, для возмущений с большим  $m$  (которые можно считать локальными) до-

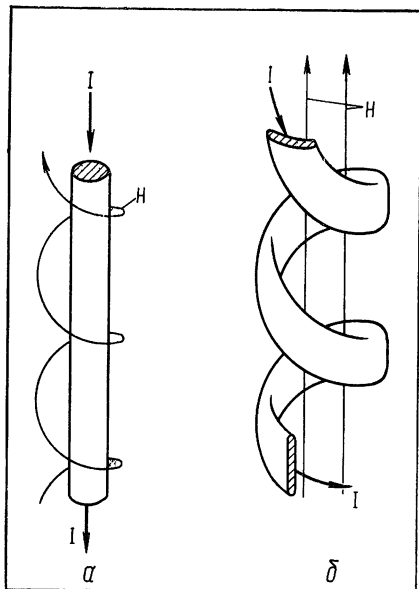


Рис. 10.12

статочный критерий устойчивости (*критерий Сайдема*) можно представить в виде

$$-8\pi r \frac{dp}{dr} > \frac{H_z^2}{4} r \frac{d\psi}{dr}, \quad (10.131)$$

где величина  $\psi = H_\varphi/rH_z$  дает шаг силовой линии  $s = 2\pi/\psi$ , а производная  $d\psi/dr$  характеризует шир [см. также (8.12)].

### § 10.6. Равновесие и устойчивость тороидального плазменного шнура

В гл. 8 была рассмотрена структура магнитного поля тороидальных магнитных ловушек, образованных в результате суперпозиции тороидального ( $H_\theta$ ) и полоидального ( $H_\varphi$ ) магнитных полей. Наиболее простой способ создания таких ловушек используется в установках типа Токамак, получивших широкое распространение в исследованиях по проблеме управляемого термоядерного синтеза. В них тороидальное поле создается внешним соленоидом, а полоидальное — током в плазме, причем  $H_\theta \gg H_\varphi$ . В настоящем параграфе будут кратко рассмотрены равновесие и магнитогидродинамическая устойчивость тороидального плазменного шнура при таких условиях.

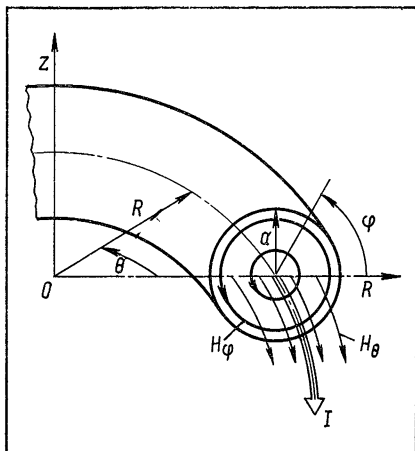


Рис. 10.13

Рассмотрим сначала интегральные условия равновесия тороидального плазменного витка с током  $I$  в тороидальном поле (рис. 10.13), полагая, что выполнено условие  $H_\varphi \ll H_\theta$  и что малый радиус тора много меньше большого ( $a \ll R$ ). При этом уравнение равновесия (10.6) можно разложить в ряд по малому отношению  $a/R$ . В нулевом приближении (при  $a/R = 0$ ) тороидальный плазменный шнур превращается в цилиндрический и условие равновесия плазмы приобретает вид [см. (10.177)]

$$\langle p \rangle = H_\varphi^2(a)/8\pi + (H_{\theta e}^2 - \langle H_{\theta i}^2 \rangle)/8\pi = I^2/2\pi a^2 c^2 + (H_{\theta e}^2 - \langle H_{\theta i}^2 \rangle)/8\pi. \quad (10.132)$$

Это равенство называют условием равновесия «по малому радиусу тора». В следующем приближении надо учесть силы, пропорциональные  $a/R$  и возникающие из-за тороидальности плазменного шнура. Существует несколько источников сил, действующих в сто-

рону увеличения большого радиуса тора и соответственно объема плазменного шнура. Это газокинетическое давление, стремящееся расширить объем плазмы, электродинамическое взаимодействие элементов витка с током и давление тороидального магнитного поля. Им противостоит натяжение силовых линий тороидального поля. Чтобы найти суммарный эффект, удобно ввести обобщенную (просуммированную по объему плазмы) силу в направлении большого радиуса тора, определив ее через энергию системы плазма—магнитное поле:

$$\mathcal{F}_R = \partial W / \partial R. \quad (10.133)$$

Энергию  $W(R)$  можно представить как сумму составляющих, связанных с плазмой, магнитным полем тока и продольным (тороидальным) магнитным полем. Энергия, запасенная в плазме, определяется средним по объему газокинетическим давлением

$$W_p = \int p dV = 2\pi^2 a^2 R \langle p \rangle. \quad (10.134)$$

Энергию, запасенную в витке с током, можно выразить через индуктивность витка

$$W_I = (1/2c^2)LI^2. \quad (10.135)$$

Используем для индуктивности известную формулу

$$L = 4\pi R (\ln(8R/a) - 2 + l_i/2), \quad (10.136)$$

где  $l_i = \langle H_{\Phi i}^2 \rangle / H_{\Phi i}^2(a)$  — внутренняя индуктивность распределенного тока, отнесенная к единице длины шнура. Энергию, запасенную в продольном магнитном поле, найдем, интегрируя плотность энергии по объему плазмы ( $V_i$ ) и по всему остальному пространству ( $V_e$ ):

$$\begin{aligned} W_H &= \int_{(V_i)} \frac{H_{\Theta i}^2}{8\pi} dV + \int_{(V_e)} \frac{H_{\Theta e}^2}{8\pi} dV = \int_{(V_e + V_i)} \frac{H_{\Theta e}^2}{8\pi} dV + \\ &+ \int_{(V_i)} \frac{H_{\Theta i}^2 - H_{\Theta e}^2}{8\pi} dV = \int_{(V_e + V_i)} \frac{H_{\Theta e}^2}{8\pi} dV + 2\pi^2 a^2 R \frac{\langle H_{\Theta i}^2 \rangle - \langle H_{\Theta e}^2 \rangle}{8\pi}. \end{aligned} \quad (10.137)$$

Суммируя (10.134), (10.135), (10.137) и подставляя сумму в (10.137), получаем растягивающую центробежную силу

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_R &= 2\pi^2 a^2 \left\{ \langle p \rangle - \frac{H_{\Theta e}^2 - \langle H_{\Theta i}^2 \rangle}{8\pi} + \frac{2I^2}{\pi c^2 a^2} \left( \ln \frac{8R}{a} - 1 + \frac{l_i}{2} \right) \right\} = \\ &= \frac{4\pi I^2}{c^2} \left( \ln \frac{8R}{a} - \frac{3}{2} + \frac{l_i}{2} + \frac{2\pi a^2 c^2 \langle p \rangle}{I^2} \right), \end{aligned} \quad (10.138)$$

где использовано условие равновесия по малому радиусу (10.132). Компенсация этой силы возможна лишь при наличии дополнительного магнитного поля, направленного вдоль оси тора  $H_z$

(см. рис. 10.13). Взаимодействие такого поля с током при подходящем направлении поля и тока создает центростремительную силу. При однородном поле  $H_Z$  сила, просуммированная по объему тора, равна

$$\mathcal{F}_R^* = \frac{1}{c} \int j_{\theta} H_Z dV = \frac{2\pi R}{c} I H_Z. \quad (10.139)$$

Приравнивая силы  $\mathcal{F}_R$  и  $\mathcal{F}_R^*$ , получаем величину поля  $H_Z$ , необходимого для равновесия:

$$H_Z = \frac{2I}{cR} \left( \ln \frac{8R}{a} - \frac{3}{2} + \frac{l_i}{2} + \frac{2\pi a^2 c^2}{I^2} \langle p \rangle \right). \quad (10.140)$$

Это равенство называется условием равновесия «по большому радиусу тора».

Поддержание равновесия при изменении параметров плазмы (тока, давления, их распределения по объему) требует изменения поля  $H_Z$  довольно сложным образом в соответствии с (10.140). Существует, однако, способ автоматического поддержания равновесной величины поля, основанный на помещении плазменного шнура в тороидальный металлический кожух. При достаточно большой проводимости и толщине кожуха, при которой время проникновения поля через кожух больше времени поддержания равновесия, он ведет себя, как сверхпроводник. При этом внешнее по отношению к плазме магнитное поле, в частности поле тока, сосредоточено в пространстве между плазменным цилиндром и кожухом. В то же время в кожухе индуцируются токи Фуко, направленные противоположно току в плазме, которые и препятствуют проникновению поля в кожух. В случае, когда плазменный шнур равноотстоит от стенок камеры, поверхностная плотность токов Фуко одинакова по всей поверхности камеры и силы отталкивания между этими токами и плазменным током компенсируют друг друга. При смещении плазменного шнура к внешней стенке кожуха плотность тока на этой стенке оказывается больше, чем на противоположной. В этом случае внутри камеры возникает поле  $H_Z$ , создающее силу, направленную внутрь, т. е. кожух «отталкивает» плазменный шнур. Таким образом, внутри металлического кожуха тороидальный плазменный шнур с током может находиться в равновесии, если он смещен к внешней стенке кожуха. Необходимое смещение автоматически достигается под действием растягивающих сил.

Нетрудно получить выражения для равновесного смещения в случае, когда тороидальность мала, т. е. радиус плазмы  $a$  и радиус кожуха  $b$  много меньше большого радиуса тора  $R$ . Пусть ось шнура с током смещена относительно оси камеры на расстояние  $\Delta$  (рис. 10.14). Тогда влияние кожуха при  $b \gg a$  эквивалентно появлению тока «изображения» на расстоянии  $d = b^2/\Delta$  от оси (формула строго справедлива для линейного тока в цилиндре). Создаваемое током изображения поле в области шнура равно

$$H_Z \approx 2I/cd = 2I\Delta/cb^2. \quad (10.141)$$

Оно может считаться однородным, поскольку  $d \gg a$ . Это поле должно обеспечить равновесие по большому радиусу. При определении условий равновесия следует также учесть, что индуктивность витка с током в кожухе отличается от (10.136). Она равна

$$L = 4\pi R \left( \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} l_i \right). \quad (10.142)$$

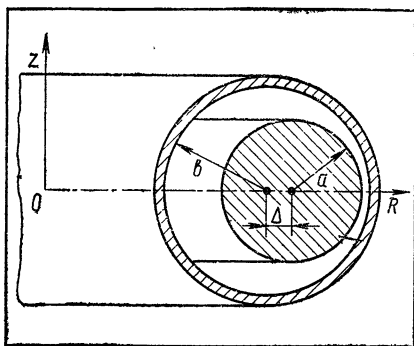


Рис. 10.14

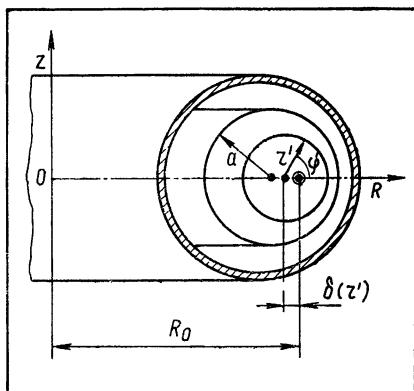


Рис. 10.15

Подставляя в условие равновесия (10.140) поле (10.141) и учитывая (10.142), получаем выражение для равновесного смещения, справедливое при  $b \gg a$ :

$$\Delta = \frac{b^2}{2R} \left( \ln \frac{b}{a} + \frac{l_i - 1}{2} + \frac{2\pi a^2 c^2}{I^2} \langle p \rangle \right). \quad (10.143)$$

Более точный расчет, свободный от предположения о малости  $a/b$ , приводит к равенству

$$\Delta = \frac{b^2}{2R} \left[ \ln \frac{b}{a} + \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \left( \frac{l_i - 1}{2} + \frac{2\pi a^2 c^2}{I^2} \langle p \rangle \right) \right], \quad (10.144)$$

справедливому при  $\Delta \ll b$ .

Полученные формулы являются интегральными условиями равновесия. Чтобы связать распределение магнитного поля и давления, следует учесть тороидальную структуру магнитного поля. Как было показано в § 8.1, эта структура определяется совокупностью сложенных друг в друга тороидальных магнитных поверхностей (см. рис. 8.3). Меридиональные сечения поверхностей при малой тороидальности близки к окружностям, центры которых сдвинуты друг относительно друга. По мере уменьшения радиуса окружностей они смещаются в сторону большого радиуса тора. Причина такого смещения — рост растягивающих сил, связанных с давлением плазмы, при переходе от периферической магнитной поверхности к центральной (к магнитной оси). Обычно для описания маг-

нитной структуры тороидального плазменного шнура вводят тороидальные координаты — радиус магнитной поверхности  $r'$ , азимутальный угол в меридиональном сечении тора  $\varphi'$  и экваториальный угол  $\Theta$  (рис. 10.15). При «спрямлении» тора эти координаты переходят, очевидно, в цилиндрические ( $r' \rightarrow r$ ,  $\varphi' \rightarrow \varphi$ ,  $R\Theta \rightarrow z$ ).

Для случая малой тороидальности ( $a \ll R$ ,  $r' \ll R$ ) нетрудно определить распределение магнитных полей. Тороидальное (продольное) магнитное поле в первом приближении по  $a/R$  равно

$$H_{\Theta} = (H_0/R)R_0 = H_0[1 - (r'/R_0) \cos \varphi'], \quad (10.145)$$

где  $R_0$  — радиус магнитной оси. Второе слагаемое характеризует тороидальную неоднородность поля.

Неоднородность магнитного поля тока (полоидального поля) приводит к сгущению магнитных поверхностей в направлении большого радиуса. В первом приближении по  $a/R$  это поле можно представить в виде

$$H_{\Phi} = H_{\Phi 0}(r)[1 + (r'/R_0) \zeta(r') \cos \varphi'], \quad (10.146)$$

параметр  $\zeta(r')$  однозначно связан со смещением центра магнитных поверхностей  $\delta(r')$  относительно магнитной оси

$$-\frac{d\delta}{dr'} = \frac{r'}{R} (\zeta + 1); \quad \delta(r') = \int_0^{r'} \frac{r}{R} (\zeta + 1) dr, \quad (10.147)$$

где принято  $\delta(0) = 0$ .

Подставляя поля (10.145) и (10.146) в общее уравнение равновесия (10.6), записанное в форме

$$\text{grad } p = (1/4\pi)[\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}],$$

можно найти связь равновесных распределений магнитного поля и давления. При малой тороидальности решение уравнения находится методом последовательных приближений по параметру  $a/R$ . Не останавливаясь на вычислениях, приведем здесь их результаты. В нулевом приближении (при  $a/R \rightarrow 0$ ) уравнение равновесия сводится к равенству (10.115) и соответствует спрямлению тора в цилиндр. В следующем приближении (в котором сохраняются члены, пропорциональные  $r'/R$ ,  $a/R$ ) уравнение равновесия позволяет найти параметр  $\zeta(r')$ , входящий в (10.147). Он равен

$$\zeta(r') = 8\pi[\langle p(r') \rangle - p(r')]/H_{\Phi}^2(r') + l_i(r')/2 - 1, \quad (10.148)$$

где  $\langle p(r') \rangle$  обозначает давление, усредненное по области сечения, ограниченной магнитной поверхностью радиуса  $r$ ;  $H_{\Phi}(r')$  — поле тока на поверхности  $r'$ ;  $l_i(r') = \langle H_{\Phi}^2(r') \rangle / H_{\Phi}^2(r')$ ; величины  $p(r')$  и  $H_{\Phi}(r')$  берутся в нулевом приближении (без учета тороидальных поправок). Это равенство дает распределение полоидального поля (10.146) и относительное смещение магнитных поверхностей (10.147).



В частности, для параболического распределения давления и постоянной по сечению плотности тока [ $p(r') = p_0(1 - r'^2/a^2)$ ;  $j = j_0$ ] получаем

$$\zeta(r') = 8\pi\langle p(a) \rangle / H_\Phi^2(a) - 3/4$$

и в соответствии с (10.147)

$$\delta(r') = \frac{r'^2}{2R} \left[ \frac{\pi c^2 a^2 p_0}{I^2} + \frac{1}{4} \right] = \frac{r'^2}{2R} \left[ \frac{8\pi\langle p(a) \rangle}{H_\Phi^2(a)} + \frac{1}{4} \right]. \quad (10.149)$$

Видно, что сдвиг между магнитной осью ( $r' = 0$ ) и центрами магнитных поверхностей увеличивается с ростом давления плазмы. Максимальный сдвиг, характеризующий положение границы магнитной поверхности с  $r' = a$ , определяется отношением среднего давления к магнитному давлению полоидального поля  $\beta_I = 8\pi\langle p \rangle / H_\Phi^2(a)$ . В соответствии с (10.149) он равен

$$\delta(a) = (a^2/2R^2)(\beta_I + 1/4). \quad (10.150)$$

Для оценки предельного давления, которое может удерживаться в тороидальном поле, можно считать, что предельный сдвиг должен быть меньше радиуса. Получим тогда

$$\beta_I = 8\pi\langle p \rangle / H_\Phi^2(a) < 2R/a. \quad (10.151)$$

Более точные расчеты, проведенные с учетом более высоких степеней  $a/R$ , показывают, что при приближении  $\beta_I$  к пределу (10.151) происходит деформация магнитных поверхностей — их сечения теряют круговую форму и оказываются прижатыми к кожуху. При этом должен резко возрастать градиент давления плазмы на ее внешней поверхности.

Обсудим теперь кратко вопрос об устойчивости тороидального плазменного шнура по отношению к малым возмущениям его конфигурации. Для режимов, в которых ток скинирован, т. е. течет по поверхности шнура, условия устойчивости при малой тороидальности соответствуют условиям устойчивости прямого плазменного шнура с током, рассмотренным в § 10.5. В случае, когда тороидальное (продольное) поле много больше полоидального (поля тока), опасной оказывается винтовая неустойчивость с  $m = 1$ . Условие ее стабилизации в торе может быть получено из неравенства (10.130) при учете того, что максимальная продольная длина волны возмущения в торе равна его периметру  $l_{\text{макс}} = 2\pi R$ . Подставляя эту длину в (10.130), получаем критерий Шафранова—Крускала для тороидального плазменного шнура

$$H_\Theta > (R/a)H_\Phi(a) = 2RI/ca^2, \quad (10.152)$$

определяющий область устойчивости относительно винтового возмущения. Отношение магнитного поля к предельному полю (10.152) называется *запасом устойчивости*.

$$q(a) = aH_\Theta/RH_\Phi(a). \quad (10.153)$$

Анализ условий развития винтовой неустойчивости при токе, распределенном по сечению, значительно сложнее. Оказывается, что в этом случае при  $q(a) > 1$  возможна раскачка возмущений типа многозаходного винта с  $m > 1$ . Их стабилизация может осуществляться за счет шира, связанного с изменением направления поля  $H_\phi$ , при изменении радиуса. Для плавного распределения тока  $j(r)$  стабилизация достигается при увеличении запаса устойчивости  $q(a)$ . Приближенно условие устойчивости можно записать в виде неравенства

$$q(r') > j(r') / \langle j(r') \rangle, \quad (10.154)$$

которое должно выполняться при всех  $r'$ . Здесь  $j(r')$  — плотность тока на магнитной поверхности радиуса  $r'$ ;  $\langle j(r') \rangle$  — плотность тока, усредненная по площади, ограниченной сечением этой магнитной поверхности. В частности, должно удовлетворяться условие

$$q(0) = \frac{cH_\Theta}{2\pi R j(0)} > 1. \quad (10.155)$$

Обычно оно является достаточным условием устойчивости.

В плазменном шнуре с распределенным током может возникнуть также конвективная (перестановочная) неустойчивость, рассматривавшаяся в § 10.4. Она может стабилизироваться при помещении плазмы в область среднего минимума поля, точнее, в область минимума эффективного потенциала  $U = - \int (dl/H)$  (10.100). Для тороидальной плазмы с незамкнутыми силовыми линиями пределы интегрирования в формуле для  $U$  не определены. Поэтому удобно вернуться к выражению для удельного объема силовой трубки (8.7), в соответствии с которым

$$U = - \int (dl/H) = -\delta V / \delta \Phi, \quad (10.156)$$

где  $\delta V$  — объем трубки, содержащей магнитный поток  $\delta \Phi$ . Учитывая тороидальную структуру поля, в качестве  $\delta V$  удобно принять объем, ограниченный соседними магнитными поверхностями. Величина  $\delta \Phi$  при этом есть поток продольного магнитного поля  $H_\Theta$  через сечение этого объема. Основываясь на таком представлении, нетрудно найти эффективный потенциал  $U$ , воспользовавшись формулами (10.145) и (10.150), дающими распределение продольного поля и положение магнитных поверхностей. Вычисление приводит к выражению

$$U = - \frac{2\pi R}{H_\Theta} \left[ 1 - \frac{r'^2}{R^2} (2\beta_I + 1) \right]. \quad (10.157)$$

Из него следует, что  $U$  растет с ростом  $r'$ , т. е. область  $r' \approx 0$ , прилегающая к магнитной оси, является областью минимума  $U$  (областью среднего минимума поля). Нетрудно понять этот результат. На периферийных магнитных поверхностях силовые линии поочередно проходят как области, в которых поле меньше, чем на магнит-

ной оси ( $\dot{R} > \dot{R}_0$ ), так и области, в которых поле больше ( $\dot{R} < \dot{R}_0$ ). Однако смещение центров поверхностей внутрь с ростом  $r'$  (см. рис. 10.15) приводит к тому, что длина внешних участков ( $R > R_0$ ) меньше, чем длина внутренних, поэтому среднее магнитное поле растет при переходе от магнитной оси к периферии.

Существование среднего минимума продольного поля способствует стабилизации конвективной неустойчивости. Само по себе существование среднего минимума поля, однако, недостаточно для обеспечения устойчивости. При более строгом рассмотрении должно учитываться влияние устойчивости распределения не только продольного, но и полоидального поля.

Рассмотрение показывает, что конвективные возмущения не развиваются, если выполняется неравенство (10.155). Таким образом, неравенство (10.155) можно считать достаточным условием магнитогидродинамической устойчивости тороидального плазменного шнура с током в сильном магнитном поле.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

## 1. Общие руководства

- Альвен Г., Фельтхаммар К. Г. Космическая электродинамика. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
- Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. Пер. с англ. М., «Мир», 1975.
- Лонгмайр К. Физика плазмы. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1966.
- Синельников К. Д., Руткевич Б. Н. Лекции по физике плазмы. Харьков, Изд-во Харьковского ун-та, 1964.
- Смирнов Б. М. Физика слабоионизованного газа. М., «Наука», 1972.
- Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
- Трубников Б. А. Введение в теорию плазмы (лекционный курс). Ч. 1, 2. М., Изд-во МИФИ, 1969.
- Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. М., Атомиздат, 1964.

## 2. Столкновения в плазме

- Браун С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. Пер. с англ. М., Госатомиздат, 1961.
- Грановский В. Л. Электрический ток в газе. Т. 1, М. — Л., Гостехиздат, 1952.
- Мак-Даниель И. Процессы столкновений в ионизованных газах. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
- Месси Г., Бархоп Е. Электронные и ионные столкновения. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
- Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
- Сивухин Д. В. Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964.
- Смирнов Б. М. Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. М., Атомиздат, 1968.
- Смирнов Б. М. Физика слабоионизованного газа. М., «Наука», 1972.
- Смирнов Б. М. Ионы и возбужденные атомы в плазме. М., Атомиздат, 1974.
- Трубников Б. А. Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.
- Хастед Дж. Физика атомных столкновений. М., «Мир», 1965.

## 3. Кинетическая теория и процессы переноса в плазме

- Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.
- Балеску Р. Статистическая механика заряженных частиц. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.

**Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г.** Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М., «Наука», 1975.

**Веденов А. А.** Термодинамика плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.

**Грановский В. Л.** Электрический ток в газе. Т. I. М.—Л., Гостехиздат, 1952.

**Грановский В. Л.** Электрический ток в газе. Установившийся ток. М., «Наука», 1974.

**Гуревич А. В., Шварцбург А. Б.** Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М., «Наука», 1973.

**Елецкий А. В., Палкина Л. А., Смирнов Б. М.** Явления переноса в слабоионизованной плазме. М., Атомиздат, 1975.

**Климонтович Ю. Л.** Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М., «Наука», 1975.

**Климонтович Ю. Л.** Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М., Изд-во МГУ, 1964.

**Кролл Н., Трайвеллис А.** Основы физики плазмы. Пер. с англ. М., «Мир», 1975.

**Кудрин Л. П.** Статистическая физика плазмы. М., Атомиздат, 1974.

**Лонгмайр К.** Физика плазмы. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1966.

**Мак-Даниель И., Мэзон Э.** Подвижность и диффузия ионов в газах. Пер. с англ. М., «Мир», 1976.

**Мак-Дональд А.** Сверхвысокочастотный пробой в газах. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.

**Райзер Ю. П.** Лазерная искра и распространение разрядов. М., «Наука», 1974.

**Силин В. П.** Введение в кинетическую теорию газов. М., «Наука», 1971.

**Смирнов Б. М.** Физика слабоионизованного газа. М., «Наука», 1972.

**Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

**Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М.** Кинетика частиц плазмы. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1969.

**Эккер Г.** Теория полностью ионизованной плазмы. Пер. с англ. М., «Мир», 1974.

#### 4. Плазма в магнитном поле

**Альвен Г., Фельтхаммар К. Г.** Космическая электродинамика. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.

**Арцимович Л. А.** Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1963.

**Арцимович Л. А.** Замкнутые плазменные конфигурации. М., «Наука», 1969.

**Брагинский С. И.** Явления переноса в плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.

**Галеев А. А., Сагдеев Р. З.** Неоклассическая теория диффузии. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7. М., Атомиздат, 1973.

**Гертман Б. Н.** Динамика ионосферной плазмы. М., «Наука», 1974.

**Кадомец Б. Б.** Гидромагнитная устойчивость плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963.

**Кадомец Б. Б., Погуце О. П.** Турбулентные процессы в тороидальных системах. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967.

**Колесников П. М.** Электродинамическое ускорение плазмы. М., Атомиздат, 1971.

**Лонгмайр К.** Физика плазмы. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1966.

**Лукьянов С. Ю.** Горячая плазма и управляемый ядерный синтез. М., «Наука», 1975.

**Морозов А. И., Соловьев Л. С.** Геометрия магнитного поля. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963.

**Морозов А. И., Соловьев Л. С.** Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963.

**Морозов А. И., Соловьев Л. С.** Стационарные течения плазмы в магнитном поле. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 8. М., Атомиздат, 1974.

**Пикельнер С. Б.** Основы космической электродинамики. М., Физматгиз, 1961.

**Роуз Д., Кларк М.** Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции. М., Госатомиздат, 1963.

**Сивухин Д. В.** Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.

**Синельников К. Д., Руткевич Б. М.** Лекции по физике плазмы. Харьков, Изд-во Харьковского ун-та, 1964.

**Соловьев Л. С.** Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972.

**Соловьев Л. С., Шафранов В. Д.** Замкнутые магнитные конфигурации для удержания плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967.

**Спитцер Л.** Физика полностью ионизованного газа. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.

**Трубников Б. А.** Введение в теорию плазмы (лекционный курс). Ч. 1, 2. М., Изд-во МИФИ, 1969.

**Шафранов В. Д.** Равновесие плазмы в магнитном поле. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963.

## 5. Колебания и волны в плазме

**Бекефи Дж.** Радиационные процессы в плазме. Пер. с англ. М., «Мир», 1971.

**Веденов А. А.** Теория турбулентной плазмы. М., Изд-во ВИНТИ, 1965.

**Веденов А. А.** Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963.

**Веденов А. А., Рютов Д. Д.** Квазилинейные эффекты в потоковых неустойчивостях. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972.

**Галеев А. А., Сагдеев Р. З.** Нелинейная теория плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7. М., Атомиздат, 1973.

**Гинзбург В. Л.** Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1967.

**Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.** Волны в магнитоактивной плазме. М., «Наука», 1975.

**Голант В. Е.** Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы. М., «Наука», 1968.

**Гуревич А. В., Шварцбург А. Б.** Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М., «Наука», 1973.

**Ерохин Н. С., Моисеев С. С.** Волновые процессы в неоднородной плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7. М., Атомиздат, 1973.

**Иванов А. А.** Взаимодействие высокочастотных полей с плазмой. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972.

**Ишимару С.** Основные принципы физики плазмы. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1975.

**Кадомцев Б. Б.** Коллективные явления в плазме. М., «Наука», 1976.

**Кадомцев Б. Б.** Турбулентность плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964.

**Кадомцев Б. Б., Погуце О. П.** Турбулентные процессы в тороидальных системах. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967.

**Коллективные колебания в плазме.** М., Атомиздат, 1964. Авт.: Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н.

**Кролл Н., Трайвелпис А.** Основы физики плазмы. Пер. с англ. М., «Мир», 1975.

Ломинадзе Д. Г. Циклотронные волны в плазме. Тбилиси, Изд-во Мец-ниереба, 1975.

Лонгмайр К. Физика плазмы. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1966.

Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1, 2. М., Атомиздат, 1970.

Михайловский А. Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972.

Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., «Наука», 1973.

Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.

Ситенко А. Г. Электромагнитные флуктуации в плазме. Харьков, Изд-во Харьковского ун-та, 1965.

Стикс Т. Теория плазменных волн. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1965.

Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. Изд. 2-е. М., Атомиздат, 1968.

Хилд М., Уортон С. Микроволновая диагностика плазмы. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1968.

Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967.

Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971.

Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963.

Электродинамика плазмы. М., «Наука», 1974. Авт.: Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. П., Степанов К. Н.

Эллис В., Буксбаум С., Берс А. Волны в анизотропной плазме. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1966.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

- Автоэлектронная эмиссия 72
- Адиабатический инвариант  $\mu$  249
- Амбиполярная диффузия 191
  - в магнитном поле 287
  - условие 193
- Амбиполярное электрическое поле 193
  - в присутствии магнитного поля 288
- Амбиполярный коэффициент диффузии 194
  - в магнитном поле 288
- Амплитуда рассеяния 34
- Анизотропия функции распределения в электрическом поле 109
- Анизотропная составляющая функции распределения в магнитном поле 271
- Аномальная диффузия 325
- Атомный форм-фактор 49

### Б

- Баланс энергии 165
  - в сильноионизованной плазме в магнитном поле 310
  - в слабоионизованной плазме 195
  - ионов 181
  - в плазме стационарного разряда 207
  - в распадающейся плазме 215
  - электронов 172
  - в плазме стационарного разряда 205
  - в распадающейся плазме 215, 217
  - заряженных частиц в слабоионизованной плазме 195
  - в плазме стационарного разряда 201

- в распадающейся плазме 215
- в стационарном тороидальном разряде 312
- «Банановая» диффузия 317
  - траектория 257
- Близкие столкновения 38
- Больцмана  $H$ -теорема 98
  - распределение по внутренним состояниям 95
  - уравнение 84
  - формула 96
- Боме коэффициент диффузии 326
- Борна приближение для неупругих столкновений электронов с атомами 57, 58
  - для столкновений, приводящих к ионизации 58, 63
  - для упругих столкновений электронов с атомами 49
  - для суммарного сечения неупругих столкновений 58

### В

- Взаимодействие частиц с поверхностью твердого тела 72
- Винтовая неустойчивость 359, 368
  - инкремент 360
- «Вмороженность» силовых линий в плазму 338
- Возбуждение вращательных и колебательных уровней молекул 59, 60
- Возбуждения энергия 56
- Восстановление поперечной проводимости плазмы 296
- Вращательное преобразование в тороидальной магнитной ловушке 235, 255
- Время диффузии 203
  - жизни состояния 60
  - между столкновениями среднее 38
  - обмена энергией 225
  - релаксации ионной температуры в распадающейся плазме 216



— — электронной температуры в  
распадающейся плазме 215  
— теплопереноса 225  
Вторичная электронная эмиссия 72  
Вязких напряжений тензор 153  
Вязкости коэффициент 191

## Г

Газовые разряды — типичные пара-  
метры плазмы 24  
Галеева — Сагдеева формула 315  
Гаусса-теорема 234  
Гидродинамическое ускорение 162,  
329  
Гравитационная неустойчивость 349  
Граничная концентрация 196  
Граничные условия для concentra-  
ции 196, 198  
— — — — в магнитном поле 290  
— — — — для электронной температуры  
200  
Греда метод 158

## Д

Давление газокинетическое 151  
Давление тензор 152  
Дальние столкновения 38  
Движение заряженных частиц в маг-  
нитном поле 233  
Движение ограниченной плазмы по-  
перек магнитного поля 265  
Двужидкостная гидродинамика 151  
Дебаевский радиус экранирования  
11, 13  
Детального равновесия принцип 61  
Диамагнетизм плазмы 259  
Дифференциальное поперечное сече-  
ние 31, 35  
— — — — ион-атом столкновений 53  
— — — — классическая трактовка 31  
— — — — квантово-механическая  
трактовка 32, 33, 55  
— — — — кулоновских столкновений  
42  
— — — — электрон-атомных столкнове-  
ний 50  
Дифракционные эффекты 49  
Диффузии коэффициент 178  
— — в магнитном поле 270, 297, 305  
— — для электронов в отсутствие  
магнитного поля 183  
— — эффективный в тороидальных  
ловушках 315  
Диффузии механизм в отсутствие  
магнитного поля 187  
— — в присутствии магнитного поля  
282  
— — — — — в сильноионизован-  
ной плазме 302

— тензор 272  
Диффузионная направленная ско-  
рость 178  
Диффузионная частота устранения  
202  
Диффузионное распределение заря-  
женных частиц 203  
— — — — в магнитном поле 292,  
312  
Диффузия в пространстве скоростей  
117  
— — — —, обусловленная электриче-  
ским полем 122, 141, 146  
— магнитного поля 336  
— примеси 304  
— резонансного излучения 60  
Длина свободного пробега 38  
Дрейф в однородном магнитном поле  
244  
— в медленно меняющемся магнит-  
ном поле 247  
— в неоднородном магнитном поле  
250—252  
— градиентный 261  
— инерциальный 245  
— электрический 245  
Дрейфовая неустойчивость 318  
— скорость 243  
— частота 320  
Дрейфово-диссипативная неустойчи-  
вость 320, 324  
Дрейфовое приближение 243  
Дрейфовые волны 319  
Древостейна распределение 124

## Ж

Желобковая неустойчивость 346  
— — инкремент 346  
Жестчение газа 72

## З

Законы сохранения при неупругих  
столкновениях частиц 27  
— — — упругих столкновениях ча-  
стиц 22  
Замкнутости плазмы условие  
289  
Замкнутые магнитные конфигурации  
234  
— — ловушки 255  
Запас устойчивости 315, 368  
Запертое излучение 105  
Запертые частицы в тороидальных  
магнитных ловушках 255  
Захват сгустков плазмы магнитным  
полем 267  
— — электрона 71

## И

- Идеального газа модель 16
- Идеальной проводимости предел 337
- Изгиб шнура с током 357
- Изотропная составляющая функции распределения 110
- Интеграл столкновений 84, 88
- Интегральные характеристики столкновений 37
- Ионизации сечение 62
  - частота в электрическом поле 132
  - энергия 28
- Ионизационная неустойчивость 313
  - — инкремент 320
  - — условие раскачки 321
- Ионизационное равновесие 98
- Ионизация многократная атомов электронами 67
  - — — ионами 67
  - при столкновениях электронов с атомами 61
  - ступенчатая 63
- Ионная теплопроводность поперек магнитного поля 315, 317
- Ион-электронная эмиссия 74

## К

- Кадомцева критерий 352
- Катодное распыление 75
- Квазинейтральность 10
- Квантовая плазма 16
- Классического газа модель 16
- Кинетическое вырывание 74
  - уравнение 80
  - метод последовательных приближений 108
  - — столкновительный член 84
- Константа ионизационного равновесия 99
- Конус потерь 253
- Короткого замыкания эффект 293
- Космические объекты — типичные параметры плазмы 23
- Коэффициент передачи энергии при упругих столкновениях 26
  - — — электронов 27
  - — — эффективный 59, 85
- Кривизна силовых линий магнитного поля 238
- Критерий влияния электрического поля на функцию распределения 107, 108
  - применимости классического описания электрон-атомных столкновений 32, 33
  - — — ион-атомных столкновений 32, 33

- — — — кулоновских столкновений 33
- Критическая напряженность поля для «убегания» электронов 224
- — — для «убегания» энергии 231
- Кулоновских логарифмов 44, 45

## Л

- Ларморовская орбита 241
  - (циклотронная) частота 241
- Ларморовский радиус 241
  - (ведущий) центр 243
- Ленгмюровская (плазменная) частота 12
- Ленгмюровские (плазменные) колебания 12
- Лоренца сила 240

## М

- Магнитная ось тора 366
  - пробка 249
  - поверхность 235
  - — тороидальная 235
- Магнитное давление 262
  - зеркало 249
- Магнитный момент ларморовской орбиты 242
- Магнитогидродинамическое описание плазмы 328
  - — — условия применимости 328
- Максвелла — Больцмана распределение 96
- Максвелла уравнения 331
- Максвелловский тензор напряжений 335
- Максвелловское распределение в равновесной плазме 93
  - — электронов в электрическом поле 124, 134
- Месси критерий 65
- Методы описания столкновений 28
- Моменты функции распределения 151

## Н

- Направленная скорость 151
  - — — амбиполярная 194
  - — — в магнитном поле 289
  - — — в сильноионизированной плазме 222
  - — — заряженных частиц в электрическом поле 107
  - — — ионов в электрическом поле 150
  - — — слабоионизированной плазмы в магнитном поле 268
  - — — сильноионизированной плазмы 221

— — — сильноионизованной плазмы в магнитном поле 294, 296  
 — — суммарная в слабоионизованной плазме 177, 269  
 — — электронов в переменном электрическом поле 145  
 — — — в присутствии электрического и магнитного поля 140  
 — составляющая функции распределения 110  
 натяжение силовых линий магнитного поля 335  
 неизотермическая плазма 10  
 нейтрализация атомов 70  
 неоклассическая диффузия 324  
 неравновесная плазма 10

## О

Обдирка 67  
 Обменное взаимодействие при кулоновских столкновениях 42  
 — — при электрон-атомных столкновениях 48  
 Оже-процесс 74  
 Ома закон обобщенный 330  
 Онзагера принцип 186  
 Оптическая толщина плазмы 105  
 Открытые магнитные конфигурации 234  
 — — ловушки 252

## П

Парамагнитные токи в ограниченной плазме 260  
 Пеннинга эффект 67  
 Перегревная неустойчивость 310  
 Передача импульса при упругих столкновениях 25  
 — кинетической энергии при упругих столкновениях 26  
 Перезарядка 54  
 Переноса процессы в отсутствие магнитного поля 176  
 — — в магнитном поле 268  
 — — в тороидальных магнитных конфигурациях 310  
 Перенос энергии в отсутствие магнитного поля — механизм 189  
 Перенос энергии в сильноионизованной плазме 223  
 — — — — — поперечный в магнитном поле 306  
 Перестановочная неустойчивость 351  
 Перетяжечная неустойчивость шнура с током 357  
 Пинч-эффект линейный 353  
 Плазменная частота 10

Плазменные колебания 10  
 Плотность тока 178, 221, 223  
 Подвижности тензор 271, 297  
 Подвижность 178  
 — поперечная электронов в магнитном поле 270  
 — электронов в отсутствие магнитного поля 183  
 Полоидальное магнитное поле 367  
 Поляризаационное взаимодействие при ион-атомных столкновениях 53  
 — — при электрон-атомных столкновениях 48  
 Поляризация плазмы в скрещенных полях 263  
 потенциальное вырывание 74  
 Поток импульса — тензор плотности 152  
 — магнитного поля 234  
 — тепла 154, 185, 223, 272, 277  
 — энергии 154, 185  
 Потoki в пространстве скоростей, связанные со столкновениями 115, 151  
 Приведенная масса 24  
 Прицельное расстояние 29  
 Пробочное отношение 254  
 Проводимость сильноионизованной плазмы 221  
 Проводимость слабоионизованной плазмы 179  
 Пролетные частицы в тороидальных магнитных ловушках 255  
 Простая плазма 11  
 Пфирша — Шлютера формула 315  
 Пяти моментов приближение 160

## Р

Равновесие плазмы в магнитном поле 334, 335  
 — тороидального плазменного шнура 363  
 — частичное 104  
 Равновесная плазма 9, 92  
 Разделение зарядов — временной масштаб 12  
 — — пространственный масштаб 10  
 Рамзауэта эффект 52  
 Распада постоянная времени 217, 292  
 Распад плазмы 214  
 Расстояние максимального сближения при столкновениях 30  
 Резерфорда формула 42  
 Рекомбинации коэффициент 68  
 — сечение 67  
 Рекомбинация 67  
 — диссоциативная 71  
 — радиационная 70

— ударная 69  
— ударно-радиационная 70  
Рэлея — Тейлора неустойчивость 347

## С

Сайдема критерий 363  
Саха формула 102  
Сечение ионизации, аппроксимация 63  
— кулоновских столкновений, транспортное 43  
— неупругих столкновений, аппроксимация 57  
— — — полное 40  
— — — электронов с атомами 56  
— передачи импульса 39  
— рассеяния полное 37  
— тормозное 39  
— упругих столкновений, аппроксимация 52, 53  
— — — ионов с атомами 78  
— — — электронов с атомами 73  
Силовая линия магнитного поля 233  
— трубка 234  
Силовой центр 29  
Сильного взаимодействия радиус 42  
Сильноионизованная плазма (критерий) 176  
Система уравнений магнитной гидродинамики 333  
Скачок потенциала в пристеночном слое 197  
Скин-время 336  
Скин-слой 336  
Скорость относительная 24  
— центра инерции 23  
Слабоионизованная плазма (критерий) 176  
Слой пристеночный 196  
Средний минимум поля 353  
Средняя энергия заряженных частиц в электрическом поле 107  
Стабилизация неустойчивостей проводящим кожухом 358  
— — продольным полем 357, 358  
— — широм 360  
Стационарности решений уравнения движения критерий 177  
Статистическая сумма 101  
— — внутренняя 101  
— — связанная с поступательными степенями свободы 101  
Степень ионизации 10  
— — в равновесной плазме 102  
Столкновения, методы описания 28  
— , интегральные характеристики 37  
— неупругие 23  
— — второго рода 23  
— — ионов с атомами 64

— — первого рода 23  
— — электронов с атомами 56, 58  
— упругие 23  
— — заряженных частиц 41  
— — ионов с атомами 53  
— — электронов с атомами 47  
— — — — —, взаимодействие с экранированным полем ядра 47  
Столкновительный интеграл в уравнениях для изотропной и направленной составляющих функции распределения электронов 112  
— — в форме Ландау 90  
— член кинетического уравнения для электронов 89  
— — , неупругие столкновения 87  
— — , упругие столкновения 84

## Т

Температура 10  
— ионов в электрическом поле 150  
— электронов в электрическом поле 124, 134, 137, 206  
— — в переменном электрическом поле 147  
— — в присутствии магнитного поля 142  
Температуропроводности коэффициент 180, 275, 307, 308  
Тензор векторной производной магнитного поля 233  
Тепловой поток ионный в сильноионизованной плазме 224, 225  
— — — в слабоионизованной плазме 181, 182  
— — , переносимый нейтральными атомами 181  
— — электронный в сильноионизованной плазме 224, 306  
— — — в слабоионизованной плазме 180, 181  
Теплоперенос в сильноионизованной плазме 225  
Теплоперенос поперек магнитного поля (механизм) 285  
Теплопроводности коэффициент 180  
— — коэффициенты в магнитном поле 275  
— — ионной коэффициенты в сильноионизованной плазме в магнитном поле 308  
— — в тороидальных ловушках эффективный коэффициент 315  
— — электронный коэффициенты в сильноионизованной плазме 224  
— — — — — в магнитном поле 307  
Термодиффузии в магнитном поле коэффициент 270

— — — — В сильноионизированной  
 плазме коэффициент 297  
 — в отсутствие магнитного поля ко-  
 эффициент 178  
 — в отсутствие магнитного поля ме-  
 ханизм 188  
 — в сильноионизированной плазме ме-  
 ханизм 302  
 — поперек магнитного поля меха-  
 низм 284  
 — электронной коэффициент 183  
 Термосила 167, 180  
 — в магнитном поле 273, 330  
 — — — — в сильноионизированной  
 плазме 294  
 — — — — механизм возникновения  
 286  
 Термозлектронная эмиссия 72  
 Термоядерный эксперимент, типич-  
 ные параметры плазмы 21  
 Токамак 225  
 Томсона модель 62  
 Торондальное магнитное поле 367  
 Транспортная длина свободного про-  
 бега 39  
 Транспортная частота столкновений  
 39  
 Транспортное сечение упругих  
 столкновений 39  
 Трение в пространстве скоростей 117  
 Трения сила 167  
 Тринадцати моментов приближение  
 160  
 Турбулентная диффузия 325  
 — плазма 325  
 — теплопроводность 325

## У

Убегание электронов эффект 226  
 — энергии электронов 230, 310  
 Убегания электронов ограничения  
 228  
 — энергии ограничения 231, 232  
 Углы рассеяния 25  
 Угол вращательного преобразования  
 235  
 Удельный объем силовой трубки 235  
 Уравнение второго момента 165  
 — для теплового потока 174  
 — непрерывности 160  
 — нулевого момента 160  
 Уравнения движения компонент  
 плазмы 160, 162  
 — моментов функции распределения  
 151  
 — первого момента 160  
 Усредненная частота упругих столк-  
 новений 163, 273

— — — — электрон-ионных столкновений  
 221  
 Устойчивость границы плазмы в маг-  
 нитном поле 342  
 — плазменного шнура с током 353  
 — удержания плазмы магнитным по-  
 лем 338

## Ф

Фоккера — Планка уравнение 91  
 Фотоионизация 99  
 Фотоэффект 73  
 Функция распределения 77  
 — — — — анизотропия в электрическом  
 поле 109  
 — — — — в равновесной плазме 93  
 — — — — установление 96  
 — — — — заряженных частиц в электри-  
 ческом поле 106  
 — — — — ионов в электрическом поле  
 147  
 — — — — одномерная 79  
 — — — — по полным скоростям 79  
 — — — — по скоростям 78  
 — — — — по энергиям 79  
 — — — — разложение по полиномам Ле-  
 жандра 109  
 — — — — разложение по трехмерным по-  
 линомам Эрмита — Чебышева 159  
 — — — — электронов, влияние магнитно-  
 го поля 138  
 — — — — неупругих столкновений  
 125  
 — — — — электрон-электронных  
 столкновений 133  
 — — — — в переменном электрическом  
 поле 143  
 — — — — в постоянном электрическом  
 поле 120  
 — — — — в электрическом и магнит-  
 ных полях, разложение в ряд 111  
 — — — — шестимерная 78

## Х

Хаотическая скорость 151  
 Характерное время нагрева сильно-  
 ионизированной плазмы 309  
 — — — — теплопередачи поперек магнит-  
 ного поля 309  
 Холловское поле 331

## Ц

Центр инерции сталкивающихся ча-  
 стиц 23

## Ч

Частота кулоновских столкновений  
 47

- неупругих столкновений 40
- столкновений 38
- электрон-атомных столкновений, определяющих подвижность электронов 183
- электрон-атомных столкновений, определяющих диффузию электронов 183
- Чу — Гольдбергера — Лоу (ЧГЛ) магнитная гидродинамика 334

### Ш

- Шафранова — Крускала критерий 362
- Шир 233

### Э

- Эйнштейна соотношение 178, 270
- Электрическая проницаемость плазмы 264
- Электроотрицательные газы 71
- Электропроводности механизм 187
- поперек магнитного поля механизм 281
- Эльверта формула 105
- Энергетический принцип анализа магнитогидродинамических неустойчивостей 341
- Энергия относительного движения 24
- центра инерции 24
- Энтропия 96
- Эстафетный механизм движения ионов в электрическом поле 148

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Основные обозначения . . . . .	5
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1.1. Ионизованные газы и плазма . . . . .	9
§ 1.2. Квазинейтральность плазмы . . . . .	10
§ 1.3. Особенности движения заряженных частиц в плазме . . . . .	14
§ 1.4. Параметры плазмы . . . . .	17
<b>Глава 2. Столкновения в плазме . . . . .</b>	<b>22</b>
§ 2.1. Применение законов сохранения к столкновениям частиц . . . . .	22
§ 2.2. Методы описания столкновений . . . . .	28
§ 2.3. Интегральные характеристики столкновений . . . . .	37
§ 2.4. Упругие столкновения между заряженными частицами . . . . .	41
§ 2.5. Упругие столкновения электронов с атомами . . . . .	47
§ 2.6. Упругие столкновения ионов с атомами . . . . .	53
§ 2.7. Неупругие столкновения электронов с атомами . . . . .	56
§ 2.8. Ионизация при столкновениях электронов с атомами . . . . .	61
§ 2.9. Неупругие столкновения ионов с атомами . . . . .	64
§ 2.10. Рекомбинация при столкновениях электронов с ионами . . . . .	67
§ 2.11. Взаимодействие заряженных частиц с поверхностью твердых тел . . . . .	72
<b>Глава 3. Кинетическое уравнение для заряженных частиц . . . . .</b>	<b>77</b>
§ 3.1. Функция распределения . . . . .	77
§ 3.2. Кинетическое уравнение . . . . .	80
§ 3.3. Столкновительный член кинетического уравнения . . . . .	84
<b>Глава 4. Равновесная плазма . . . . .</b>	<b>92</b>
§ 4.1. Функция распределения в равновесной плазме . . . . .	92
§ 4.2. Установление равновесной функции распределения . . . . .	96
§ 4.3. Ионизационное равновесие . . . . .	98
§ 4.4. Частичное равновесие в плазме . . . . .	103
<b>Глава 5. Функция распределения заряженных частиц в электрическом поле . . . . .</b>	<b>106</b>
§ 5.1. О влиянии электрического поля на распределение заряженных частиц по скоростям . . . . .	106
§ 5.2. Метод решения кинетического уравнения . . . . .	108
§ 5.3. Интегралы столкновений для электронов . . . . .	113
§ 5.4. Функция распределения электронов в электрическом поле при определяющем влиянии упругих столкновений электронов с атомами . . . . .	120

§ 5.5. Влияние неупругих столкновений на функцию распределения электронов . . . . .	125
§ 5.6. Влияние электрон-электронных столкновений на функцию распределения электронов . . . . .	133
§ 5.7. Влияние магнитного поля на функцию распределения электронов . . . . .	138
§ 5.8. Функция распределения электронов в переменном электрическом поле . . . . .	143
§ 5.9. О функции распределения ионов в электрическом поле . . . . .	147
<b>Глава 6. Уравнения моментов функции распределения . . . . .</b>	<b>151</b>
§ 6.1. Моменты функции распределения . . . . .	151
§ 6.2. Получение уравнений моментов . . . . .	154
§ 6.3. Уравнения движения и баланса частиц компонент плазмы . . . . .	160
§ 6.4. Уравнения баланса энергии и теплового потока . . . . .	169
<b>Глава 7. Процессы переноса в плазме при отсутствии магнитного поля . . . . .</b>	<b>176</b>
§ 7.1. Направленное движение и перенос энергии заряженных частиц в слабоионизованной плазме . . . . .	176
§ 7.2. Коэффициенты подвижности, диффузии и теплопроводности электронов . . . . .	182
§ 7.3. Механизм процессов переноса . . . . .	186
§ 7.4. Амбиполярная диффузия . . . . .	191
§ 7.5. Уравнения баланса заряженных частиц и энергий в слабоионизованной плазме . . . . .	195
§ 7.6. Баланс заряженных частиц и энергий в плазме стационарного газового разряда . . . . .	201
§ 7.7. Ионизационная неустойчивость . . . . .	208
§ 7.8. Распад плазмы . . . . .	214
§ 7.9. Направленное движение в сильноионизованной плазме . . . . .	218
§ 7.10. Перенос энергии в сильноионизованной плазме . . . . .	223
§ 7.11. Эффект «убегания» электронов . . . . .	226
<b>Глава 8. Движение заряженных частиц плазмы в магнитном поле . . . . .</b>	<b>233</b>
§ 8.1. Некоторые сведения о статических магнитных полях . . . . .	233
§ 8.2. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле . . . . .	240
§ 8.3. Дрейф заряженных частиц в однородном магнитном поле . . . . .	243
§ 8.4. Движение заряженных частиц в медленно изменяющемся магнитном поле . . . . .	247
§ 8.5. Удержание заряженных частиц некоторыми магнитными конфигурациями . . . . .	252
§ 8.6. Диамагнитный эффект в плазме . . . . .	259
§ 8.7. Поляризация плазмы в электрическом поле, перпендикулярном магнитному . . . . .	263
§ 8.8. Движение плазмы поперек магнитного поля . . . . .	265
<b>Глава 9. Процессы переноса в магнитном поле . . . . .</b>	<b>268</b>
§ 9.1. Направленная скорость и тепловой поток заряженных частиц слабоионизованной плазмы в магнитном поле . . . . .	268
§ 9.2. Поперечные коэффициенты подвижности, диффузии и теплопроводности электронов . . . . .	275
§ 9.3. Механизм переноса заряженных частиц и их энергии поперек сильного магнитного поля . . . . .	278
§ 9.4. Амбиполярная диффузия и баланс заряженных частиц слабоионизованной плазмы в магнитном поле . . . . .	287
§ 9.5. Направленное движение заряженных частиц сильноионизованной плазмы поперек магнитного поля . . . . .	293



§ 9.6. Поперечный перенос энергии в сильноионизованной плазме	306
§ 9.7. О процессах переноса в тороидальных магнитных конфигурациях	310
§ 9.8. Дрейфовые неустойчивости и аномальная диффузия заряженных частиц плазмы в магнитном поле	318
<b>Глава 10. Удержание плазмы магнитным полем</b>	<b>328</b>
§ 10.1. Уравнения магнитной гидродинамики	328
§ 10.2. О равновесии плазмы в магнитном поле	334
§ 10.3. Об устойчивости удержания плазмы магнитным полем	338
§ 10.4. Устойчивость границы плазмы в магнитном поле	342
§ 10.5. Равновесие и устойчивость плазменного шнура с током	353
§ 10.6. Равновесие и устойчивость тороидального плазменного шнура	363
Список литературы	371
Предметный указатель	375

### ИБ № 449

*Виктор Евгеньевич Голант  
Алексей Петрович Жилинский  
Игорь Евгеньевич Сахаров*

### ОСНОВЫ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

Редактор **Н. Е. Никитина**  
Художественный редактор **А. Т. Кирьянов**  
Переплет художника **А. И. Шаварда**  
Технический редактор **И. Н. Подшебакин**  
Корректор **Н. И. Курьянова**

Сдано в набор 13/Х 1976 г  
Т-01668.

Усл печ. л. 24,0  
Цена 2 р. 72 к.

Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
Уч -изд. л. 24,56

Зак. изд. 74048.  
Атомиздат,

103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5.

Подписано к печати 24/II 1977 г.  
Бумага типографская № 2.

Тираж 6200 экз.  
Зак. тип. 1227.

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
Москва, И-41, Б. Переяславская ул, дом 46.